made by Mansy

صلى ع النبى وإدعيلى دعوة حلوة

#دفعة المنوفية 2022

#قناة تالتة ثانوى 2022

أكثروا من الصلاة على النبي

قناة ٣ث ٢٠٢٢
شير من الخير
صلى على النبى

الرياضيات البحتة

الجزء الخاص بالشرح
و التمارين

2022

معاك
Ma3akApp

التطبيق التفاعلى
للتعلم عن بعد

الجبر و الهندسة الفراغية

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

3
ثانوى

المعاصر

الرياضيات البحتة

الجبر و الهندسة الفراغية

الشرح و التمارين

3
ثانوى

مكتبة الطلبة
للطبع و النشر و التوزيع
٣ شارع كامل صدقي-الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/٢٥٩٣٤٠١٢
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com
الخط الساخن ١٥٠١٤

بطاقة فهرسة

فهرسة أثناء النشر إعداد إدارة الشئون الفنية - دار الكتب المصرية

المعاصر فى الرياضيات البحتة : الجبر والهندسة الفراغية /
إعداد نخبة من خبراء التعليم. -
القاهرة : مكتبة الطلبة ، ٢٠٢١.
٣ مج ؛ ٢٤ سم.
الصف الثالث الثانوى
المحتويات : جـ١. الشرح والتمارين.-
جـ٢. المراجعة المستمرة.-
جـ٣. الجزء الخاص بالإجابات.
تدمك : ٩ - ٥٤١ - ٨٣٩ - ٩٧٧ - ٩٧٨
١ - الجبر - تعليم وتدريس.
٢ - الهندسة الفراغية - تعليم وتدريس.
٣ - التعليم الثانوى.

٥١٢,٧

رقم الإيداع : ١١٥٩٤ / ٢٠٢١

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذى وفقنا لتقديم هذا الكتاب من مجموعة كتب «المعاصر» فى الرياضيات.. نقدمه إلى أبنائنا الطلبة آملين أن يجدوا فيه المعلم والموجه الذى يعينهم على فهم كل صعب، ويذلل أمامهم كل مغلق وغامض، ويأخذ بأيديهم إلى طريق النجاح والتفوق.

ونقدمه إلى إخواننا المدرسين ليكون لهم عونًا على أداء رسالتهم الشاقة، ونافذة يطلون منها على خبرات إخوة لهم أمضوا قرابة الثلاثين عامًا فى حقل التدريس والتوجيه.

ونحن لن نلجأ - فى هذا التقديم - إلى تقييم عملنا وجهدنا من خلال سرد لمزايا هذا الكتاب وما استحدث فيه، ولكننا نترك ذلك لكل من يطوى صفحة منه أو يقرأ سطرًا فيه، لكى يبدى فيه رأيًا - إن كان نقدًا فنحن نرحب به - وإن كانت كلمة ثناء فهى خير مقابل نرجوه، وأجر وسام نضعه على صدورنا.

والله لا يضيع أجر من أحسن عملاً، وهو ولى التوفيق.

« المؤلفون »

كيفية استخدام التطبيق

١
قُم بتنزيل التطبيق من
GET IT ON Google Play

٢
قُم بإنشاء الحساب الخاص بك

٣
أدخل كودك الشخصي "الموجود على ظهر الغلاف" أو امسح علامة الباركود من خلال التطبيق

حساب طالب

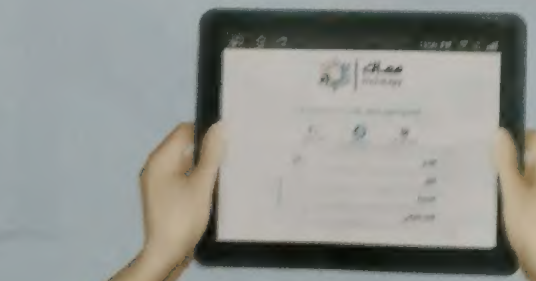
- شرح الدروس بأحدث وسائل الإيضاح
- اختبارات وامتحانات تفاعلية
- تقارير وإحصائيات
- اسأل المعاصر - الامتحان
- ألعاب وأنشطة تعليمية
- مزايا متعددة طوال العام

حساب ولي أمر

- تابع مستوى أولادك من خلال تقارير أنشطتهم على التطبيق
- تعرف على كل جديد في العملية التعليمية

حساب معلم

- تواصل مع مجموعة من طلابك وأرسل لهم مواد تعليمية واختبارات خاصة بك
- قيم مستوى طلابك من خلال متابعة أنشطتهم وتواصلهم المباشر معك



معاك
Ma3ak App

جديد
التطبيق التفاعلي للتعلم عن بُعد

استمتع
بتجربة التعلم التفاعلي لجميع المواد الدراسية
واحصل مجانًا على جميع مزايا التطبيق من...

المعاصر الامتحان

تصنيف بلوم للمستويات المعرفية

اقترح هذا التصنيف العالم بنيامين بلوم، ثم تم تحديثه ليشمل ستة مستويات معرفية مندرجة في شكل هرمي من الأبسط إلى الأرقى كالتالي:

التذكر ← الفهم ← التطبيق ← التحليل ← التقويم ← الابتكار

النموذج الحديث لـ بلوم

استراتيجيات المذاكرة المناسبة لارتقاء هرم بلوم

يوضح هرم بلوم أن كل مستوى معرفي يعتمد على المستويات التي تسبقه ويلزم لتحقيق التعلم العميق الوصول إلى المستويات العليا من التفكير ويتم ذلك بالتمكن أولاً من المستويات الدنيا من التفكير.

وفيما يلي بعض استراتيجيات المذاكرة المناسبة التي تمكنك من تحقيق هدف كل مستوى.

ملاحظة: تم تصنيف الأسئلة بداخل كل تمرين طبقًا لمستويات هرم بلوم والإشارة لها كالتالي:

● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا (تحليل أو تقويم أو ابتكار)

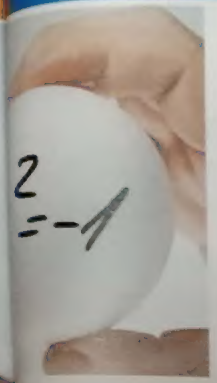
محتويات الكتاب

أولًا الجبر

الوحدة 1 التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين.

الوحدة 2 الأعداد المركبة.

الوحدة 3 المحددات والمصفوفات.

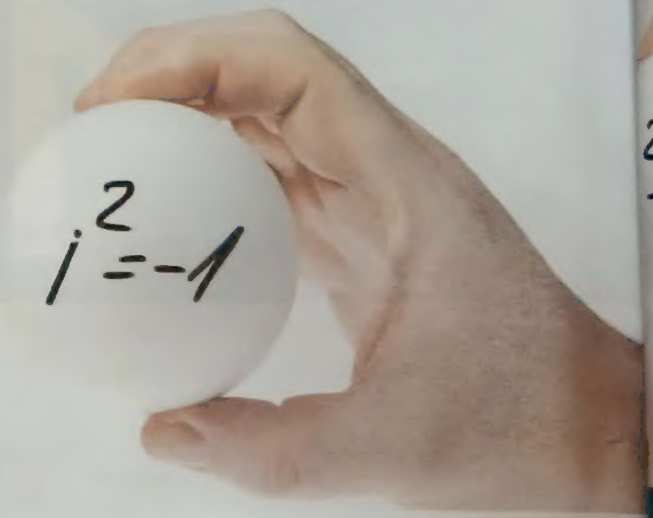


ثانيًا الهندسة الفراغية

الوحدة 1 الهندسة والقياس فى ثلاثة أبعاد.

الوحدة 2 الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ.

أولًا الجبر



الوحدة 1 التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين.

الوحدة 2 الأعداد المركبة.

الوحدة 3 المحددات والمصفوفات.

الوحدة 1

التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

يمكنك حل الاختبارات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

الدرس 1 مبدأ العد.

الدرس 2 قوانين التباديل والتوافيق.

الدرس 3 نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب.

الدرس 4 إيجاد الحد المشتمل على $س^{ر}$ من مفكوك ذات الحدين.

الدرس 5 النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين.

الدرس 1

مبدأ العد

تذكر بعض المفاهيم التى تم دراستها سابقًا

مضروب العدد

مضروب العدد الصحيح الموجب $ن$ يساوى حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوى $ن$

أى أن : $|\underline{ن} = ن(ن-١)(ن-٢) \times ..... \times ٣ \times ٢ \times ١$

ويكون عدد عوامل المضروب = $ن$ من العوامل

فمثلًا : $|\underline{٥} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٢٠$ (عدد العوامل ٥ عوامل) 120 = 5 SHIFT x! =

التباديل

- **التبديل** : هو ترتيب لعدة أشياء مختلفة بأخذها كلها أو بعض منها فى كل مرة.
- $^{ن}ل_{ر}$: هو عدد الترتيبات التى يمكن تكوينها من $ن$ من الأشياء بحيث يحتوى كل ترتيب على $ر$ من تلك الأشياء ويكون :

$^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢) \times ..... \times (ن-ر+١)$ لكل $ن \geq ر \geq ١$ ، $ن \in ص^{+}$

فمثلًا : $^{٧}ل_{٣} = ٧ \times ٦ \times ٥ = ٢١٠$ 210 = 3 SHIFT nPr 7

التوافيق

- **التوفيق** : هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء بأخذ بعضها أو كلها بصرف النظر عن ترتيبها.
- $^{ن}ق_{ر}$: هو عدد التوافيق (المجموعات) المكون كل منها من $ر$ من الأشياء المختارة معًا من بين $ن$ من العناصر ويكون : $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{|\underline{ر}}$ حيث : $ن \geq ر \geq ٠$

فمثلًا : $^{٧}ق_{٣} = \frac{^{٧}ل_{٣}}{|\underline{٣}} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$ 35 = 3 SHIFT nCr 7

مبدأ العد (قاعدة الضرب)

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى م طريقة وعدد طرق إجراء عمل آخر ن طريقة فإن عدد طرق إجراء العملين معًا (العمل الأول و العمل الثانى) = م × ن

تعميم :

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى $م_1$ طريقة وعدد طرق إجراء عمل ثان يساوى $م_2$ طريقة وعدد طرق إجراء عمل ثالث يساوى $م_3$ طريقة وهكذا إلى عدد ر من الأعمال فإن :

عدد طرق إجراء هذه الأعمال معًا (العمل الأول و العمل الثانى و العمل الثالث و ...)

$= م_1 \times م_2 \times م_3 \times ... \times م_ر$

وسوف نقوم الآن بدراسة أكثر عمقًا للمفاهيم السابقة والقوانين المرتبطة بها وإضافة بعض المفاهيم الأخرى نبدأها بمفهوم مبدأ العد (قاعدة الجمع)

مبدأ العد (قاعدة الجمع)

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى ن طريقة وعدد طرق إجراء عمل آخر يساوى م طريقة فإن : عدد طرق إجراء العمل الأول أو العمل الثانى = (م + ن) طريقة.

ونلاحظ أن مبدأ العد سواء قاعدة الضرب أو الجمع يعتمد على عدد طرق إجراء عمليتين أو أكثر والتى يمكن حساب كل منهما كما يلى :

عدد طرق إجراء عملية اختيار أشياء عددها (ر) من بين أشياء عددها (ن)

إذا كان الاختيار

- مع الاحلال والترتيب ← أى أن ← التكرار ممكن وللترتيب أهمية ← $ن^ر$
- مع الاحلال ودون مراعاة الترتيب ← أى أن ← التكرار ممكن وليس للترتيب أهمية ← $ق^{ن+ر-1}_ر$
- دون الاحلال مع مراعاة الترتيب ← أى أن ← لا يسمح بالتكرار وللترتيب أهمية ← $ل^ن_ر$
- دون الاحلال ودون مراعاة الترتيب ← أى أن ← لا يسمح بالتكرار وليس للترتيب أهمية ← $ق^ن_ر$

فإن عدد طرق الاختيار

فمثلاً

لتكوين عدد مكون من رقمين من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧}

∴ عدد طرق الاختيار = $ن^ر = ٤^٢$

= ١٦ طريقة.

لاحظ : التكرار ممكن ، الترتيب مهم

فمثلاً

لتكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧}

∴ عدد طرق الاختيار = $ل^ن_ر$

$= ل^4_2$ = ١٢ طريقة.

لاحظ : غير مسموح بالتكرار والترتيب مهم

فمثلاً

لتوزيع ٧ نسخ من كتاب واحد على ٣ أرفف يكون ن = ٣ ، ر = ٧

∴ عدد الطرق = $ق^{ن+ر-1}_ر$

$= ق^9_7$ = ٣٦ طريقة.

لاحظ : التكرار ممكن ، الترتيب غير مهم

فمثلاً

لتكوين فريق من ٤ أعضاء من بين ١٠ طلاب.

∴ عدد الطرق = $ق^ن_ر = ق^{10}_4$

= ٢١٠ طريقة.

لاحظ : التكرار غير ممكن وليس للترتيب أهمية

٦

• يمكن تلخيص ما سبق بالجدول الآتي

مع مراعاة الترتيب ... دون مراعاة الترتيب

الاختيار مع الإحلال: $ن^{ر}$ ... $^{ن+ر-١}ق_{ر}$

الاختيار دون إحلال: $^{ن}ق_{ر}$ ... $^{ن}ق_{ر}$

مثال ١

صندوق به ... كرات بيضاء متميزة و ٣ كرات حمراء متميزة أوجد عدد طرق سحب ٤ كرات بيضاء و ٣ كرات حمراء من الصندوق في كل من الحالات الآتية :

أ - كل سحب مع الإحلال والترتيب ب - كل سحب دون إحلال مع الترتيب.

جـ - كل سحب دون إحلال ودون ترتيب د - كل سحب مع الإحلال ودون ترتيب.

◄ الحل

عدد طرق سحب مع الإحلال والترتيب = ... × ... × ... × ... × ٣ × ٣ × ٣ = ٢١٦٠٠٠٠ طريقة

عدد طرق سحب دون إحلال مع الترتيب = $^{٧}ق_{٤}$ × $^{٣}ق_{٣}$ = ٢٤٨٠٠ طريقة

عدد طرق سحب دون إحلال ودون ترتيب = $^{٧}ق_{٤}$ × $^{٣}ق_{٣}$ = ٤٢٠٠ طريقة

عدد طرق سحب مع الإحلال ودون ترتيب = $^{٧+٣-١}ق_{٤}$ × $^{٣+٣-١}ق_{٣}$

= $^{٩}ق_{٤}$ × $^{٥}ق_{٣}$ = ١٠٠٤٠ طريقة

مثال ٢

إذا كان لديك ١٠ طلاب و ٦ طالبات فبكم طريقة يمكن تكوين مجموعة :

أ - مكونة من ٣ طلاب وطالبتين. ب - مكونة من ٣ طلاب أو طالبتين.

◄ الحل

عدد طرق اختيار ٣ طلاب من بين ١٠ طلاب = $^{١٠}ق_{٣}$ = $\frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!}$ = $\frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{١ \times ٢ \times ٣}$ = ١٢٠ طريقة.

عدد طرق اختيار طالبتين من ٦ طالبات = $^{٦}ق_{٢}$ = $\frac{٦ \times ٥}{١ \times ٢}$ = ١٥ طريقة.

عدد طرق تكوين مجموعة من ٣ طلاب وطالبتين = ١٢٠ × ١٥ = ١٨٠٠ طريقة.

عدد طرق تكوين مجموعة من ٣ طلاب و طالبتين = ١٢٠ + ١٥ = ١٣٥ طريقة

ب - يتحقق في حساب عدد طرق الاختيار بصفة و بصفات وقت لأنه لا يهم ترتيب الأشخاص في مجموعة سي تختارها

مثال ٣

بكم طريقة يمكن انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من أربعة أشخاص من بين عشرة أشخاص بحيث لا يدخل شخص في كلتا اللجنتين ؟

◄ الحل

بعد ولا اختيار ٤ أشخاص من ١٠ أشخاص ($^{١٠}ق_{٤}$)

بعد اختيار ٤ أشخاص من ٦ أشخاص المتبقين ($^{٦}ق_{٤}$)

∴ عدد الطرق = $^{١٠}ق_{٤}$ × $^{٦}ق_{٤}$ = ٣١٥٠٠ طريقة

مثال ٤

إذا كان لديك ٥ كرات متماثلة وثلاثة صناديق مختلفة فأوجد عدد الطرق التي يمكن بها :

أ - وضع ٤ كرات في ٣ صناديق

ب - وضع ٤ كرات في ٣ صناديق بحيث لا يكون هناك صندوق فارغ

◄ الحل

أ - تتكرر الكرة في وضع أكثر من كرة في نفس الصندوق ، الترتيب غير مهم

الكرات متماثلة

∴ عدد الطرق = $^{ن+ر-١}ق_{ر}$ = $^{٣+٤-١}ق_{٤}$ = ١٥ طريقة

ب - نضع كرة في كل صندوق حتى لا يكون هناك صندوق فارغ ، يتبقى كرتان يتم توزيعهما على ٣ صناديق.

∴ تصبح ن = ٢ ، ر = ٣ ∴ عدد الطرق = $^{٣+٢-١}ق_{٢}$ = $^{٤}ق_{٢}$ = ٦ طرق.

مثال ٥

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من رقمين أو أكثر من مجموعة الأرقام : {١ ، ٣ ، ٤ ، ٦}

بحيث تكون جميع أرقامه مختلفة ؟

◀ الحل

∵ العدد المراد تكوينه مكون من رقمين أو أكثر

∴ العدد مكون من رقمين : ٣ أرقام

: ٤ أرقام مختلفة.

، ∵ عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين

= $^{٤}ل_{٢}$ = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة.

لاحظ أن

يمكن عدد من رقم مختلفة فى مكرر غير موجود و لترتيب فهذا لذلك مستخدمنا التوافيق.

، عدد طرق تكوين عدد مكون من ثلاثة أرقام مختلفة

= $^{٤}ل_{٣}$ = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤ طريقة.

لاحظ أن

ة ترتيب من خلال تؤدى إلى استخدام عدد الأعداد الجمع.

، عدد طرق تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة = $^{٤}ل_{٤}$ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ طريقة.

∴ عدد طرق تكوين عدد أرقامه مختلفة ومكون من رقمين أو أكثر

= $^{٤}ل_{٢}$ + $^{٤}ل_{٣}$ + $^{٤}ل_{٤}$ = ١٢ + ٢٤ + ٢٤ = ٦٠ طريقة.

مثال ٦

تحتوى ورقة امتحان على ٨ أسئلة وعلى الطالب أن يجيب على ٥ أسئلة فقط منها بشرط أن تتضمن على ٣ أسئلة على الأقل من الخمسة الأولى ، فكم طريقة يمكن بها للطالب اختيار الأسئلة التى يجيب عنها ؟

◀ الحل

يمكن للطالب أن يختار :

* ٣ أسئلة من الخمسة الأولى : و : سؤالين من الثلاثة أسئلة التالية بطرق عددها

= $^{٥}ق_{٣}$ × $^{٣}ق_{٢}$ = ١٠ × ٣ = ٣٠ طريقة.

لاحظ أن

للإجابة عن الأسئلة فإن التكرار غير موجود وليس للترتيب أهمية لذلك استخدمنا التوافيق.

* ٤ أسئلة من الخمسة الأولى : سؤال واحد فقط من الثلاثة أسئلة التالية بطرق عددها

= $^{٥}ق_{٤}$ × $^{٣}ق_{١}$ = ٥ × ٣

= ١٥ طريقة

لاحظ أن

ة ترتيب من خلال تؤدى إلى استخدام عدد الأعداد الجمع.

* ٥ أسئلة من الخمسة الأولى : لا اختيار فى سؤال من ثلاثة أسئلة التالية بطرق عددها

= $^{٥}ق_{٥}$ × $^{٣}ق_{٠}$ = ١ × ١ = ١ طريقة.

∴ عدد طرق اختيار الأسئلة = ٣٠ + ١٥ + ١ = ٤٦ طريقة.

ملاحظة

∵ كان عدد أضلاع المضلع = ن أضلاع ∴ عدد رءوسه = ن رأس.

∴ عدد جميع القطع المستقيمة الواصلة بين أى رأسين فى الشكل (أضلاع + قطر) = $^{ن}ق_{٢}$

، ∵ قطر المضلع هو القطعة المستقيمة التى تصل بين رأسين غير متتاليين

∴ عدد قطر المضلع = عدد جميع القطع المستقيمة − عدد أضلاع الشكل

= $^{ن}ق_{٢}$ − ن

∴ عدد قطر المثلث = $^{٣}ق_{٢}$ − ٣ = صفر ، عدد قطار الشكل الرباعى = $^{٤}ق_{٢}$ − ٤ = ٢

، عدد قطر المضلع عدد أضلاعه ١٠ = $^{١٠}ق_{٢}$ − ١٠ = ٣٥

مثال ٧

أوجد عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه :

١) ٨ ٢) ١٠

◀ الحل

① عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس مضلع عدد أضلاعه ٨ = $^{٨}ق_{٣}$ = ٥٦

② عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس مضلع عدد أضلاعه ١٠ = $^{١٠}ق_{٣}$ = ١٢٠

ملاحظات

عدد طرق ترتيب ن من الأشياء المتمايزة
- فى صف = $\underline{|ن}$
- فى دائرة = $\underline{|ن - ١}$

* عدد طرق ترتيب وقوف ٥ تلاميذ فى صف = $\underline{|٥}$ = ١٢٠ طريقة.
* عدد طرق ترتيب وقوف ٥ تلاميذ فى دائرة = $\underline{|٤}$ = ٢٤ طريقة.

عدد طرق ترتيب ر من الأشياء المتمايزة فى ن من الأماكن ، ر < ن إذا كانت
- الأماكن متمايزة على شكل صف = $^{ن}ل_{ر}$
- الأماكن متمايزة على شكل دائرة = $^{ن}ل_{ر}$
- الأماكن متماثلة على شكل دائرة = $\frac{^{ن}ل_{ر}}{ن}$ = $^{ن-١}ل_{ر-١}$

* عدد طرق وقوف ٤ سيارات فى موقف به ٦ أماكن متمايزة على شكل صف = $^{٦}ل_{٤}$ = ٣٦٠
* عدد طرق وقوف ٤ سيارات فى موقف به ٦ أماكن متمايزة على شكل دائرة = $^{٦}ل_{٤}$ = ٣٦٠
* عدد طرق وقوف ٤ سيارات فى موقف به ٦ أماكن متماثلة على شكل دائره = $\frac{^{٦}ل_{٤}}{٦}$ = $^{٦}ل_{٦}$ ٦٠

عدد طرق ترتيب ر من الأشياء المتمايزة فى ن من الأماكن بحيث تكون الأشياء متجاورة ، ر < ن إذا كانت
- الأماكن متمايزة على شكل صف = (ن - ر + ١) $\underline{|ر}$
- الأماكن متمايزة على شكل دائرة = ن $\underline{|ر}$
- الأماكن متماثلة على شكل دائرة = $\underline{|ر}$

* عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة فى موقف به ٦ أماكن متمايزة على شكل صف = (٦ - ٤ + ١) $\underline{|٤}$ = ٧٢
* عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة فى موقف به ٦ أماكن متمايزة على شكل دائرة = ٦ $\underline{|٤}$ = ١٤٤
* عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة فى موقف به ٦ أماكن متماثلة على شكل دائرة = $\underline{|٤}$ = ٢٤

على مبدأ العد

اختبار تفاعلى

مستويات عليا

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- عدد طرق اختيار فريق من ٦ أشخاص من بين ١٢ شخصًا يساوى
(أ) $^{١٢}ل_{٦}$ (ب) $^{١٧}ق_{٦}$ (جـ) $^{١٢}ق_{٦}$ (د) $^{١٧}ق_{١٢}$

- بكم طريقة يمكن لحسام أن يتناول وجبة ومشروبًا من ثلاث وجبات (كفتة - فراخ - سمك) ومشروبين (عصير - مياه غازية) ؟
(أ) ٣^{٢} (ب) $^{٣}ق_{٢}$ (جـ) $\underline{|٣}$ $\underline{|٢}$ (د) $^{٣}ل_{٢}$

- عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين مأخوذة من مجموعة الأرقام {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} يساوى
(أ) ٢^{٥} (ب) ٥^{٢} (جـ) $^{٥}ل_{٢}$ (د) $^{٥}ق_{٢}$

- اشترك ١٢ لاعبًا من مسابقة للسباحة ، كم طريقة يمكن بها ترتيب المركز الأول والثانى والثالث ؟
(أ) ١٢٣٠ (ب) ١٣٢٠ (جـ) ٢٣١٠ (د) ٣٢١٠

- حقيبة بها ٥ كرات مرقمة من ١ إلى ٥ سحبت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال فإن عدد الطرق الممكنة يساوى .....
(أ) ٥^{٢} (ب) ٢^{٥} (جـ) $^{٥}ق_{٢}$ (د) $^{٥}ل_{٢}$

- اذا كانت س = {س : س ∈ ط ، ٥ ≤ س ≤ ٩} وكانت ص = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ س} فإن ن(ص) =
(أ) $^{٥}ل_{٢}$ (ب) $^{٥}ق_{٢}$ (جـ) ٥^{٢} (د) ٢^{٥}

- إذا كانت : س = {س : س ∈ ط ، ٥ ≤ س ≤ ٩}
وكانت ص = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ س ، أ ≠ ب}
فإن عدد عناصر ص = ...
(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٥

[illegible]

[illegible]

[illegible] فريق من عدد مباريات هذا الدوري

[illegible]

عدد تحيز [illegible] وحدة تلو الأخرى في خط مستقيم لسيارات وكل هناك [illegible] تشكل صف من عدد فرق تشغل هذه الأماكن يساوي

[illegible]

عدد طرق توزيع [illegible] على ٣ طلاب =

[illegible]

عدد طرق اختيار فريق مكون من [illegible] أفراد من ٩ بنات [illegible] إذا كان الفريق يحتوي على ٣ أولاد فقط يساوي

[illegible] ٣٠٨٤ (ب) ١٢٣٦٠ (ج) [illegible]

عدد طرق اختيار مجموعة من ٣ طالبات و ٤ طلاب من بين ٥ طالبات و ٦ طلاب يساوي

(أ) $^{٦}ل_{٣} \times ^{٥}ل_{٤}$ (ب) $^{٦}ل_{٣} - ^{٥}ل_{٤}$

(ج) $^{٦}ق_{٣} \times ^{٥}ق_{٤}$ (د) $^{٦}ق_{٣} + ^{٥}ق_{٤}$

(أسوان ٢٠١٧) عدد طرق اختيار حرفين أو ثلاثة أحرف مختلفة معًا من عناصر المجموعة : {أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و} هي .....

(أ) $^{٦}ق_{٢} \times ^{٦}ق_{٣}$ (ب) $^{٦}ل_{٢} \times ^{٦}ل_{٣}$

(ج) $^{٦}ق_{٢} + ^{٦}ق_{٣}$ (د) $^{٦}ل_{٢} + ^{٦}ل_{٣}$

عدد طرق اختيار أربعة أحرف على الأقل مختلفة معًا من عناصر المجموعة {أ ، ب ، جـ ، د ، هـ} هي

(أ) $^{٥}ق_{٤} - ^{٥}ق_{٣}$ (ب) $^{٥}ق_{٤} \times ^{٥}ق_{٣}$

(جـ) $^{٥}ل_{٤} - ^{٥}ل_{٣}$ (د) $^{٥}ل_{٤} \times ^{٥}ل_{٣}$

عدد طرق اختيار ٣ أشخاص معا من مجموعة مكونة من ٥ رجال ، ٣ نساء إذا كان الأشخاص الثلاثة فيهم اثنان فقط من نفس الجنس يساوي

(أ) $^{٥}ق_{٢} \times ^{٣}ق_{١}$ (ب) $^{٥}ق_{٢} - ^{٣}ق_{١}$

(جـ) $^{٥}ق_{٣} \times ^{٣}ق_{٠}$ (د) $^{٥}ق_{٣} \times ^{٣}ق_{٠} - ^{٥}ق_{٢} \times ^{٣}ق_{١}$

يجب على الطالب أن يجيب على ١٠ أسئلة من ١٣ سؤال بشرط أن يجيب عن ٤ أسئلة على الأقل من الأسئلة الخمس الأولى ، كم طريقة يمكن أن يجيب بها الطالب :

(أ) ١٤٠ (ب) ١٩٦ (جـ) ٢٨٠ (د) ٣٤٦

من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين أو من ثلاث أرقام مختلفة

(أ) ٢٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠٠

عدد طرق تكوين عدد أولي مكون من ٣ أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ هو

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) صفر

عدد الأعداد الزوجية المكونة من رقمين مختلفين التي يمكن تكوينها من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ يساوي .....

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ١٥

٤ رجال و ٣ سيدات وطفلين يراد جلوسهم في دائرة فإن عدد طرق ترتيب جلوسهم = ...

(أ) $\underline{|٨}$ (ب) $\underline{|٩}$ (جـ) $\frac{١}{٢}\underline{|٨}$ (د) $\frac{١}{٢}\underline{|٩}$

٢٧ لجنة مؤلفة من ١٢ عضوا بكم طريقة يمكن اختيار رئيسا ونائب للرئيس ثم عدد ٢ مساعدين لهذه اللجنة .

(أ) ٤٨٠ (ب) ٤٩٥ (جـ) ١١٨٨٠ (د) ٥٩٤٠

٢٨ عدد الطرق المختلفة التى يمكن بها لشخص دعوة صديق أو أكثر من ٦ أصدقاء يساوى

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٣ (د) ١٢٠

٢٩ إذا كان الرقم السرى لقفل يتكون من ٣ أرقام مختلفة من بين الارقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ٩} بكم طريقة يمكن تكوين رقم سرى يحتوى على الرقم ٦ .

(أ) ١٦٨ (ب) ١١٦ (جـ) ٣٣٦ (د) ٣٣٤

٣٠ عدد طرق اختيار فريق مكون من ١١ لاعب من بين ٢٢ لاعب مع استبعاد ٤ لاعبين بصفة دائمة واختيار ٢ لاعب بصفة دائمة يساوى

(أ) $^{١٦}ق_{٩}$ (ب) $^{١٦}ق_{٧}$ (جـ) $^{٢٠}ق_{٩}$ (د) $^{٢٠}ق_{٧}$

٣١ باستخدام ١٠ نقاط فى المستوى لا توجد ثلاثة منها على استقامة واحدة فإن عدد القطع المستقيمة التى يمكن رسمها = م ، عدد القطع المستقيمة موجهة التى يمكن رسمها = ن فإن م − ن =

(أ) ٩٠ (ب) ١٣٥ (جـ) ١٨٠ (د) ٢١٠

٣٢ عدد أقطار مضلع عدد أضلاعه م هو

(أ) $^{م}ق_{٢}$ (ب) $^{م}ق_{٢} - ٢$ (جـ) $^{م}ق_{٢} - م$ (د) $^{م}ل_{٢}$

٣٣ المضلع الذى يحتوى على ٤٤ قطرًا عدد أضلاعه يساوى .....

(أ) ١١ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٣

٣٤ عدد المثلثات التى يمكن رسمها بحيث رؤوسه تكون من رؤوس مضلع ثمانى هى .....

(أ) $^{٣}٨$ (ب) $^{٨}ل_{٣}$ (جـ) $^{٨}ق_{٣}$ (د) $^{١٠}ق_{٨}$

٣٥ إذا كانت النقط أ ، ب ، جـ ، د ، هـ تقع على دائرة فإن عدد المضلعات التى يمكن رسمها ويكون رؤوسها من هذه النقط = ...

(أ) ٥ (ب) ٥٠ (جـ) ١٦ (د) ٩

٣٦ عدد طرق الموافقة على قرار بالأغلبية للجنة مكونة من ٥ أشخاص = .

(أ) ١٦ (ب) ٥٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ١٢٠

٣٧ عدد الطرق التى يمكن بها انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصًا بحيث لا يدخل الشخص فى كلتا اللجنتين هو

(أ) $^{١٢}ق_{٣} \times {}^{٩}ق_{٣}$ (ب) $^{١٢}ق_{٣} + {}^{٩}ق_{٣}$

(جـ) $^{١٢}ل_{٣} + {}^{٩}ل_{٣}$ (د) $^{١٢}ل_{٣} \times {}^{٩}ل_{٣}$

٣٨ عدد طرق توزيع ١٥ بطاقة متماثلة على ٤ أشخاص بحيث لا يأخذ أى منهم أقل من بطاقتين يساوى

(أ) $^{١٣}ق_{٤}$ (ب) $^{٧}ق_{٤}$ (جـ) $^{١}ق_{٤}$ (د) $^{١٠}ق_{٧}$

٣٩ عدد الطرق التى يمكن وضع ٣ كرات متماثلة فى ٥ خانات على صف واحد إذا كانت الخانه لا تسع إلا لكرة واحدة هو .....

(أ) $^{٣}٥$ (ب) $^{٥}ل_{٣}$ (جـ) $^{٧}ق_{٣}$ (د) $^{٥}ق_{٣}$

٤٠ عدد طرق توزيع ٣ كرات متماثلة على ٤ صناديق مختلفة يساوى .

(أ) $^{٥}ق_{٣}$ (ب) $^{٥}ق_{٣}$ (جـ) $^{٦}ق_{٣}$ (د) $^{٤}ل_{٣}$

٤١ (دور أول ٢٠٢١) فى إحدى المحافظات تتكون اللوحات المعدنية للسيارات من ٣ حروف مختلفة تليها ٤ ارقام مختلفة إذا كان عدد الحروف الأبجدية المستخدمة ٢٦ حرفًا والأرقام المستخدمة هى (١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٩) فإن عدد اللوحات التى يمكن تكوينها فى هذه المحافظة يساوى

(أ) $^{٢٦}ل_{٣} \times {}^{٥}ل_{٤}$ (ب) $^{٢٦}ل_{٣} + {}^{٩}ل_{٤}$

(جـ) $^{٢٦}ق_{٣} \times {}^{٩}ق_{٤}$ (د) $^{٢٦}ق_{٣} + {}^{٩}ق_{٤}$

٤٢ (دور أول ٢٠٢١) مكتب به ٩ رجال ، ٦ سيدات ، يراد تكوين لجنة من خمسة أشخاص أغلب أعضائها من السيدات ولاتخلو من الجنسين ، فإن عدد اللجان التى يمكن تكوينها يساوى .....

(أ) ١١٨٨٠ (ب) ٢٨٧١ (جـ) ٣٠٠٣ (د) ٨٥٥

٢ أوجد عدد طرق :

(١) اختيار ثلاثة أشخاص من بين خمسة أشخاص.

- تكوين عدد من ثلاثة أرقام مختلفة من عناصر المجموعة {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ٦٠
- تكوين عدد من ثلاثة أرقام (يسمح بالتكرار) من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ١٢٥
- تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة أقل من ٤٠٠ من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ٣٦
- تكوين عدد زوجي مكون من ٣ أرقام مختلفة أكبر من ٣٠٠ من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ١٥

٣ إذا كان لدينا الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ فأوجد كم عددًا زوجيًا أكبر من ٣٠٠ وأصغر من ١٠٠٠٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام :

مع الإحلال (التكرار) ② بدون الإحلال (بدون تكرار) ١٠٣ ، ١١١

٤ إذا كانت : س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} وبفرض عدم السماح بتكرار الرقم

أوجد عدد كل من الأعداد الآتية المكونة من عناصر س :

- إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام بالضبط.
- إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام على الأقل.
- إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام على الأكثر. ٤٨ ، ٤٠

٥ كم عدد صحيح مكون من ٤ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} وكم عددًا منها يقبل القسمة على ٥ وكم عددًا منها يكون زوجيًا.

٦ أوجد عدد الطرق التى يمكن بها :

- ① اختيار عدد زوجى وعددين فرديين من ٤ أعداد زوجية، ٥ أعداد فردية. ٤٠٠
- ② اختيار عدد زوجى أو عددين فرديين من ٤ أعداد زوجية، ٥ أعداد فردية. ١٤٠
- ③ تكوين فريق من سبعة أعضاء من بين تسع بنات وخمسة أولاد ، بحيث يحتوى الفريق على ثلاثة أولاد فقط. ١٢٦٠

- انتخاب لجنة للطلبة بها أعضاء من بين ٢٠ طالبًا وعشر طالبات بحيث تتكون اللجنة من ٣ طلاب وطالبتين ؟
- وضع ٨ كرات متطابقة فى ٣ صناديق مختلفة.
- وضع ٨ كرات متطابقة فى ٣ صناديق مختلفة بحيث لا يوجد صندوق فارغ.
- توزيع ٨ جوائز متمايزة بالتساوى على ٤ طلاب.
- وقوف ٤ سيارات متجاورة فى ساحة انتظار بها ١٠ أماكن وقوف
  (١) إذا كان الموقف على شكل دائرة.
  (٢) إذا كان الموقف على شكل صف. ٢٤٠ ، ١٦٨

٧ صندوق يحتوى على ٦ كرات اثنان منهم حمراء والباقى سوداء.
فبكم طريقة يمكن اختيار ٣ كرات معًا من الصندوق فى كل من الحالات الآتية :

- إذا كانت الكرات الثلاثة من أى لون.
- إذا كانت واحدة فقط من الكرات الثلاثة حمراء.
- إذا كانت واحدة على الأقل من الكرات الثلاثة حمراء.
- إذا كانت واحدة على الأكثر من الكرات الثلاثة حمراء. ٢٠ ، ١٢ ، ١٦ ، ١٦

٨ فصل مختلط به ١٠ أولاد و٨ بنات والمطلوب اختيار فريق مكون من ٦ أفراد من هذا الفصل فما هو عدد طرق اختيار هذا الفريق فى كل من الحالات الآتية :

- إذا كان أعضاء الفريق من أى جنس.
- إذا كان أعضاء الفريق من نفس الجنس.
- ② إذا كان أعضاء الفريق به ٤ أولاد وبنتان.
- ④ إذا كان بالفريق اثنان من نفس الجنس. ١٨٥٦٤٠ ، ٢٣٨ ، ٥٨٨٠ ، ٩٠٣٠

٩ يُراد تكوين لجنة من ٤ أشخاص من بين ٩ رجال ، ٣ نساء

- ① أوجد عدد الطرق المختلفة لتكوين هذه اللجنة.
- ② كم لجنة تحتوى على إمرأة واحدة فقط ؟
- ③ كم لجنة تحتوى على إمرأة واحدة على الأقل ؟ ٤٩٥ ، ٢٥٢ ، ٣٦٥

١٠ يدرس الطالب فى السنة الأولى بإحدى الكليات الجامعية ٧ مواد دراسية ولا يحق له الانتقال إلى السنة التالية إلا إذا نجح فى ٥ منها على الأقل فكم طريقة يمكن للطالب أن ينتقل بها للسنة الثانية ؟ ٢٩٠

١١ تحتوى ورقة امتحان على ٦ أسئلة على الطالب أن يجيب منها على ٥ أسئلة بشرط أن تتضمن سؤالين على الأقل من الثلاثة أسئلة الأولى فكم طريقة يمكن للطالب اختيار الأسئلة التى يجيب عنها ؟ ٦٠

١٢ حقيبة بها ١٢ كرة حمراء ، ٨ كرات بيضاء ، أوجد عدد طرق سحب ٣ كرات حمراء و ٢ كرة بيضاء فى كل من الحالات الآتية :

- إذا كان السحب مع الإحلال والترتيب.
- إذا كان السحب بدون إحلال مع الترتيب.
- إذا كان السحب بدون إحلال ودون ترتيب.

٥٩٢ ، ١١٠٩٢٠ ، ٦١٦٠

١٣ أوجد عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه :

٤ أضلاع. ٥ أضلاع. ٦ أضلاع. ٢٠ ، ١٠

١٤ أوجد عدد الأقطار لمضلع عدد أضلاعه :

(أ) ٦ أضلاع. (ب) ٨ أضلاع. (جـ) ١٢ ضلعا. ٩ ، ٢٠ ، ٥٤

١٥ إذا كانت النقاط أ ، ب ، حـ ∈ المستقيم $ل_1$ ، م ، ن ، هـ ، ع ∈ المستقيم $ل_2$ وكان $ل_1$ // $ل_2$ فأوجد عدد المثلثات التى يمكن رسمها باستخدام مجموعة النقاط {أ ، ب ، حـ ، م ، ن ، هـ ، ع}

مسائل تقيس مهارات التفكير

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

عدد طرق تكوين عدد زوجى مكون من ٣ أرقام مختلفة بحيث يكون أكبر من ٥٠٠ من مجموعة الأرقام {٠ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٧} يساوى .....

(أ) ١٥ (ب) ١٨ (جـ) ٣٠ (د) ٧٥

عدد طرق تكوين عدد يقبل القسمة على ٣ ومكون من ٥ ارقام مختلفه من الارقام صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ يساوى

(أ) ٢١٦ (ب) ٢٤٠ (جـ) ٦٠٠ (د) ٣١٢٥

مضلع منتظم عدد أقطاره ضعف عدد أضلاعه فإن عدد أضلاع هذا المضلع يساوى

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

عدد طرق جلوس ٤ اولاد و ٣ بنات فى صف به ٧ مقاعد بحيث يكون الأولاد متجاورين والبنات متجاورات يساوى

(أ) ١ ! (ب) ٤ ! ٣ ! (جـ) ٢ ! ٤ ! ٣ ! (د) ٢ ! ٣ !

إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {أ ، ب} فإن عدد الدوال الممكنة من س الى ص يساوى

(أ) $٣^٢$ (ب) $٢^٣$ (جـ) $٣^٣$ (د) $٢^٣$

عدد طرق جلوس عدد مختلف من الأعداد (١ ، ٣ ، ٥ ، ١ ، ... ، ١٤١ ، ١٤٩) ، (١٤١) ، ضربها معا بحيث يعطى ناتج ضرب عددا مضاعف للعدد ٥ هو

(أ) ١٤٥ (ب) ١٠٢٠ (جـ) ١٢٤٥ (د) ١٠٢٠

فى الشكل المقابل

١٠ نقاط فى مستوى واحد بحيث يوجد أربعة تقع على استقامة واحدة والباقى لا يوجد ثلاثة منهم على استقامة واحدة فإن

أولًا : عدد المستقيمات التى يمكن تكوينها تساوى

(أ) ٤٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٥٠ (د) ٥٠

ثانيًا : عدد المثلثات التى يمكن تكوينها تساوى

(أ) ٥٦ (ب) ٨٠ (جـ) ٩٦ (د) ١١٦

ثالثًا : عدد الأشكال الرباعية التى يمكن تكوينها تساوى

(أ) ٩٥ (ب) ١٧٠ (جـ) ١٨٥ (د) ١٩٥

تمرين 1

∴ مستويات عليا

١٧ أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمس طلاب بكم طريقة يمكنهم الجلوس فى صف فى كل من الحالات الآتية :

∴ لا يوجد شروط على طريقة الجلوس.

- اذا كان أ ، ب يجب أن يجلسا متجاوران.

- إذا كان أ ، ب يجب ألا يجلسا متجاوران.

- ب ، حـ ، هـ يجب جلوسهم متجاورين.

- أ ، هـ يجب أن يجلسا فى طرفى الصف.

١٨ كم عدد مكون من رقمين يمكن تكوينه بحيث يكون مجموع الرقمين عددًا فرديًا ؟ ٤٥

١٩ يعمل فى مستشفى ١٢ طبيبًا ويراد تكوين فريق عمل من ٥ أطباء فبكم طريقة يمكن

∴ للمستشفى أن تختار فريق العمل إذا اصر طبيبان على العمل معًا ؟ ٣٧٢٠

٢٠ يعمل ١٢ محللاً رياضيًا فى إحدى القنوات الرياضية ويراد تكوين فريق تحليل لإحدى

∴ البطولات مكونًا من ٥ محللين فبكم طريقة يمكن لإدارة القناة أن تختار فريق العمل إذا رفض اثنين منهم العمل معا. ٦٧٢٠

الدرس 2 قوانين التباديل والتوافيق

أولاً

إذا كان ن ∈ ص⁺ ، ر ∈ ص⁺ ، ن ≥ ر فإن

① $^{ن}ل_{ر}$ = ن (ن − ١) (ن − ٢) ..... (ن − ر + ١)

② $^{ن}ل_{ر}$ = $\frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ر)!}}$ = ن (ن − ١) (ن − ٢) × ..... × ٣ × ٢ × ١

③ ن! = ن (ن − ١)! = ن (ن − ١) (ن − ٢)!

④ $^{ن}ل_{ر}$ = $\frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ر)!}}$

مع ملاحظة أن

١ $^{ن}ل_{١}$ = ن ، $^{ن}ل_{١}$ = ١ ، ٠! = ١! = ١

٢ ن! ∈ ص⁺ ، $^{ن}ل_{ر}$ ∈ ص⁺

ملاحظات

① قيم ن ، ر التى تجعل $^{ن}ل_{ر}$ لها قيمة حيث $^{ن}ل_{ر}$ ∈ ص⁺ يجب أن تحقق المتباينة

٠ ≤ ر ≤ ن لكل ن ، ر ∈ ص⁺ ∪ {٠}

فمثلاً : • $^{٧}ل_{ر}$ لها قيمة عندما ٠ ≤ ر ≤ ٧ حيث ر ∈ ط

أى عندما ر ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

• $^{ن-٥}ل_{٩}$ لها قيمة عندما ن − ٥ ≥ ٩ أى ن ≥ ١٤ ، ن ∈ ط

أى عندما ن ∈ {١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ...}

1

- $\underline{|ن} = {}^{ن}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ن-١}$ لذلك . إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = \underline{|ن}$

فإن $ر = ن$ أو $ر = ن - ١$

- إذا كان ${}^{٨}ل_{ر} = \underline{|٨}$ فإن : $ر = ٨$ أو $ر = ٧$

- إذا كان ${}^{أ}ل_{ر} = {}^{ب}ل_{ر}$ فإن أما $أ = ب$ أو $ر = ٠$

- إذا كان ${}^{أ}ل_{ر} = {}^{٥}ل_{ر}$ فإن : $أ = ٥$ أو $ر = ٠$

- إذا كان ${}^{ن}ل_{أ} = {}^{ن}ل_{ب}$

فإن أما $أ = ب$ أو $أ = ن$ ، $ب = ن - ١$ أو $أ = ن - ١$ ، $ب = ن$

- إذا كان ${}^{٣}ل_{أ} = {}^{٣}ل_{ب}$

فإن أما $أ = ب$ حيث $أ ، ب \in \{٠ ، ١ ، ٢ ، ٣\}$

أو $أ = ٣$ ، $ب = ٢$ أو $أ = ٢$ ، $ب = ٣$

مثال ١

أوجد قيمة $ن$ في كل مما يأتي :

١ ${}^{٢ن}ل_{٦} = ٥٠٤٠$

٢ ${}^{٨}ل_{ن-١} = \underline{|٨}$

٣ $\underline{|ن - ٣} = ٧٢٠$

◀

١ $\because {}^{٢ن}ل_{٦} = ٥٠٤٠$ ، $\because {}^{٧}ل_{٦} = ٥٠٤٠$

$\therefore {}^{٢ن}ل_{٦} = {}^{٧}ل_{٦}$ $\therefore ٢ن - ١ = ٧$

$\therefore ن = ٤$

٢ $\because {}^{٨}ل_{ن-٧} = \underline{|٨}$ ، $\because \underline{|٨} = {}^{٨}ل_{٨}$

$\therefore {}^{٨}ل_{ن-٧} = {}^{٨}ل_{٨}$

ومنها : $ن - ٧ = ٨$ $\therefore ن = ١٥$

أو : ${}^{٨}ل_{ن-٧} = {}^{٨}ل_{٧}$

ومنها : $ن - ٧ = ٧$ $\therefore ن = ١٤$

$\therefore \underline{|ن + ٣} = ٧٢٠ \; ! ن$

$\therefore {}^{ن+٣}ل_{٣} = ٧٢٠$

$\therefore {}^{ن+٣}ل_{٣} = {}^{٦}ل_{٣}$

$\therefore ن = ٧$

مثال ٢

أوجد قيمة $ن$ في كل مما يأتي :

١ $٢\underline{|٢ن - ٤} = \underline{|ن - ٤}\,\underline{|ن + ٢}$

٢ $\underline{|ن + ١} = \underline{|٢ن + ١}$

◀

$٢\underline{|٢ن - ٤} = \underline{|ن - ٤}\,\underline{|ن + ٢}$ $\therefore \underline{|٢ن}\,\underline{|ن + ٢} = \underline{|ن}\,\underline{|٢}$

$\therefore {}^{٢ن-٤}ل_{ن} = {}^{ن-٢}ل_{ن}$ $\therefore ٢ن - ٤ = ن + ٢$ $\therefore ن = ٦$

أو $ن = ٠$ (مرفوضة) لا تحقق المعادلة الأصلية.

$\underline{|ن}\,\underline{|ن - ٢} = \underline{|٢ن}$ $\therefore ن\,\underline{|ن}\,\underline{|ن + ٢} = ٢ن\,\underline{|٢ن - ١}$

$\therefore \underline{|ن - ١}\,\underline{|ن + ٢} = ٢\,\underline{|٢ن - ١}$ $\therefore \frac{\underline{|ن + ٢}}{\underline{|٢}} = \frac{\underline{|٢ن - ١}}{\underline{|ن - ١}}$

$\therefore {}^{ن+٢}ل_{ن} = {}^{٢ن-١}ل_{ن}$ $\therefore ن + ٢ = ٢ن - ١$ $\therefore ن = ٣$

أو $ن = ٠$ (مرفوضة) لا تحقق المعادلة الأصلية.

$\because \underline{|ن}\,\underline{|ن + ١} = \underline{|٢ن + ١}$ $\therefore \frac{\underline{|٢ن + ١}}{\underline{|ن + ١}} = \underline{|ن}$

$\therefore {}^{٢ن+١}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ن}$ $\therefore$ إما $٢ن + ١ = ن$

$\therefore ن = -١$ (مرفوضة) لا تحقق المعادلة الأصلية.

أو $ن = ٠$

[illegible] ٣٣٦ فأوجد قيمة : ن ، ر

مثال ③

[illegible]

الحل

[illegible]

∴ [illegible] ٣٣٦

∴ ر [illegible]

∴ [illegible] = ١ (٢)

∴ [illegible] ∴ [illegible] (١) (٢)

∴ $\frac{ن-3}{\underline{|ن-3-4}} \cdot [illegible] = \frac{1}{2}$

∴ $\frac{\cancel{ن-3}}{ن-8} \cdot \frac{ن-10}{\cancel{ن-3}} = \frac{1}{2}$ ∴ $\frac{ن-10}{ن-8} = \frac{1}{2}$

∴ $\frac{ن-10}{(ن-8)(ن-9)(ن-10)} = \frac{1}{2}$ ∴ $\frac{1}{(ن-8)(ن-9)} = \frac{1}{2}$

∴ $(ن-8)(ن-9) = 2$ ∴ $^{ن-8}ل_{ر} = 2 = {}^{2}ل_{[illegible]}$

∴ $ن - 8 = 2$ ∴ $ن = 10$

مثال ④

إذا كان: $^{ن}ل_{ر} = 6 \times {}^{ن}ل_{ر-1}$ ، $^{ن-1}ل_{ر-1} = 10 \times {}^{ن-2}ل_{ر}$

فأوجد قيمة كل من: ن ، ر

الحل

∵ $^{ن}ل_{ر} = 6 \times {}^{ن}ل_{ر-1}$ ∴ $\frac{^{ن}ل_{ر}}{^{ن}ل_{ر-1}} = 6$

∴ $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}} \div \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر+1}} = 6$ ∴ $\frac{\cancel{\underline{|ن}}}{\underline{|ن-ر}} \times \frac{\underline{|ن-ر+1}}{\cancel{\underline{|ن}}} = 6$

∴ $\frac{(ن-ر+1)\cancel{\underline{|ن-ر}}}{\cancel{\underline{|ن-ر}}} = 6$ ∴ $ن - ر + 1 = 6$

∴ $ن - ر = 5$

∵ $^{ن-1}ل_{ر+1} = 10 \times {}^{ن-2}ل_{ر}$ ∴ $\frac{^{ن-1}ل_{ر+1}}{^{ن-2}ل_{ر}} = 10$

∴ [illegible]

∴ [illegible]

∴ [illegible]

وبالتعويض في (١) [illegible]   ∴ [illegible] = ٣٠ = [illegible]

∴ [illegible]   ∴ [illegible]

وبالتعويض في [illegible]   ∴ ر = ٢

ثانياً [illegible]

[illegible]

ملاحظات

* $^{ن}ق_{1} = ن$
* $^{ن}ق_{ر} \leq {}^{ن}ل_{ر}$

[illegible]

أقصى قيمة للعدد $^{ن}ق_{ر}$ عند قيمة معينة لـ ن هي [illegible]

1

قانون النسبة

$$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-1}} = \frac{ن - ر + 1}{ر}$$

$$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-1}} = \frac{\frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!}}{\frac{ن!}{(ر-1)!\,(ن-ر+1)!}} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} \times \frac{(ر-1)!\,(ن-ر+1)!}{ن!}$$

$$= \frac{1}{ر\,(ر-1)!\,(ن-ر)!} \times (ن-ر+1)\,(ن-ر)!$$

$$= \frac{ن-ر+1}{ر}$$

فمثلاً

$$\frac{{}^{7}ق_{6}}{{}^{7}ق_{5}} = \frac{7-6+1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$،\ \frac{{}^{10}ق_{4}}{{}^{10}ق_{5}} = \frac{5}{10-5+1} = \frac{5}{6}$$

$$،\ \frac{{}^{30}ق_{12}}{{}^{30}ق_{11}} = \frac{{}^{30}ق_{12}}{{}^{30}ق_{11}} \times \frac{{}^{30}ق_{12}}{{}^{30}ق_{12}}$$

$$= \frac{30-13+1}{13} \times \frac{30-12+1}{12}$$

$$= \frac{18}{13} \times \frac{19}{12} = \frac{57}{26}$$

قانون الجمع

$${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = {}^{ن+1}ق_{ر}$$

$${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1}$$

$$= \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} + \frac{ن!}{(ر-1)!\,(ن-ر+1)!}$$

$$= \frac{ن!\,(ن-ر+1) + ر\,ن!}{ر!\,(ن-ر+1)!}$$

$$= \frac{ن!\,(ن-ر+1+ر)}{ر!\,(ن-ر+1)!}$$

$$= \frac{(ن+1)!}{ر!\,(ن-ر+1)!} = \frac{ن+1}{ر\,(ن-ر+1)!}$$

$$= {}^{ن+1}ق_{ر}$$

فمثلاً

$${}^{8}ق_{4} + {}^{8}ق_{3} = {}^{8+1}ق_{4} = {}^{9}ق_{4} = 126$$

$$،\ {}^{6}ق_{1} + {}^{6}ق_{5} = {}^{6+1}ق_{6}$$

$$،\ {}^{4}ق_{4} + 2\,{}^{4}ق_{3} + {}^{4}ق_{2}$$

$$= ({}^{4}ق_{4} + {}^{4}ق_{3}) + ({}^{4}ق_{3} + {}^{4}ق_{2})$$

$$= {}^{4+1}ق_{4} + {}^{4+1}ق_{3} = {}^{4+2}ق_{4}$$

ملاحظات

- إذا كان ${}^{أ}ق_{ر} = {}^{ب}ق_{ر}$ فإن أ = ب أو ر = ٠ أو ر = ١
- إذا كان ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ فإن ر = ١ أو ر = ٠ أو ر = ١
- إذا كان ${}^{أ}ق_{ر} > 1$ ، ${}^{ر}ق_{8} > 1$ ∴ ٨ < ر < ١٠ ∴ ر = ٩
- إذا كان ن − ٨ ، ٨ − ن لهما قيمة فلابد وأن تكون ن = ٨

مثال ٥

أوجد قيمة ن في كل مما يأتي :

١) ${}^{ن}ق_{ن-2} = 45$

٢) ${}^{21}ق_{4ن-7} = {}^{21}ق_{3ن}$

٣) ${}^{ن}ق_{2} \cdot {}^{ن}ق_{6} = 4 \cdot 7$

٤) ${}^{ن}ق_{6} + {}^{ن}ق_{5} = 84$

الحل

∵ ${}^{ن}ق_{ن-2} = {}^{ن}ق_{ن-(ن-2)} = {}^{ن}ق_{2}$ ∴ ${}^{ن}ق_{2} = 45$

∴ $\frac{{}^{ن}ل_{2}}{2!} = 45$ ∴ ${}^{ن}ل_{2} = 90 = 10 \times 9 = {}^{10}ل_{2}$

∴ ن = ١٠

∵ ${}^{21}ق_{4ن-7} = {}^{21}ق_{3ن}$ ∴ ٤ن − ٧ = ٣ن ومنها ن = ٧

أو ٤ن − ٧ + ٣ن = ٢١ ومنها ٧ن = ٢٨ ∴ ن = ٤

٣) ∵ $\frac{{}^{ن}ق_{7}}{{}^{ن}ق_{6}} = \frac{4}{7}$ ∴ $\frac{ن-7+1}{7} = \frac{4}{7}$

∴ ن − ٦ = ٤ ∴ ن = ١٠

٤) ∵ ${}^{ن}ق_{6} + {}^{ن}ق_{5} = 84$ ∴ ${}^{ن-1}ق_{6} = 84$

، ∵ ${}^{9}ق_{6} = 84$ ∴ ${}^{ن-1}ق_{6} = {}^{9}ق_{6}$

∴ ن + ١ = ٩ ∴ ن = ٨

مثال ٦

إذا كان $^{ن-١}ق_{٣} : {}^{ن}ق_{٤} = ٢ : ٣$

فأوجد قيمة : ن

الحل

$\because \frac{^{ن-١}ق_{٣}}{^{ن}ق_{٤}} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{\lfloor ن+١}{\lfloor ٣\ \lfloor ن-٢} \times \frac{\lfloor ٤\ \lfloor ن-٤}{\lfloor ن} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{(ن+١)\ \cancel{\lfloor ن}}{\cancel{(ن-٢)}\ (ن-٣)\ \cancel{\lfloor ن-٤}} \times \frac{٤\ \cancel{\lfloor ن-٤}}{\cancel{\lfloor ن}} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{٤\ (ن+١)}{(ن-٢)\ (ن-٣)} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{٤ن+٤}{ن^{٢}-٥ن+٦} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore ٢ن^{٢}-١٠ن+١٢ = ١٢ن+١٢$

$\therefore ٢ن^{٢}-٢٢ن = ٠$

$\therefore ٢ن(ن-١١) = ٠$ إما $ن = ٠$ (مرفوضة لأنه يجب أن تكون $ن \geq ٤$)

أو $ن-١١ = ٠$ ومنها $ن = ١١$

مثال ٧

أوجد قيمة كل من ن ، ر في كل مما يأتي :

① $^{ن}ق_{ر} = ٤٥$ ، $\lfloor ن-٣ر = ٢٤$

② $^{ن}ل_{ر-١}\ {}^{ن}ق_{ر-١} = ١٢٠$ ، $^{ن}ق_{ر-١} + {}^{ن}ق_{ر-٢} = ١٦٥$

الحل

① $\because {}^{ن}ق_{ر} = ٤٥$ ، $\because ٤٥ = {}^{١٠}ق_{٢} = {}^{١٠}ق_{٨} = {}^{٤٥}ق_{١}$

$\therefore {}^{ن}ق_{ر} = {}^{١٠}ق_{٢}$ ومنها $ن = ١٠$ ، $ر = ٢$

وهي تحقق أن $\lfloor ن-٣ر = \lfloor ١٠ - ٦ = ٢٤$

أو ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{١}ق_{٨}$ ومنها $ن = ١٠$ ، $ر = ٨$ (مرفوضة)

لأن $\lfloor ن-٣ر = \lfloor ١٠ - ٢٤ = \lfloor -١٤ \neq ٢٤$

أو ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{٤٥}ق_{١}$ ومنها $ن = ٤٥$ ، $ر = ١$ (مرفوضة)

لأن $\lfloor ن-٣ر = \lfloor ٤٥ - ٣ = \lfloor ٤٢ \neq ٢٤$

$\because {}^{ن}ل_{ر-١}\ {}^{ن}ق_{ر-١} = ١٢٠$

$\therefore {}^{ن}ل_{ر-١} \times \frac{\lfloor ر+١}{{}^{ن}ل_{ر-١}} = ١٢٠$

$\therefore ر+١ = ٨$

$\because {}^{ن}ق_{ر-١} + {}^{ن}ق_{ر-٢} = ١٦٥$

$\therefore {}^{ن}ق_{ر-١} = ١٦٥$

$\therefore {}^{ن}ل_{ر-١} - \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر+١} = ١٢٠$

$\therefore \lfloor ر+١ - ١٢٠ = \lfloor ٥$

$\therefore ر = ٤$

$\therefore {}^{ن}ق_{ر-١} + {}^{ن}ق_{ر-٢} = ١٦٥$

$\therefore \frac{{}^{ن}ل_{ر-١}}{\lfloor ٣} = ١٦٥$

$\therefore {}^{ن}ل_{ر-١} = ١٦٥ \lfloor ٣ = ٩٩٠ = {}^{١١}ق_{٣}$

$\therefore ن+١ = ١١$ $\therefore ن = ١٠$

مثال ٨

حل المعادلة : $٢ \times {}^{ن}ق_{٤} - ٣ \times {}^{ن}ق_{٣} + ٢ \times {}^{ن}ق_{٢} = ٠$

الحل

بقسمة المعادلة على $^{ن}ق_{٢}$

$\therefore ٢ \times \frac{^{ن}ق_{٤}}{^{ن}ق_{٢}} - ٣ + ٢ \times \frac{^{ن}ق_{٢}}{^{ن}ق_{٢}} = ٠$

$\therefore ٢ \times \frac{ن-٤+١}{٤} + ٢ \times \frac{٣}{ن-٣+١} = ٣$

$\therefore \frac{ن}{٢} + \frac{٣}{ن-٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$

$\therefore \frac{(ن-٣)\ (ن-٢) + ١٢}{٢\ (ن-٢)} = ٣$

$\therefore ن^{٢}-٥ن+٦+١٢ = ٦ن-١٢$

$\therefore ن^{٢}-١١ن+٣٠ = ٠$

$\therefore (ن-٥)\ (ن-٦) = ٠$

$\therefore ن = ٥$ أو $ن = ٦$

مثال ٩

إذا كان: $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر-١}$ ، $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٧ : ٦$ فأوجد قيمة كل من: ن ، ر

الحل

$\because {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر+١}$

أو $ر + ر + ١ = ن$

، $\because \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٧}{٦}$

وبالتعويض عن ن من (١) : $\therefore \frac{ر + ٢}{ر} = \frac{٧}{٦}$

$\therefore ر = ١٢$

$\therefore ر + ر = ١$ (غير ممكنة)

$\therefore ٢ر + ١ = ن$

$\therefore \frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٧}{٦}$

$\therefore \frac{(٢ر + ١) - ر + ١}{ر} = \frac{٧}{٦}$

$\therefore ٧ر = ٦ر + ١٢$

$\therefore ن = ٢(١٢) + ١ = ٢٥$

مثال ١٠

أثبت أن: $^{ن}ق_{ر} + ٢ \times {}^{ن}ق_{ر-١} + {}^{ن}ق_{ر-٢} = {}^{ن+٢}ق_{ر-٢}$

ومن ذلك أوجد قيمة س إذا كان: $^{١٠}ق_{س} + ٢ \times {}^{١٠}ق_{س+١} + {}^{١٠}ق_{س-٢} = {}^{١٢}ق_{٧}$

الحل

الطرف الأيمن $= {}^{ن}ق_{ر} + ٢ \times {}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر-٢}$

$= ({}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}) + ({}^{ن}ق_{ر-١} + {}^{ن}ق_{ر-٢})$

$= {}^{ن+١}ق_{ر+١} + {}^{ن+١}ق_{ر+٢} - {}^{ن+٢}ق_{ر+٢}$ = الطرف الأيسر.

وبوضع ن = ١٠ ، ر = س في العلاقة

$\therefore {}^{١٠}ق_{س} + ٢ \times {}^{١٠}ق_{س+١} + {}^{١٠}ق_{س+٢} = {}^{١٢}ق_{س+٢}$

$\therefore {}^{١٢}ق_{س+٢} = {}^{١٢}ق_{٧}$

أو $س + ٢ + ٧ = ١٢$

$\therefore س + ٢ = ٧$ ومنها س = ٥

ومنها س = ٣

مثال ١١

أثبت أن: $\frac{{}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن+١}ق_{ر+١} + {}^{ن+١}ق_{ر+٢}} = \frac{ر + ٢}{ن - ر}$

واستخدم العلاقة السابقة في إيجاد قيمة ر إذا كان: $\frac{{}^{٣٠}ق_{ر} + {}^{٣٠}ق_{ر+١}}{{}^{٣٠}ق_{ر+١} + {}^{٣٠}ق_{ر+٢}} = \frac{٣}{٥}$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{{}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن+١}ق_{ر+١} + {}^{ن+١}ق_{ر+٢}} = \frac{ر + ٢}{(ن + ١) - (ر + ٢) + ١}$

$= \frac{ر + ٢}{ن + ١ - ر - ٢ + ١} = \frac{ر + ٢}{ن - ر}$ = الطرف الأيسر.

، بوضع ن = ٣٠ في العلاقة السابقة.

$\therefore \frac{{}^{٣٠}ق_{ر} + {}^{٣٠}ق_{ر+١}}{{}^{٣٠}ق_{ر+١} + {}^{٣٠}ق_{ر+٢}} = \frac{ر + ٢}{٣٠ - ر}$

$\therefore \frac{٣}{٥} = \frac{ر + ٢}{٣٠ - ر}$

$\therefore ٥ر + ١٠ = ٩٠ - ٣ر$

$\therefore ٨ر = ٨٠$

$\therefore ر = ١٠$

2 على قوانين التباديل والتوافيق

اختبار تفاعلي

مستويات عليا

من أسئلة الكتاب المدرس

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان $^{ن}ق_{٣} = ٤$ فإن $ن =$ .....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٢ $\frac{|ر - ٢}{|ر - ٣} =$ .....

(أ) $^{ر}ل_{٣}$ (ب) $^{ر - ٢}ل_{٢}$ (جـ) $^{ر - ٢}ل_{١}$ (د) $^{ر}ل_{ر - ٢}$

٣ إذا كان $^{٦}ق_{ر} = {}^{٥}ق_{ر}$ فإن $ر =$ .....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) صفر (د) ١١

٤ إذا كان $|ن = ٧٢٠$ فإن : $^{ن}ل_{٢} =$ .....

(أ) ٣٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٥ (د) ١٢

٥ إذا كان $^{ن}ق_{٤} = {}^{ن}ق_{ن - ٢}$ فإن $ن =$ .....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٠

٦ إذا كان $^{١٧}ل_{م + ٥} = {}^{٢٩}ل_{م + ٥}$ فإن $م =$ .....

(أ) صفر (ب) −٥ (جـ) ٥ (د) ٤٦

٧ إذا كان $^{ن}ل_{٤} = ٥٠٤\ ن$ فإن قيمة $ن =$ .....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٩ (د) ١٠

٨ (دور أول ٢٠١٨) إذا كان : $^{ن}ق_{٩} : {}^{ن}ق_{٧} = ٧ : ٩$ فإن $ن =$ .....

(أ) ٧ (ب) ١٥ (جـ) ١٦ (د) ٩

٩ $^{١٥}ل_{ر - ١} \div {}^{١٤}ل_{ر} =$ .....

(أ) $\frac{ر}{ر + ١}$ (ب) $\frac{١٠}{ر + ١}$ (جـ) ١٥ (د) ١٤

١٠ إذا كان $^{ن + ١}ل_{٤} = ١٠\ ^{ن}ل_{٣}$ فإن $ن =$ .....

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ٤

١١ $^{ن}ل_{٣} = {}^{ن}ق_{٣} + ...$

(أ) $^{ن}ل_{٢}$ (ب) $^{ن}ق_{٣}$ (جـ) $|ن$ (د) $ن^{٣}$

١٢ إذا كان $^{ن}ل_{ر} - أ\ ^{ن}ق_{ر}$ فإن أ يمكن أن تساوى .....

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

١٣ إذا كان $^{ن}ل_{ر} = أ$ ، $^{ن}ق_{ر} = ب$ فأى من الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) $أ \geq ب$ (ب) $\frac{أ}{ب} \in ص^{+}$

(جـ) $ب - أ \in ص^{+}$ (د) $أ - ب \in ط$

١٤ إذا كان $\frac{|٨}{|٨ - ر} - ٢ \cdot ٣\ \frac{|٩}{|٩ - ر}$ فإن : $ر =$ .....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

١٥ إذا كان $\frac{|س}{|س - ٢} \times {}^{س}ل_{٣} = ٢٠$ فإن : $س =$ .....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

١٦ إذا كان $|ر - ن$ ، $|ن - ر$ فإن : $ر + ن =$ .....

(أ) صفر ، ٢ (ب) صفر ، ١ (جـ) ٢ ، ١ (د) ٢ ، ٤

١٧ إذا كان $^{ن}ل_{٤} = |٥$ فإن $ن =$ .....

(أ) ٥ ، ٦ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٦ ، ٧

١٨ إذا كان $ن \in ص^{+}$ ، $ن \geq ٣$ فإن : $ن(ن^{٢} - ١) =$ .....

(أ) $^{ن}ل_{٣}$ (ب) $^{ن + ١}ل_{٣}$ (جـ) $^{ن - ١}ل_{٣}$ (د) $^{ن - ١}ل_{٣}$

١٩ إذا كان $^{ن}ل_{ر} > {}^{ن + ١}ل_{ر - ١}$ فإن : $ن >$ .....

(أ) $ر$ (ب) $ر - ٣$ (جـ) $ر + ١$ (د) $١ - ر$

(٢٠) إذا كان : أ = $^{ن}ق_{ر}$ ، ب = $^{ن}ق_{ر-١}$ فإن : $\frac{أ + ب}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{ن - ١}{ر}$ (ب) $\frac{ن + ١}{ر}$ (جـ) $\frac{ن}{ن + ١}$ (د) $\frac{ن}{ر + ١}$

(٢١) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث هى $\frac{١}{٢}$ |ن ، |ن − ٢ ، |٢ − ن من السنتيمترات فإن القيمة العددية لمساحة المثلث = ... سم^{٢}

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

(٢٢) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان : $\frac{^{ن}ق_{٤} + ^{ن}ق_{٣}}{^{ن+١}ق_{٣}}$ = ١ فإن . |ن − ٦ = ...

(أ) ٦ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٢٤

٢ أوجد قيمة ن فى كل مما يأتى :

١ |ن − ٣ = ١

٢ |ن + ٢ = ٩٠ |ن

٣ |ن − ١٠ = ٢٤

٤ (دور ثان ٢٠١٥) ن |ن + ٢ = ٦٠ |ن

٥ $\frac{|ن - ٣}{|٣}$ = $\frac{|٥}{٢ - ن}$

٦ $^{٥}ل_{٥}$ = $^{٢ن - ٥}ل_{٥}$ = ٢٥٢٠

٧ $^{٨}ل_{٣ن - ١}$ = ٦٧٢٠

٨ $^{ن + ١}ق_{ن - ١}$ = ٦٦

٩ $^{١٥}ق_{٣}$ = $^{١٥}ق_{ن}$

١٠ $^{٢٥}ق_{٣ن - ٥}$ = $^{٢٥}ق_{٣ن}$

١١ $^{٨}ل_{ن - ٢}$ = $^{٨}ل_{ن - ٢}$

١٢ $^{ن - ٤}ل_{٩}$ = $^{٤}ل_{٩}$ ن

١٣ $^{٦}ل_{ن - ٣}$ = |٦

١٤ $^{٤}ق_{ن + ٢}$ = $^{٤}ق_{٣}$ ن

٣ أوجد قيمة كل من ن ، ر فى كل مما يأتى :

١ $^{ن}ل_{٢}$ = ٢ ، $^{ن + ر}ل_{٢}$ = ٩٠

٢ $^{ن}ل_{ر}$ = ٢٥٢٠ ، |ر = ١٢٠ ثم أوجد قيمة : |٣ ر − ٢ ن

٣ $^{ن}ق_{٣}$ = ٢١ ، $^{ن + ر}ل_{٣}$ = ٩٩٠

٤ (دور أول ٢٠٠٧) $^{ن}ق_{٣}$ = ٥ ن ، $^{ن}ل_{ر + ١}$ = ٢١٠

٥ $^{ن}ق_{ر}$ = ١٠ ، |ن − ر = ٦

٤ أوجد قيم كل من ن ، ر الممكنة فى كل مما يأتى :

١ إذا كان : $^{ن}ل_{ر}$ = ١٢٠

٢ إذا كان : $^{ن}ل_{١٥}$ < $^{ن}ل_{١٤}$

٣ إذا كان : $^{ن}ق_{١٣}$ < $^{ن}ق_{١١}$

٤ إذا كان : $^{ن}ق_{٨}$ × $^{ن}ق_{٣}$ ≤ $^{ن}ق_{٣}$ × $^{ن}ق_{٥}$

٥ أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كان $^{ن}ق_{٤}$: $^{ن - ٢}ق_{٣}$ = ٧ : ٢ فما قيمة : ن

٢ احسب قيمة ر إذا كان $^{٧}ق_{ر}$. $^{٧}ق_{ر - ١}$ = $\frac{١}{٣}$

٣ أوجد قيمة ر إذا كان $^{٥١}ل_{ر - ٦}$. $^{٥٤}ل_{ر + ٣}$ = ٣٠٨٠٠ : ١

٤ إذا كان $^{ن - ١}ل_{٣}$. $^{ن + ١}ل_{٣}$ = ١٢٠ : ٥ فأوجد قيمة : |ن − ٣

٥ إذا كان : $^{٢ن + ١٠}ل_{ن - ١}$. $^{٢ن - ١}ل_{ن}$ = ٣ : ٥ فأوجد قيمة . ن

٦ إذا كان . $^{ن}ل_{٣}$ = ٨ × $^{ن - ١}ل_{٣}$ فما قيمة ن وما قيمة $^{ن - ٣}ل_{ن - ٣}$ ؟

٧ إذا كان $^{٦}ل_{ر}$ = ٤ × $^{٦}ل_{ر - ١}$ فأوجد قيمة |ر + ١

٨ (دور أول ٢٠٠٩) إذا كان $^{ن}ل_{ر}$ = ٧٢٠ $^{ن}ق_{ر}$ فأوجد قيمة ر وأقل قيمة للعدد ن

تجعل العلاقة صحيحة ثم أوجد قيمة : $^{١٢}ق_{٣}$ ر

٩ إذا كان : $^{١٨}ق_{٣ر}$ = ١٥٣ × $^{١٣}ق_{٣ر - ٥}$ فأوجد قيمة ر ثم احسب قيمة :

$^{١٠}ل_{ر}$ $^{١٠}ق_{١٠ر}$

١٠ إذا كان ^{٢} . $^{ن}ق_{٥}$ = $^{ن}ق_{٤}$ + $^{ن}ق_{٦}$ فما قيمة : ن

١١ أوجد قيمة ر إذا كان :

(١) $^{١٣}ق_{ر}$ = ٢ (٢) $\frac{^{٧}ق_{ر}}{^{٨}ق_{ر - ٢}}$ × $\frac{^{٨}ق_{ر - ١}}{^{٧}ق_{ر - ١}}$ = ٢

١٢ إذا كان $^{٢٤}ق_{٣ر - ٤}$ = ٢٢٥ : ١١ احسب قيمة : ر

١٣ إذا كان |م + ن = ٣٨٠ |م + ن − ٢ فأوجد قيمة : م + ن

١٤ إذا كان $^{٣٠}ل_{س}$ = $^{٣٠}ل_{س + ٢ص}$ فما قيمة كلًا من س ، ص ؟

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أى القيم الآتية يمكن أن تساويها $^{ن}ل_{٢}$ ؟

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٧ (د) ٣٠

٢ إذا كان : $^{ن}ق_{ن-٣} = ٢٠$ فإن ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٣ إذا كان . $^{ن-٢}ل_{٢} = |\underline{٨}$ فإن . ن = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٥

٤ إذا كان : $^{ن+١}ل_{ن} = ٢٤$ فإن . قيمة ن =

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

٥ إذا كان . $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢) \times$ . . × ٥ × ٤ × ٣

فإن : ر = ...

(أ) ن (ب) ن − ٢ (جـ) ن − ١ (د) ن − ٣

٦ إذا كان : (س − ٢) × $^{ن}ق_{٣} = ^{ن}ل_{٣}$ فإن : قيمة س يمكن أن تكون .....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٣ ن

٧ إذا كانت : ن ∈ ص$^{+}$ فإن : $\frac{ن|}{ن|}$ = ...

(أ) $|\underline{ن^{٢}}$ (ب) $|\underline{ن+١}$ (جـ) $ن^{٢}|\underline{ن-١}$ (د) $|\underline{٢ن}$

٨ إذا كان $^{ن}ل_{٥} = ^{ن}ل_{٥}$ فإن : ن يمكن أن تساوى .....

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٩

٩ إذا كان . $^{ن}ل_{٤} = ^{ن}ل_{٥}$ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٩

١٠ إذا كان . $^{٢٤}ق_{٢ر+١} = ^{٢٤}ق_{ر+٤}$ فإن : ر = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

١١ إذا كان : $^{٢٩}ق_{ر} = ^{٢٩}ق_{ر-١}$ فإن قيمة . $^{ر}ق_{١٢}$ = ...

(أ) ٤٥٠ (ب) ٤٥٥ (جـ) ٤٦٠ (د) ٤٦٥

١٢ إذا كان : $^{١٤}ق_{ر} = ^{١٤}ق_{ر+٢}$ فإن : قيمة ر الموجبة = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢ أو ٣

١٣ إذا كان . $^{ن+٢}ق_{٤} = ن^{٢} - ٣$ فإن . ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٠

١٤ إذا كان $^{ن}ق_{٣}$ $^{ن-١}ق_{٤} = ٥ . ٨$ فإن . ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

١٥ إذا كان $^{١٠}ق_{ر+١} : ^{١٠}ق_{ر-١} = ٢١ : ١٠$ فإن : ر = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

١٦ $^{ن}ل_{ر} - ^{ن}ل_{ر-١}$ = ...

(أ) ن − ر (ب) ن − ر − ١ (جـ) ن − ر + ١ (د) ن + ر

١٧ إذا كان $\frac{^{٩}ل_{ر-١}}{^{٨}ل_{ر}} - \frac{١}{٨}$ فإن قيمة : ر = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

١٨ المقدار . $^{ن}ق_{ر} + ^{ن}ق_{ر-١}$ = ...

(أ) $^{ن+١}ق_{ر}$ (ب) $^{ن}ق_{ر+١}$ (جـ) $^{ن+١}ق_{ر+١}$ (د) $^{ن+١}ق_{ر+٢}$

١٩ $^{ن}ق_{ر+٢} + ٢\ ^{ن-١}ق_{ر} - ^{ن+١}ق_{ر}$ = ...

(أ) $^{ن-١}ق_{ر}$ (ب) $^{ن+١}ق_{ر}$ (جـ) $^{ن+١}ق_{٣}$ (د) $^{ن-٣}ق_{ر}$

٢٠ كل مما يأتى يساوى $^{ن}ق_{ر}$ ما عدا .....

(أ) $\frac{ن}{ر}\ ^{ن-١}ق_{ر-١}$ (ب) $^{ن}ق_{ن-ر}$

(جـ) $\frac{ل_{ن}}{ل_{ر}}$ (د) $\frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-ر}}$

(٢١) $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ إذا كان : ر = ...

(أ) ن (ب) $\frac{ن}{٢}$ (جـ) ١ أو ٢ (د) ٠ أو ١

(٢٢) (دور أول ٢٠١٩) إذا كان : $^{٩}ق_{ر} > {}^{٩}ق_{ر-١}$ فإن : .....

(أ) ر < ٤ (ب) ر > ٤ (جـ) ر < ٥ (د) ر > ٥

(٢٣) إذا كان : $^{٧}ق_{ر} > ١$ ، $^{٧}ق_{٤} > ١$ فإن قيمة : |٦ − ر| = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٧٢٠ (د) ٦

(٢٤) $(١ \times ٣ \times ٥ \times ٧ \times ٩)^{٢}$ |ك تساوى .....

(أ) |٨ (ب) |١٠ (جـ) |١١ (د) |١٢

(٢٥) (دور أول ٢٠١٩) قيمة المقدار : $^{٥٠}ق_{٤} + \sum_{ر=١}^{٦} {}^{٥٦-ر}ق_{٣}$ تساوى .....

(أ) $^{٥٦}ق_{٤}$ (ب) $^{٥٦}ق_{٣}$ (جـ) $^{٥٥}ق_{٣}$ (د) $^{٥٥}ق_{٣}$

(٢٦) إذا كان : $^{س+ص}ل_{٢} = ٢١٠$ ، $^{ص-٢}ق_{٣} = ٣٥$

فإن : |٢ س − ص| = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢ (د) ١

(٢٧) إذا كان : $^{٢٠}ق_{ر} = {}^{٢٠}ق_{ر+١٠}$ ، $^{ن}ل_{٢} = ٩٠ \times {}^{ن-٢}ل_{٥}$

فإن : |ن − ر| = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٠ (د) |٢٠

(٢٨) $^{ن-١}ق_{٢} + {}^{ن-١}ق_{٣} > {}^{ن}ق_{٣}$ إذا كان .....

(أ) ن > ٤ (ب) ن > ١٢ (جـ) ن > ١٣ (د) ن ≤ ٣

(٢٩) مجموعة حل المعادلة : |١ + لو س| = ١ هى .....

(أ) $\{\frac{١}{١٠}\}$ (ب) {١} (جـ) {٠ ، −١} (د) $\{\frac{١}{١٠} ، ١\}$

(٣٠) إذا كان : $\frac{١}{^{٢}ق_{ر}} + \frac{١}{^{٢}ق_{ر}} = \frac{١}{^{٣}ق_{ر}}$ فإن : ر = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣١) إذا كان : $^{٢ن+١}ق_{٢ن-١} - ٢ \times {}^{ن+٢}ق_{ن} = ٤٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٣٢) إذا كان : (س^{٢} + ٣ س + ٢) |س = ١٢٠ ، $^{س+ص}ل_{٤} = ٨٤٠$

فإن : $^{٧}ق_{س} + {}^{٧}ق_{ص}$ = ...

(أ) $^{٧}ق_{٣}$ (ب) $^{٧}ق_{٥}$ (جـ) $^{٨}ق_{٤}$ (د) $^{١١}ق_{٤}$

(٣٣) إذا كان : $^{ن}ق_{ر-١} = ٣٦$ ، $^{ن}ق_{ر} = ٨٤$ ، $^{ن}ق_{ر+١} = ١٢٦$

فإن : قيمة ر هى .....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) لا شئ مما سبق.

(٣٤) إذا كان : $^{٢ن+٣}ل_{٤} \times {}^{٢ن-١}ل_{٣} = |٧$ فإن : |ن − ٢| = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٢٤

(٣٥) إذا كان : $^{ن+١}ق_{٣} - {}^{ن}ق_{٣} = ٢١$ فإن : ن = ...

(أ) ٧ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٣٦) إذا كانت : $^{٨}ق_{ر} - {}^{٧}ق_{٣} = {}^{٧}ق_{٣}$ فإن : ر = ...

(أ) ٣ أو ٥ (ب) ٢ أو ٥ (جـ) ٣ أو ٤ (د) ٤ أو ٥

(٣٧) مجموعة حل المعادلة : |٤ − |س|| = ١ هى .....

(أ) {± ٣} (ب) {± ٤}

(جـ) {± ٣ ، ± ٤} (د) {٣ ، ٤}

(٣٨) إذا كان : |جا س| = ١ حيث ٠ ≤ س < ٢ π فإن : س ∈ .....

(أ) {٠ ، π} (ب) $\{\frac{π}{٢}\}$ (جـ) {٠ ، $\frac{π}{٢}$} (د) {٠ ، π ، $\frac{π}{٢}$}

(٣٩) إذا كان : $^{٩}ل_{ن-٤} = |٩$ فإن مجموع قيم ن تساوى .....

(أ) ٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ٢٥

(٤٠) إذا كان : |٢ ن − ٣| = ٢ ن − ٣ فإن مجموع جميع قيم ن الممكنة = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) ٥ (د) $\frac{٩}{٢}$

(٤١) إذا كانت : $\frac{|أ + ب|}{|ب|}$ = ٢٤ فإن قيم $^{ن}ل_{ر}$ الممكنة هى .....

(أ) ٣ ، ٤ (ب) ٣ ، ١ (جـ) ٢٣ ، ٣ ، ١ (د) ٢٣ ، ١

(٤٢) إذا كان $ل_{ن}$ ، $ل_{ن}$ ، $ل_{ن+١}$ فى تتابع حسابى فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

(٤٣) إذا كان : $و_{ن+٢}$ ، $ل_{ن}$ ، $و_{ن}$ فى تتابع هندسى فإن : ن = ...

(أ) ٢ أ، ٣ (ب) ٣ أ، ٧ (جـ) ٢ أ، ٧ (د) ٧ أ، ٩

(٤٤) إذا كان : $ل_{س}$ + $ل_{ن}$ = ١٤٤٠ فإن : $ل_{ن+٤}$ $ل_{س-٥}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ١٠

(٤٥) ١ + $و_{١}$ + $و_{ن-١}$ + $و_{ن+٢}$ + ... + $و_{ن+س-١}$ = ...

(أ) $و_{ن+س}$ (ب) $و_{ن+س-١}$

(جـ) $و_{ن+س-١}$ (د) $و_{ن+س+١}$

(٤٦) إذا كانت س مجموعة غير خالية عدد عناصرها (ن) وكانت

ص = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ س ، أ ≠ ب} وعدد عناصرها ٧٢

، ع = {{أ ، ب} : أ ∈ س ، ب ∈ س} فإن عدد عناصر ع = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٨ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

(٤٧) إذا كان عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين أو مكونة من ٣ عناصر من مجموعة مكونة من ن عنصرًا تساوى ٨٤ مجموعة فإن : ن = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

(٤٨) إذا كان : $\frac{١}{٢}$ |ن| ، |ن − ٣| ، ن |٣ − ن| هى أطوال أضلاع مثلث فإن القيمة العددية لمحيط المثلث تساوى .....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٤٩) إذا كان : ن عدد صحيح فردى ثابت ، فإن قيمة العدد س التى تجعل $و_{س}$ أكبر ما يمكن هى .....

① س = $\frac{ن-١}{٢}$ ② س = $\frac{ن+١}{٢}$ ③ س = ن − ١

(أ) كل من ① ، ② صحيحة. (ب) كل من ② ، ③ صحيحة.

(جـ) كل من ① ، ③ صحيحة. (د) كل من ① ، ② ، ③ صحيحة.

٧ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان : $و_{ن-٢}$ = ٤٥ ، $ل_{م-٣}$ = ٤ أوجد قيمة : $و_{م-٢}$ ÷ $و_{م-١}$

(٢) إذا كان : $و_{٣}$ = ١٢٠ ، $و_{٢س+٢}$ = $و_{٣س+٥}$ أوجد قيمة : $و_{٧س+٣}$

(٣) (دور أول ٢٠١٥) إذا كان : $ل_{م+ن}$ = ١٨٢ ، $و_{ن-١}$ = ٨٤

فأوجد قيمة كل من : م ، ن

(٤) إذا كان : |ن| = ٧٢٠ ، $و_{ن+١}$: $و_{١}$ = $\frac{٣}{٥}$ أوجد قيمة : $و_{ن+١}$ $و_{س-٢}$

(٥) إذا كان : $ل_{ن-٢}$ $ل_{س}$ = ١ : ٤٢ ، $ل_{٧}$ $ل_{س-١}$ = ٨٤٠

فأوجد قيمة كل من : ن ، س

(٦) إذا كان : ن(ن − ١) (ن − ٢) ..... (ن − س + ١) = ٥٠٤٠ ، $و_{س}$ = ٢١٠

فأوجد قيمة : $و_{ن+١}$ $و_{س}$

(٧) إذا كان $و_{س}$: $و_{١}$ = ٥٠٦ ، $و_{س}$ − $و_{س+١}$

فأوجد قيمة كل من : ن ، س

(٨) إذا كان : $و_{س}$ $و_{س+١}$ = ٢ : ٣ ، $و_{س-١}$ = ٤ × $و_{س-٢}$

فأوجد قيمة كل من : ن ، س

(٩) إذا كان $و_{س}$ = $و_{س}$ $و_{١}$ ، $و_{ن+١}$ − $\frac{٤٠}{|س|}$ × $ل_{س-٢}$

فأوجد قيمة كل من : ن ، س

(١٠) (دور ثان ٢٠١٢) إذا كان $و_{١٥}$ $و_{س}$ = $و_{١٥}$ $و_{س+٣}$ ، $و_{ن+٢}$: $ل_{ن-٢}$ = ٣ : ٤٠

فأوجد قيمة $و_{س}$ $و_{١}$

(١١) [illegible] $ل_{س}$ ، |ن − س| = ٦ فأوجد قيمة كل من : ن ، س

(١٢) (دور أول ٢٠١٢) إذا كان : $ل_{ن+٢}$ = ٢ × $و_{ن+٢}$ $و_{س}$ ، $\frac{و_{س+١}}{و_{س}}$ = $\frac{٥}{٣}$

فأوجد قيمة : $و_{س-١}$ + $ل_{ن+٣}$ $ل_{س-١}$

(١٣) (دور ثان ٢٠١٠) إذا كان : $٤ \times {}^{ن+١}ق_{١} = ٩ \times {}^{ن}ق_{ر}$ ، $|ن - ٢| = ١٢$

فأوجد قيمة : ${}^{ن}ل_{ر}$

(١٤) (دور ثان ٢٠٠٨) إذا كان : $\frac{|ن+٢}{|ن} + ٣ن = ٧٤$ ، $|ر = ن$ فأوجد قيمة :

(١٥) إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن}ق_{ر-١} = ٥ : ٧$ ، ${}^{ن}ل_{ر} \div {}^{ن}ل_{ر-١} = ٥ : ٥$

أوجد قيمة كل من : ن ، ر

(١٦) (دور ثان ٢٠٠٩) إذا كان : ${}^{ن+١}ل_{١} = ٧ \times {}^{ن}ل_{ر}$ ، $٤ \times {}^{ن}ق_{ر} = ٣ \times {}^{ن}ق_{ر-١}$

فأوجد قيمة : $\frac{|ن}{|ن - ر - ٢}$

(١٧) إذا كان ${}^{١٣}ق_{ر} : {}^{١٣}ق_{ر+١} = ٥ : ٩$ ، ${}^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} = ٨$

فأوجد قيمة كل من : ن ، ر

(١٨) إذا كان ${}^{ن+١}ل_{ر+١} : {}^{ن+١}ق_{ر+١} = ١ : ٧٢٠$ ، ${}^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} = ٢٠$

فأوجد القيمة العددية لكل من : ن ، ر

(١٩) إذا كان : ${}^{س}ق_{ص} = ٢ \times {}^{س}ق_{ص+١}$ ، ${}^{س}ق_{ص} = {}^{س}ق_{ص-١}$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص

(٢٠) (دور أول ٢٠١١) إذا كان : ${}^{س+ص}ل_{٢} = ٣٦٠$ ، $|٢س + ص = ٥٠٤٠$

فأوجد قيمة : ${}^{ص}ق_{٢س}$

٨ أوجد قيمة كل من ن ، ر في كل مما يأتي :

(١) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر+٢} = ١ : ٢ : ٣$

(٢) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+١} = ١٥ : ٢٨ : ٢٤$

(٣) (دور ثان ٢٠١٢) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+٤} = ٣ : ١٤ : ١٤$

(٤) (دور أول ٢٠٠٨) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} : {}^{ن-١}ق_{ر-٢} = ٧ : ٤ : ٦$

ثم أوجد قيمة : $\frac{|ن-٤}{(|ر)^{٢}}$

٩ حل كلًّا من المعادلات الآتية :

(١) ${}^{س+٢}ل_{٢} = ٤٢ س$

(٢) $٣٠ |س = |س + ٢$

(٣) ${}^{٧}ل_{س} - س \times {}^{٧}ل_{س-١} = ٠$

(٤) $٣٠ \times {}^{س+٣}ل_{٢} = {}^{س+٥}ل_{٥}$

(٥) $|س+٢ = ١٨٢ \times {}^{س}ل_{١١} |س - ١١$

(٦) ${}^{ن}ق_{٣} + ٢ {}^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{١} = ١٢٠$

(٧) $٢ \times {}^{ن}ق_{٢} - ١١ \times {}^{ن}ق_{٣} + ٢٢ \times {}^{ن}ق_{٤} = ٠$

(٨) ${}^{ن}ق_{٣} - {}^{ن}ق_{٢} = \frac{١}{٦} ن^{٣} - ن^{٢} + ٥$

(٩) $\frac{|ن}{|٤ |ن - ٥} = ٢٨٠$

(١٠) $\frac{|ن+١}{|ن-٩} : {}^{ن}ل_{٢} = ١١$

(١١) $٢ |٢ن - ٤ |ن - ٤ = |ن + ٢$

(١٢) $٢ |٢ن = (ن^{٢} + ٣ن + ٢) (|ن)^{٢}$

(١٣) $\frac{١}{|ن} + \frac{١}{|ن+١} = \frac{٩}{|ن+٢}$

(١٤) $\frac{|ن+١}{|ن+٢} + \frac{|ن}{|ن+١} = \frac{١٣}{٤٢}$

(١٥) $|ن+٢ |٣ن - ٤ = |ن |٣ن - ٢$

(١٦) $|٢ن |ن - ٣ = ٧٢ |٣ن - ٧$

١٠ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان العامل الأوسط في مفكوك ${}^{ن}ل_{٢}$ يساوي ٩ وكان : $س^{٢} - ن = ٤$ ، $س \in ص^{+}$

فأوجد : $|س$

(٢) إذا كان : $٤ \times {}^{ن}ق_{٩}$ ، $٣ \times {}^{ن}ق_{٢}$ ، $٣ \times {}^{ن}ق_{٢}$ تكون متتابعة حسابية فأوجد قيمة : ن

(٣) إذا كان : $٢ \times {}^{١٤}ق_{ر+١}$ ، $٣ \times {}^{١٤}ق_{ر}$ ، $٦ \times {}^{١٤}ق_{ر-١}$ تكون متتابعة هندسية

فأوجد قيمة : ر

(٤) إذا كان : ${}^{ن+٢}ل_{٢} = ٩٩٠$ ، ${}^{٣ن-٢}ل_{٢} = ٧٢$

أثبت أن : $|م - ن$ ، ${}^{ن}ل_{١}$ ، $\frac{٥}{٢٢} \times {}^{ن+٢}ل_{٢}$ في تتابع هندسي.

إذا كان : $^{١+ب}ل_{٣} = س$ ، $^{١-ب}ل_{٣} = ص$

أوجد أقل قيمة لكل من المقدارين : $\lfloor س + ص$ ، $\lfloor س - ص$

١١ أثبت أن :

(١) $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن}{ر} \times {}^{ن-١}ق_{ر-١}$ واستخدم ذلك فى :

(١) إثبات أن : $\frac{^{٢٥}ق_{٢} + {}^{٢٤}ق_{٣}}{^{٢٤}ق_{٣} + {}^{٢٣}ق_{٢}} = \frac{٥٨}{٩}$

(٢) إيجاد قيمة لكل من ن ، ر إذا كان :

$^{ن+٢}ق_{ر+١} = ٩ \times {}^{ن+١}ق_{ر} = ٩٠ \times {}^{ن}ق_{ر-١}$

(٢) $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن}{ن - ر} \times {}^{ن-١}ق_{ر}$

ثم استخدم ذلك فى حل المعادلة : $\frac{^{ن}ق_{٨} + {}^{ن-١}ق_{٨}}{^{ن-١}ق_{٨}} = ٣$

(٣) $\frac{^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{ن+١}{ر+١}$ ومن ذلك أوجد ن إذا كان : $\frac{^{ن}ق_{٩} + {}^{ن}ق_{٨}}{^{ن}ق_{٨}} = \frac{٧}{٣}$

(٤) $\frac{^{ن}ق_{١} \times {}^{ن}ق_{٣}}{^{ن}ق_{٢}} = \frac{^{٢}ل_{٢}}{^{٢ن-٢}ل_{٢}}$

(٥) $^{ن+١}ق_{ر+١} = ن(ن+١) \times {}^{ن-١}ق_{ر+١}$: $(ن - ر - ١)$

ومن ذلك استنتج قيمة : $^{١٨}ق_{٣}$: $^{١٦}ق_{٣}$

(٦) $^{ن}ق_{ر} + ٢ \times {}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+٢} = {}^{ن+٢}ق_{ر+٢}$

ومن ذلك أوجد قيمة : $^{١٠}ق_{٥} + ٢ \times {}^{١٠}ق_{٦} + {}^{١٠}ق_{٧}$

(٧) $^{ن}ل_{ر} = ن \times {}^{ن-١}ل_{ر-١}$ ومن ذلك استنتج قيمة $^{٩٧}ل_{٤}$: $^{٩٦}ل_{٣٩}$

(٨) $\frac{١}{\lfloor ن} - \frac{١}{\lfloor ن+١} + \frac{١}{\lfloor ن+٢} = \frac{ن+١}{(ن+٢)\lfloor ن}$

(٩) $\lfloor ٢ن = ٢^{ن} (١ \times ٣ \times ٥ \times ..... \times (٢ن - ١))$

(١٠) $\frac{\lfloor ن - ر - ١}{\lfloor ر \lfloor ن - ١} - \frac{\lfloor ن - ر - ١}{\lfloor ر - ١ \lfloor ن} = \frac{\lfloor ن - ر}{\lfloor ن \lfloor ر}$

١٢ أثبت أن حاصل ضرب ر من الأعداد الصحيحة المتتالية يقبل القسمة على $\lfloor ر$

١٣ إذا كان : $^{ن}ق_{ر+٢} \leq {}^{ن}ق_{ر+١}$ فأثبت أن : $ن \leq ٢ر + ٣$

١٤ إذا كان : $^{ن}ق_{ر+٢} \times {}^{ن}ق_{ر} \leq {}^{ن}ق_{ر+١} \times {}^{ن}ق_{ر-١}$ فأثبت أن : $ن \leq ٢ر + ١$

١٥ (دور أول ٢٠١٠) إذا كانت س مجموعة غير خالية عدد عناصرها ن

، $ع_{١} = \{\{أ ، ب ، حـ\} : أ ، ب ، حـ \in س\}$

، $ع_{٢} = \{(أ ، ب) : أ ، ب \in س ، أ \neq ب\}$

وكان عدد عناصر $ع_{١}$ = عدد عناصر $ع_{٢}$ فأوجد قيمة : ن

وإذا كان : $٤ك \lfloor ٢ك - ١ = \frac{٣٢}{٩} \times \frac{^{١١}ق_{٣} + {}^{١١}ق_{٤}}{^{١٢}ق_{٣}} + ٥ن$ فأوجد قيمة : ك

«٨ ، ٢»

مسائل تقيس مهارات ما وراء المعرفة

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $^{ك+٥}ل_{ك} = \frac{(ك+١)(ك-١)}{٢} \times {}^{ك+٣}ل_{ك}$ فإن إحدى قيم ك هى .....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٥ (د) ١٠

(٢) إذا كان : $ن = {}^{م}ق_{٢}$ فإن قيمة $^{ن}ق_{٢}$ تعطى بالعلاقة .....

(أ) $^{م+١}ق_{٤}$ (ب) $^{م-١}ق_{٤}$ (جـ) $٣ \, {}^{م+١}ق_{٤}$ (د) $^{م+٢}ق_{٤}$

(٣) إذا كان : $^{س+١}ق_{٤} + \sum_{ر=س}^{س+٥} {}^{ر+١}ق_{٣} = ١٣٦٥$ فإن : س = ...

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١١

إذا كان ك = ن(ن^{٢} − ١) (ن^{٢} − ٤) ..... (ن^{٢} − ر^{٢})

حيث ن ، ر ∈ ص$^{+}$ ، ن > ر فإن ك تقبل القسمة على .....

(أ) √٢ + ١ (ب) √٢ + ٢ (جـ) √٢ + ٤ (د) √٢ + ٦

⑥ إذا كانت : أ ، ب ، حـ هى أقصى قيم للأعداد ^{١٩}ق$_{س}$ ، ^{٢٠}ق$_{ص}$ ، ^{٢١}ق$_{ع}$ على الترتيب فإن : أ : ب : حـ = ...

(أ) ٢٢ : ١١ : ٤٢ (ب) ١١ : ٤٢ : ٢٢

(جـ) ٤٢ : ١١ : ٢٢ (د) ١١ : ٢٢ : ٤٢

⑦ أثبت أن :

أ + ب + حـ يقبل القسمة على |أ . |ب . |حـ

$\frac{^{ن}ق_{١}}{^{ن}ق_{٠}} + ٢ \times \frac{^{ن}ق_{٢}}{^{ن}ق_{١}} + ٣ \times \frac{^{ن}ق_{٣}}{^{ن}ق_{٢}} + ... + ن \times \frac{^{ن}ق_{ن}}{^{ن}ق_{ن-١}} = \frac{ن}{٢}(ن+١)$

③ |١ + ٢ |٢ + ٣ |٣ + ... + ن |ن = |ن + ١ − ١

$^{٢١}ق_{٠} = {}^{٢٠}ق_{٣} + {}^{٧}ق_{٣} + {}^{٦}ق_{٣} + ... + {}^{١}ق_{٣}$

الدرس 3

نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

إذا كان لدينا مقدار جبرى مكونًا من حدين ومرفوعًا لأس صحيح موجب فيمكننا أن نحصل على مفكوكه بضرب هذا المقدار فى نفسه بعدد مرات الأس المرفوع إليه هذا المقدار إلا أن هذه الطريقة تستغرق الكثير من الوقت والجهد خاصةً إذا كان الأس المرفوع إليه هذا المقدار كبيرًا، لذلك تبرز أهمية نظرية ذات الحدين التى تُمكننا من إيجاد مفكوك مقدار جبرى ذى حدين مرفوعًا لأى أس صحيح موجب مهما كانت قيمة الأس بطريقة أكثر سهولة.

نظرية ذات الحدين

إذا كان : أ ، س ∈ ح ، ن عدد صحيح موجب فإن :

١ (س + أ)^{ن} = $^{ن}ق_{٠}$ س^{ن} + $^{ن}ق_{١}$ س$^{ن-١}$ أ + $^{ن}ق_{٢}$ س$^{ن-٢}$ أ^{٢} + ...

+ $^{ن}ق_{ر}$ س$^{ن-ر}$ أ^{ر} + ... + $^{ن}ق_{ن}$ أ^{ن}

ويسمى الطرف الأيسر مفكوك الطرف الأيمن ويكون المفكوك مرتب حسب قوى س التنازلية وحسب قوى أ التصاعدية.

٢ (س − أ)^{ن} = (س + (− أ))^{ن}

= $^{ن}ق_{٠}$ س^{ن} + $^{ن}ق_{١}$ س$^{ن-١}$ (− أ) + $^{ن}ق_{٢}$ س$^{ن-٢}$ (− أ)^{٢}

+ ..... + $^{ن}ق_{ن}$ (− أ)^{ن}

= $^{ن}ق_{٠}$ س^{ن} − $^{ن}ق_{١}$ س$^{ن-١}$ أ + $^{ن}ق_{٢}$ س$^{ن-٢}$ أ^{٢}

− ..... + $^{ن}ق_{ن}$ (− أ)^{ن}

ملاحظة إشارة الحد فى المفكوك تختلف عن إشارة الحد السابق له وتكون إشارة الحد الأخير موجبة إذا كانت ن زوجية وسالبة إذا كانت ن فردية.

مثال

١ (س + أ)^{٢} = $^{٢}ق_{٠}$ س^{٢} أ^{٠} + $^{٢}ق_{١}$ س$^{٢-١}$ أ^{١} + $^{٢}ق_{٢}$ س$^{٢-٢}$ أ^{٢}

= س^{٢} + ٢ س أ + أ^{٢}

٢ (س − أ)^{٢} = $^{٢}ق_{٠}$ س^{٢} (− أ)^{٠} + $^{٢}ق_{١}$ س$^{٢-١}$ (− أ)^{١} + $^{٢}ق_{٢}$ س$^{٢-٢}$ (− أ)^{٢}

= س^{٢} − ٢ س أ + أ^{٢}

٢ (س + أ)^{٢} = ^{٢}ق$_{٠}$ س^{٢} أ^{٠} + ^{٢}ق$_{١}$ س$^{٢-١}$ أ^{١} + ^{٢}ق$_{٢}$ س$^{٢-٢}$ أ^{٢}

= س^{٢} + ٢ س^{٢} أ + ٣ س أ^{٢} + أ^{٣}

، (س − أ)^{٣} = س^{٣} − ٣ س^{٢} أ + ٣ س أ^{٢} − أ^{٣}

٤ (س ± أ)^{٤} = س^{٤} ± ٤ س^{٣} أ + ٦ س^{٢} أ^{٢} ± ٤ س أ^{٣} + أ^{٤} وهكذا ...

ملاحظات

① فى مفكوك (س ± أ)^{ن}

• عدد حدود المفكوك يزيد واحد عن الأس المرفوع إليه المقدار الجبرى ذى الحدين

أى أن : عدد حدود المفكوك = (ن + ١) حدًا

• تتناقص قوة (أس) س تدريجيًا بمقدار ١ وتتزايد قوة (أس) أ تدريجيًا بمقدار ١

بحيث يكون مجموع قوتى س ، أ فى أى حد مساويًا ن

أى أن : فى أى حد يكون $\boxed{\text{أس (س) + أس (أ) = ن}}$

• دليل ق فى أى حد من حدود المفكوك يقل واحد صحيح عن رتبة ذلك الحد.

فمثلاً : ح$_{\text{رتبة الحد}}$ = ^{ن}ق$_{\text{دليل ق}}$ س$^{ن-٤}$ أ^{٤}

• الحد الأول : ح$_{١}$ = ^{ن}ق$_{٠}$ س^{ن} أ^{٠} = س^{ن}

، الحد الأخير : ح$_{ن+١}$ = ^{ن}ق$_{ن}$ س^{٠} (± أ)^{ن} = (± أ)^{ن}

② معاملات حدود مفكوك (أ + ب)^{ن} تتبع نمط يمثله مثلث يعرف باسم مثلث باسكال.

معاملات حدود المفكوك بصورة توافقية

معاملات حدود المفكوك

المقدار ذى الحدين

مثال ①

اكتب مفكوك كل من :

① (٢ س + ٣ ص)^{٥} ② (٤ − ٣ أ)^{٤} ③ (س − $\frac{١}{٣ س^{٢}}$)^{٥}

الحل

١ (٢ س + ٣ ص)^{٥} = ^{٥}ق$_{٠}$ (٢ س)^{٥} (٣ ص)^{٠} + ^{٥}ق$_{١}$ (٢ س)^{٤} (٣ ص)^{١}

+ ^{٥}ق$_{٢}$ (٢ س)^{٣} (٣ ص)^{٢} + ^{٥}ق$_{٣}$ (٢ س)^{٢} (٣ ص)^{٣}

+ ^{٥}ق$_{٤}$ (٢ س)^{١} (٣ ص)^{٤} + ^{٥}ق$_{٥}$ (٢ س)^{٠} (٣ ص)^{٥}

= ٣٢ س^{٥} + ٥ (١٦ س^{٤}) (٣ ص) + ١٠ (٨ س^{٣}) (٩ ص^{٢})

+ ١٠ (٤ س^{٢}) (٢٧ ص^{٣}) + ٥ (٢ س) (٨١ ص^{٤}) + ٢٤٣ ص^{٥}

= ٣٢ س^{٥} + ٢٤٠ س^{٤} ص + ٧٢٠ س^{٣} ص^{٢} + ١٠٨٠ س^{٢} ص^{٣}

+ ٨١٠ س ص^{٤} + ٢٤٣ ص^{٥}

٢ (٤ − ٣ أ)^{٤} = ^{٤}ق$_{٠}$ (٤)^{٤} (٣ أ)^{٠} − ^{٤}ق$_{١}$ (٤)^{٣} (٣ أ)^{١} + ^{٤}ق$_{٢}$ (٤)^{٢} (٣ أ)^{٢}

− ^{٤}ق$_{٣}$ (٤)^{١} (٣ أ)^{٣} + ^{٤}ق$_{٤}$ (٤)^{٠} (٣ أ)^{٤} = ٢٥٦ − ٤ (٦٤) (٣ أ)

+ ٦ (١٦) (٩ أ^{٢}) − ٤ (٤) (٢٧ أ^{٣}) + ٨١ أ^{٤}

= ٢٥٦ − ٧٦٨ أ + ٨٦٤ أ^{٢} − ٤٣٢ أ^{٣} + ٨١ أ^{٤}

٣ (س − $\frac{١}{٣ س^{٢}}$)^{٥} = ^{٥}ق$_{٠}$ س^{٥} − ^{٥}ق$_{١}$ س^{٤} ($\frac{١}{٣ س^{٢}}$)^{١} + ^{٥}ق$_{٢}$ س^{٣} ($\frac{١}{٣ س^{٢}}$)^{٢}

− ^{٥}ق$_{٣}$ س^{٢} ($\frac{١}{٣ س^{٢}}$)^{٣} + ^{٥}ق$_{٤}$ س ($\frac{١}{٣ س^{٢}}$)^{٤} − ^{٥}ق$_{٥}$ ($\frac{١}{٣ س^{٢}}$)^{٥}

= س^{٥} − ٥ س^{٤} × $\frac{١}{٣ س^{٢}}$ + ١٠ س^{٣} × $\frac{١}{٩ س^{٤}}$ − ١٠ س^{٢}

× $\frac{١}{٨١ س^{٨}}$ + ٥ س × $\frac{١}{٢٤٣ س^{١٠}}$

= س^{٥} − $\frac{٥}{٣}$ س^{٢} + $\frac{١٠}{٩ س}$ − $\frac{١٠}{٢٧ س^{٤}}$ + $\frac{٥}{٨١ س^{٧}}$ − $\frac{١}{٢٤٣ س^{١٠}}$

ملاحظة

إذا أردنا إيجاد مجموع معاملات حدود مفكوك ذى الحدين فيمكن إيجاد ذلك بوضع كل قيمة لكل متغير فى المقدار تساوى الواحد الصحيح دون إيجاد المفكوك.

فى المثال السابق :

- مجموع معاملات حدود مفكوك $(٢ س + ٣ ص)^٥$

$= ٣٢ + ٢٤٠ + ٧٢٠ + ١٠٨٠ + ٨١٠ + ٢٤٣ = ٣١٢٥$

ويمكن إيجاد مجموع المعاملات مباشرة بوضع س = ١ ، ص = ١

فى $(٢ س + ٣ ص)^٥$

فيكون : مجموع معاملات حدود مفكوك $(٢ س + ٣ ص)^٥ = (٢ + ٣)^٥ = ٣١٢٥$

٢) مجموع معاملات حدود مفكوك $(٤ - ٣ أ)^٤ = (٤ - ٣)^٤ = ١$

٣) مجموع معاملات حدود مفكوك $\left(س - \frac{١}{٣ س}\right)^٥ = \left(١ - \frac{١}{٣}\right)^٥ = \frac{٣٢}{٢٤٣}$

نظرية ذات الحدين

إذا كانت س ∈ ح ، ن عدد صحيح موجب فإن

- $(١ + س)^ن = ١ + ن_١ س + ن_٢ س^٢ + ن_٣ س^٣ + ... + س^ن$
- $(١ - س)^ن = ١ - ن_١ س + ن_٢ س^٢ - ن_٣ س^٣ + ... + (-س)^ن$

مثال

- $(١ + س)^٥ = ١ + ٥_١ س + ٥_٢ س^٢ + ٥_٣ س^٣ + ٥_٤ س^٤ + ٥_٥ س^٥ = ١ + ٥ س + ١٠ س^٢ + ١٠ س^٣ + ٥ س^٤ + س^٥$
- $(١ - س)^٦ = ١ - ٦_١ س + ٦_٢ س^٢ - ٦_٣ س^٣ + ٦_٤ س^٤ - ٦_٥ س^٥ + ٦_٦ س^٦$

$= ١ - ٦ س + ١٥ س^٢ - ٢٠ س^٣ + ١٥ س^٤ - ٦ س^٥ + س^٦$

مثال ٢

اكتب مفكوك $(١ + س)^٧$ ثم استخدم ذلك فى :

١) إثبات أن : $٧_١ + ٧_٣ + ٧_٥ + ٧_٧ + ... + ٧_١ = ٢^٦$

٢) إثبات أن : $٧_١ - ٧_٣ + ٧_٥ - ٧_٧ + ... - ٧_١ = ٠$

٣) إيجاد قيمة : $١ + ٣ \times ٧_١ + ٩ \times ٧_٣ + ٢٧ \times ٧_٥ + ... + ٣^٧$

الحل

$(١ + س)^٧ = ٧_٠ + ٧_١ س + ٧_٢ س^٢ + ٧_٣ س^٣ + ... + ٧_٧ س^٧$

بوضع س = ١

$\therefore (١ + ١)^٧ = ٧_٠ + ٧_١ + ٧_٢ + ٧_٣ + ... + ٧_٧$

$\therefore ٧_٠ + ٧_١ + ٧_٢ + ٧_٣ + ... + ٧_٧ = ٢^٧$

بوضع س = -١

$\therefore (١ - ١)^٧ = ٧_٠ - ٧_١ + ٧_٢ - ٧_٣ + ... - ٧_٧$

$\therefore ٧_٠ - ٧_١ + ٧_٢ - ٧_٣ + ... - ٧_٧ = ٠$

بوضع س = ٣

$\therefore (١ + ٣)^٧ = ٧_٠ + ٧_١ \times ٣ + ٧_٢ \times ٩ + ٧_٣ \times ٢٧ + ... + ٧_٧ \times ٣^٧$

$\therefore ١ + ٣ \times ٧_١ + ٩ \times ٧_٢ + ٢٧ \times ٧_٣ + ... + ٣^٧ = ٤^٧$

مثال ٣

استخدم مفكوك $(١ + س)^ن$ فى إثبات أن :

$ن_١ + ٢ \times ن_٢ + ٣ \times ن_٣ + ٤ \times ن_٤ + ... + ن \times ن_ن = ن \times ٢^{ن - ١}$

الحل

$\because (١ + س)^ن = ن_٠ + ن_١ س + ن_٢ س^٢ + ن_٣ س^٣ + ن_٤ س^٤ + ... + ن_ن س^ن$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore ن(1+س)^{ن-1} = 0 + {}^{ن}ق_1 + 2\,{}^{ن}ق_2\,س + 3\,{}^{ن}ق_3\,س^2 + 4\,{}^{ن}ق_4\,س^3$

$+ \dots\dots + ن\,{}^{ن}ق_ن\,س^{ن-1}$

وبوضع س = 1

$\therefore ن(1+1)^{ن-1} = {}^{ن}ق_1 + 2\,{}^{ن}ق_2 + 3\,{}^{ن}ق_3 + 4\,{}^{ن}ق_4 + \dots\dots + ن\,{}^{ن}ق_ن$

$\therefore {}^{ن}ق_1 + 2\,{}^{ن}ق_2 + 3\,{}^{ن}ق_3 + 4\,{}^{ن}ق_4 + \dots\dots + ن\,{}^{ن}ق_ن = ن \times 2^{ن-1}$

ش ن بإيجاد مفكوك $(1+س)^{ن-1}$ ووضع س = 1 ينتج أن

$2^{ن-1} = {}^{ن-1}ق_0 + {}^{ن-1}ق_1 + {}^{ن-1}ق_2 + \dots\dots + {}^{ن-1}ق_{ن-1}$

$\therefore {}^{ن}ق_1 + 2 \times {}^{ن}ق_2 + 3 \times {}^{ن}ق_3 + \dots\dots + ن \times {}^{ن}ق_ن$

$= \sum_{ر=1}^{ن} ر \times {}^{ن}ق_ر$

$= \sum_{ر=1}^{ن} \cancel{ر} \times \frac{ن}{\cancel{ر}} \times {}^{ن-1}ق_{ر-1}$

$= ن \sum_{ر=1}^{ن} {}^{ن-1}ق_{ر-1}$

$= ن({}^{ن-1}ق_0 + {}^{ن-1}ق_1 + {}^{ن-1}ق_2 + \dots\dots {}^{ن-1}ق_{ن-1})$

$= ن \times 2^{ن-1}$

لاحظ أن

$ن ق_ر = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!}$

$= \frac{ن!}{ر!\,(ن-1-ر)!}$

$= \frac{ن}{ر} \times {}^{ن-1}ق_{ر-1}$

مثال ٤

اكتب مفكوك كل من :

① $(س-1)^5\,(س+1)^5$ ② $\left(1+س-\frac{1}{س}\right)^3$

الحل

① $(س-1)^5\,(س+1)^5 = \left((س-1)(س+1)\right)^5 = (س^2-1)^5$

$= (س^2)^5 - {}^5ق_1\,(س^2)^4 + {}^5ق_2\,(س^2)^3 - {}^5ق_3\,(س^2)^2$

$+ {}^5ق_4\,(س^2) - {}^5ق_5 = س^{10} - 5س^8 + 10س^6$

$- 10س^4 + 5س^2 - 1$

② $\left(1+س-\frac{1}{س}\right)^3 = \left((1+س)-\frac{1}{س}\right)^3 = (1+س)^3 - {}^3ق_1\,(1+س)^2\left(\frac{1}{س}\right)$

$+ {}^3ق_2\,(1+س)\left(\frac{1}{س}\right)^2 - \left(\frac{1}{س}\right)^3$

$= (1 + {}^3ق_1\,س + {}^3ق_2\,س^2 + س^3)$

$- 3(1 + 2س + س^2)\left(\frac{1}{س}\right)$

$+ 3(1+س)\left(\frac{1}{س^2}\right) - \frac{1}{س^3}$

$= 1 + 3س + 3س^2 + س^3 - \frac{3}{س}(1 + 2س + س^2)$

$+ \frac{3}{س^2}(1+س) - \frac{1}{س^3}$

$= 1 + \cancel{3س} + 3س^2 + س^3 - \cancel{\frac{3}{س}} - 6 - \cancel{3س} + \frac{3}{س^2}$

$+ \cancel{\frac{3}{س}} - \frac{1}{س^3} = س^3 + 3س^2 - 5 + \frac{3}{س^2} - \frac{1}{س^3}$

ش ن

$\left[1+\left(س-\frac{1}{س}\right)\right]^3 = 1 + 3\left(س-\frac{1}{س}\right) + 3\left(س-\frac{1}{س}\right)^2 + \left(س-\frac{1}{س}\right)^3$

$= 1 + 3س - \frac{3}{س} + 3\left(س^2 - 2 + \frac{1}{س^2}\right) + س^3 - 3س + \frac{3}{س} - \frac{1}{س^3}$

$= 1 + \cancel{3س} - \cancel{\frac{3}{س}} + 3س^2 - 6 + \frac{3}{س^2} + س^3 - \cancel{3س} + \cancel{\frac{3}{س}} - \frac{1}{س^3}$

$= س^3 + 3س^2 + \frac{3}{س^2} - \frac{1}{س^3} - 5$

مثال ٥

باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد قيمة كل من $(1,05)^8$ ، $(0,98)^6$ مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية.

الحل

$(1,05)^8 = (1 + 0,05)^8$ مثلا

$\therefore (1,05)^8 = 1 + {}^8ق_1\,(0,05)^1 + {}^8ق_2\,(0,05)^2 + {}^8ق_3\,(0,05)^3$

$+ {}^8ق_4\,(0,05)^4 + \dots\dots + {}^8ق_8\,(0,05)^8$

$\therefore (١,٠٥)^{٨} = ١ + (٠,٠٥ \times ٨) + (٠,٠٠٢٥ \times ٢٨) + (٠,٠٠٠٠١٢٥ \times ٥٦)$

$+ (٠,٠٠٠٠٠٠٦٢٥ \times ٧٠) + \ldots\ldots$

ونكتفى بهذه الحدود حيث أن الحدود التالية لا تؤثر فى الناتج إذ أن المطلوب التقريب لثلاثة أرقام عشرية.

$\therefore (١,٠٥)^{٨} = ١ + ٠,٤ + ٠,٠٧ + ٠,٠٠٧ + ٠,٠٠٠٤٣٧٥ + \ldots\ldots = ١,٤٧٧$

* $(٠,٩٨)^{٦} = (١ - ٠,٠٢)^{٦}$ وبالفك.

$\therefore (٠,٩٨)^{٦} = ١ - {}^{٦}ق_{١} (٠,٠٢)^{١} + {}^{٦}ق_{٢} (٠,٠٢)^{٢} - {}^{٦}ق_{٣} (٠,٠٢)^{٣} + \ldots\ldots + {}^{٦}ق_{٦} (٠,٠٢)^{٦} + \ldots\ldots$

$= ١ - (٦ \times ٠,٠٢) + (١٥ \times ٠,٠٠٠٤) - (٢٠ \times ٠,٠٠٠٠٠٠٠٨) + \ldots\ldots$

$= ١ - ٠,١٢ + ٠,٠٠٦ - ٠,٠٠٠١٦$

$= ١,٠٠٦ - ٠,١٢٠١٦ = ٠,٨٨٥٨٤ \simeq ٠,٨٨٦$

الحد العام فى مفكوك ذات الحدين

يرمز للحد العام فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ بالرمز $ح_{ر+١}$ حيث : $ر \in ط$ ، $ر \leq ن$

ويكون $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ر}\, س^{ن-ر}$

الحد العام = ${}^{ن}ق_{ر}$ × (الحد الثانى)^{ر} × (الحد الأول)$^{ن-ر}$

مثال ٦

أوجد الحد السادس حسب قوى س التنازلية فى مفكوك : $\left(٣س^{٢} - \frac{٢}{٣س}\right)^{٩}$

الحل

$\because ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}$ × (الحد الثانى)^{ر} × (الحد الأول)$^{ن-ر}$

$\therefore ح_{٦} = {}^{٩}ق_{٥} \times \left(\frac{-٢}{٣س}\right)^{٥} \times (٣س^{٢})^{٤} = ١٢٦ \times \frac{-٣٢}{٢٤٣س^{٥}} \times ٨١س^{٨} = -١٣٤س^{٣}$

مثال ٧

إذا كان الحد التاسع حسب قوى س التنازلية فى مفكوك : $(س^{٣} - س^{-٢})^{١١}$ يساوى ١٦٥ فأوجد قيمة : س

الحل

$\because ح_{٩} = {}^{١١}ق_{٨} (-س^{-٢})^{٨} (س^{٣})^{٣} = ١٦٥س^{-١٦} \times س^{٩} = ١٦٥س^{-٧}$

$\therefore ١٦٥س^{-٧} = ١٦٥$ $\therefore س^{-٧} = ١$ $\therefore س^{٧} = ١$ $\therefore س = \pm ١$

مثال ٨

أوجد معامل الحد الحادى والعشرين فى مفكوك : $\left(٢س + \frac{١}{س}\right)^{٢٣}$ حسب قوى س التنازلية.

الحل

$\because ح_{٢١} = {}^{٢٣}ق_{٢٠} \left(\frac{١}{س}\right)^{٢} (٢س)^{٣} = ١٧٧١ \times \frac{١}{س^{٢}} \times ٨س^{٣} = ١٤١٦٨س^{-١}$

$\therefore$ معامل $ح_{٢١} = ١٤١٦٨$

مثال ٩

فى مفكوك $\left(٣س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{١٣}$ حسب قوى س التنازلية أوجد الحد العاشر من النهاية.

الحل

الحد العاشر من النهاية فى مفكوك $\left(٣س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{١٣}$ هو الحد العاشر من البداية فى مفكوك $\left(\frac{-١}{س} + ٣س^{٢}\right)^{١٣}$

$\because ح_{١٠}$ فى مفكوك $\left(\frac{-١}{س} + ٣س^{٢}\right)^{١٣} = {}^{١٣}ق_{٩} (٣س^{٢})^{٩} \left(\frac{-١}{س}\right)^{٤}$

$= ٧١٥ \times ٣^{٩} \times س^{١٨} \times \frac{١}{س^{٤}} = ٧١٥ \times ٣^{٩} س^{١٤}$

$\therefore$ الحد العاشر من النهاية فى مفكوك $\left(٢س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{١٣} = ٧١٥ \times ٣^{٩} س^{١٤}$

ملاحظة

إذا علم ترتيب الحد من النهاية فى مفكوك ذى الحدين فإن :

رتبة الحد من البداية = عدد حدود المفكوك − ترتيب الحد من النهاية + ١

حل آخر للمثال السابق :

∵ رتبة $ح_{١٠}$ من النهاية = ١٤ (عدد حدود المفكوك) − ١٠ (ترتيب الحد من النهاية)

= ٥ (أى رتبة $ح_{٥}$ من البداية)

أى أن : الحد العاشر من النهاية هو $ح_{٥}$ من البداية فى مفكوك $\left(٣س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{١٣}$

، ∵ $ح_{٥} = {}^{١٣}ق_{٤} \times \left(\frac{-١}{س}\right)^{٤} \times (٣س^{٢})^{٩} = ٧١٥ \times \frac{١}{س^{٤}} \times ٣^{٩} س^{١٨} = ٧١٥ \times ٣^{٩}$

∴ الحد العاشر من النهاية = $٧١٥ \times ٣^{٩} س^{١٤}$

مثال ١٠

فى مفكوك $(٣ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كانت النسبة بين الحدين السادس والثامن كنسبة ٩ : ٤ فما قيمة : ن عندما س = ٢

الحل

∵ $ح_{٦} = {}^{ن}ق_{٥} س^{٥} \times ٣^{ن-٥}$

، ∵ $\frac{ح_{٨}}{ح_{٦}} = \frac{٤}{٩}$

∴ $\frac{{}^{ن}ق_{٧}}{{}^{ن}ق_{٦}} \times \frac{{}^{ن}ق_{٦}}{{}^{ن}ق_{٥}} س^{٢} \times ٣^{ن-٧-ن+٥} = \frac{٤}{٩}$

∴ $\frac{ن-٧+١}{٧} \times \frac{ن-٦+١}{٦} \times س^{٢} \times ٣^{-٢} = \frac{٤}{٩}$

∴ $\frac{(ن-٦)(ن-٥)}{٤٢} \times \frac{س^{٢}}{٩} = \frac{٤}{٩}$ ، عند س = ٢

∴ $\frac{(ن-٦)(ن-٥)}{٤٢} \times \frac{٤}{٩} = \frac{٤}{٩}$

∴ $(ن-٦)(ن-٥) = ٤٢ = ٦ \times ٧$

، ∵ $ح_{٨} = {}^{ن}ق_{٧} س^{٧} \times ٣^{ن-٧}$

∴ $\frac{{}^{ن}ق_{٧} س^{٧} \times ٣^{ن-٧}}{{}^{ن}ق_{٥} س^{٥} \times ٣^{ن-٥}} = \frac{٤}{٩}$

∴ $\frac{(ن-٦)(ن-٥)}{٤٢} = ١$

∴ ن = ١٢

حل آخر : $\frac{ح_{٦}}{ح_{٨}} = \frac{٩}{٤}$ وعندما س = ٢

∴ $\frac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن}ق_{٧}} = \frac{٩}{٤}$

∴ ${}^{ن}ق_{٥} = {}^{ن}ق_{٧}$

∴ ن = ٥ + ٧ = ١٢

∴ $\frac{{}^{ن}ق_{٥} \times ٢^{٥} \times ٣^{ن-٥}}{{}^{ن}ق_{٧} \times ٢^{٧} \times ٣^{ن-٧}} = \frac{٩}{٤}$

مثال ١١

أوجد الحد الخامس حسب قوى س التصاعدية فى المفكوك :

$(٤ + س)^{١١} - {}^{١١}ق_{١} (٤ + س)^{١٠} (١ - س) + {}^{١١}ق_{٢} (٤ + س)^{٩} (١ - س)^{٢} - \dots\dots - (١ - س)^{١١}$

الحل

المقدار يمثل مفكوك : $((٤ + س) - (١ - س))^{١١} = (٤ + س - ١ + س)^{١١} = (٣ + ٢س)^{١١}$

∴ $ح_{٥} = {}^{١١}ق_{٤} (٢س)^{٤} (٣)^{٧} = ٣٣٠ \times ١٦ س^{٤} \times ٢١٨٧ = ١١٥٤٧٣٦٠ س^{٤}$

مثال ١٢

فى مفكوك $(١ + حـ س)^{٩}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل الحد الثالث يساوى ١٤٤ وكان الحد السابع يساوى ٨٤ فأوجد قيمة كل من : حـ ، س حيث حـ عدد صحيح موجب.

الحل

∵ $ح_{٣} = {}^{٩}ق_{٢} (حـ س)^{٢} = ٣٦ حـ^{٢} س^{٢}$ ∴ معامل $ح_{٣} = ٣٦ حـ^{٢}$

∴ $٣٦ حـ^{٢} = ١٤٤$ ∴ $حـ^{٢} = ٤$ ∴ حـ = ± ٢

، ∵ حـ عدد صحيح موجب. ∴ حـ = ٢

، ∵ $ح_{٧} = ٨٤$ ∴ ${}^{٩}ق_{٦} (حـ س)^{٦} = ٨٤$ ∴ $٨٤ (٢س)^{٦} = ٨٤$

∴ $(٢س)^{٦} = ١$ ∴ ٢س = ± ١ ∴ س = ± $\frac{١}{٢}$

مثال ١٣

أثبت أن : $\frac{{}^{ن}ق_{س}}{{}^{ن}ق_{س+١}} = \frac{ن - س + ١}{س + ١}$ واستخدم ذلك فى إيجاد قيمة س إذا كانت النسبة بين الحد التاسع فى مفكوك $(س + ٢)^{١٤}$ حسب قوى س التنازلية والحد التاسع فى مفكوك $(٣ + س)^{١٥}$ حسب قوى س التصاعدية تساوى $\frac{٢٨}{٤٥}$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن+١}ق_{ر}} = \frac{\frac{\text{ن!}}{\text{ر! (ن − ر)!}}}{\frac{\text{(ن + ١)!}}{\text{ر! (ن + ١ − ر)!}}}$

$= \frac{\text{ن!}}{\text{ر! (ن − ر)!}} \times \frac{\text{ر! (ن − ر + ١)!}}{\text{(ن + ١)!}}$

$= \frac{\cancel{\text{ن!}}}{\cancel{\text{ر!}}\,\text{(ن − ر)!}} \times \frac{\cancel{\text{ر!}}\,\text{(ن − ر + ١)}\,\cancel{\text{(ن − ر)!}}}{\text{(ن + ١)}\,\cancel{\text{ن!}}}$

$= \frac{\text{ن − ر + ١}}{\text{ن + ١}}$ = الطرف الأيسر.

∵ $ح_{٩}$ في مفكوك $(\text{س} + ٢)^{١٤} = {}^{١٤}ق_{٨} \times ٢^{٨} \times \text{س}^{٦}$

، $ح_{٩}$ في مفكوك $(٣ + \text{س})^{١٥} = {}^{١٥}ق_{٨} \times \text{س}^{٨} \times ٣^{٧}$

∴ $\frac{{}^{١٤}ق_{٨} \times ٢^{٨} \times \text{س}^{٦}}{{}^{١٥}ق_{٨} \times \text{س}^{٨} \times ٣^{٧}} = \frac{٢٨}{٤٥}$

، ∵ $\frac{{}^{١٤}ق_{٨}}{{}^{١٥}ق_{٨}} = \frac{١٤ - ٨ + ١}{١٤ + ١} = \frac{٧}{١٥}$

∴ $\frac{٧}{١٥} \times \frac{١}{\text{س}^{٢}} \times \frac{٢^{٨}}{٣^{٧}} = \frac{٢٨}{٤٥}$

∴ $\frac{٧}{٤٥} \times \frac{١٤}{٧} \times \frac{٢^{٨}}{٣^{٧}} = \frac{١}{\text{س}^{٢}}$

∴ $\frac{٤}{٣} \times \frac{٣^{٧}}{٢^{٨}} = \frac{١}{\text{س}^{٢}}$

∴ $\frac{٢^{٢}}{٣^{٦}} = \frac{١}{\text{س}^{٢}}$

∴ $\text{س}^{٢} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦}$

∴ $\text{س} = \pm\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} = \pm\frac{٨}{٢٧}$

قاعدة

① $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}} + (\text{س} - \text{أ})^{\text{ن}} = ٢\,(ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + \ldots)$

أي ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة من مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$

ويكون : عدد حدود المفكوك $= \frac{\text{ن}}{٢} + ١$ إذا كان : ن زوجي

عدد حدود المفكوك $= \frac{\text{ن} + ١}{٢}$ إذا كان : ن فردي

② $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}} - (\text{س} - \text{أ})^{\text{ن}} = ٢\,(ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + \ldots)$

أي ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة من مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$

ويكون : عدد حدود المفكوك $= \frac{\text{ن}}{٢}$ إذا كان : ن زوجي

عدد حدود المفكوك $= \frac{\text{ن} + ١}{٢}$ إذا كان : ن فردي

مثال ١٤

اختصر المقدار : $(١ + \sqrt{\text{ب}})^{٤} + (١ - \sqrt{\text{ب}})^{٤}$ ثم أوجد قيمة الناتج عند : $\text{ب} = \sqrt{٢}$

الحل

$(١ + \sqrt{\text{ب}})^{٤} + (١ - \sqrt{\text{ب}})^{٤} = ٢\,(ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥})$

$= ٢\,(١ + {}^{٤}ق_{٢}\,(\sqrt{\text{ب}})^{٢} + {}^{٤}ق_{٤}\,(\sqrt{\text{ب}})^{٤})$

$= ٢\,(١ + ٦\,\text{ب} + \text{ب}^{٢}) = ٢ + ١٢\,\text{ب} + ٢\,\text{ب}^{٢}$

، عندما $\text{ب} = \sqrt{٢}$

∴ الناتج $= ٢ + ١٢\sqrt{٢} + ٢\,(\sqrt{٢})^{٢} = ٢ + ١٢\sqrt{٢} + ٤ = ٦ + ١٢\sqrt{٢}$

مثال ١٥

أوجد لأقرب أربعة أرقام عشرية : $(١,٠٢)^{٦} - (٠,٩٨)^{٦}$ مستخدمًا نظرية ذات الحدين.

الحل

$(١,٠٢)^{٦} - (٠,٩٨)^{٦} = (١ + ٠,٠٢)^{٦} - (١ - ٠,٠٢)^{٦} = ٢\,(ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦})$

$= ٢\,[{}^{٦}ق_{١}\,(٠,٠٢) + {}^{٦}ق_{٣}\,(٠,٠٢)^{٣} + {}^{٦}ق_{٥}\,(٠,٠٢)^{٥}]$

$= ٢\,[٦ \times \frac{٢}{١٠٠} + ٢٠ \times \frac{٨}{(١٠٠)^{٣}} + ٦ \times \frac{٣٢}{(١٠٠)^{٥}}]$

$= ٢\,(٠,١٢ + ٠,٠٠٠١٦ +$ حد لا يؤثر في التقريب لأربعة أرقام عشرية)

$= ٠,٢٤ + ٠,٠٠٠٣٢ = ٠,٢٤٠٣٢ \simeq ٠,٢٤٠٣$

الحد الأوسط عند عمليات (س ± أ)^ن

الحد الأوسط عند حدود المفكوك = ن + ١ حدًا.

في مفكوك (س ± أ)^ن عند حدود المفكوك (ن + ١) فرديًا ويوجد للمفكوك

① إذا كانت ن زوجية : يكون عند حدود المفكوك (ن + ١) فرديًا ويوجد للمفكوك وحيد رتبته $\frac{ن}{٢}$ أي أن : الحد الأوسط هو ($ح_{\frac{ن}{٢}+١}$)

② إذا كانت ن فردية : يكون عند حدود المفكوك (ن + ١) زوجيًا ويوجد للمفكوك أوسطان رتبتهما على الترتيب $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+٣}{٢}$

أي أن : الحدان الأوسطان هما ($ح_{\frac{ن+١}{٢}}$ والحد الذي يليه)

مثال ١٦

أوجد الحد الأوسط أو الحدين الأوسطين في مفكوك كل من المقدارين :

① $(٢س^{٢} - \frac{١}{س})^{١٢}$ ② $(٢أ - ١)^{٩}$

الحل

① ∵ الأس ن = ١٢ عدد زوجي.

∴ المفكوك به حد أوسط واحد رتبته = $\frac{١٢ + ٢}{٢}$ = ٧

∵ الحد الأوسط = $ح_{٧} = ح_{٦+١} = {}^{١٢}ق_{٦} (-\frac{١}{س})^{٦} (٢س^{٢})^{٦}$

= ٩٢٤ × $\frac{١}{س^{٦}}$ × ٦٤ $س^{١٢}$ = ٥٩١٣٦ $س^{٦}$

② ∵ الأس ن = ٩ عدد فردي.

∴ المفكوك به حدان أوسطان رتبتهما = $\frac{٩ + ١}{٢}$ ، $\frac{٩ + ٣}{٢}$ أي ٥ ، ٦

∴ الحد الأوسط الأول = $ح_{٥} = ح_{٤+١} = {}^{٩}ق_{٤} (-١)^{٤} (٢أ)^{٥}$

= ١٢٦ × ٣٢ $أ^{٥}$ = ٤٠٣٢ $أ^{٥}$

• الحد الأوسط الثاني = $ح_{٦} = ح_{٥+١} = {}^{٩}ق_{٥} (-١)^{٥} (٢أ)^{٤}$

= ١٢٦ × (-١) × ١٦ $أ^{٤}$ = -٢٠١٦ $أ^{٤}$

مثال ١٧

إذا كان الحد الأوسط في مفكوك : $(٣س^{٢} + \frac{٢}{٣}س^{-١})^{٨}$ يساوي ١٧٩٢٠ فما قيمة : س ؟

الحل

∵ الأس = ٨ عدد زوجي.

∴ المفكوك به حد أوسط واحد رتبته = $\frac{٨ + ٢}{٢}$ = ٥

∴ الحد الأوسط = $ح_{٥} = ح_{٤+١} = {}^{٨}ق_{٤} (\frac{٢}{٣}س^{-١})^{٤} (٣س^{٢})^{٤}$

= ${}^{٨}ق_{٤} \times \frac{٢^{٤}}{٣^{٤}} س^{-٤} \times ٣^{٤} س^{٨}$ = ${}^{٨}ق_{٤} \times ٢^{٤} س^{٤}$

∴ ${}^{٨}ق_{٤} \times ١٦ س^{٤}$ = ١٧٩٢٠ ∴ ٧٠ × ١٦ $س^{٤}$ = ١٧٩٢٠

∴ $س^{٤} = \frac{١٧٩٢٠}{٧٠ \times ١٦}$ ∴ $س^{٤}$ = ١٦

∴ س = ± ٢

مثال ١٨

أوجد الحد الأوسط في مفكوك : $(١ + ٣س)^{١٠} - (١ - ٣س)^{١٠}$

الحل

∵ $(١ + ٣س)^{١٠} - (١ - ٣س)^{١٠}$ = ٢ ($ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + ح_{٨} + ح_{١٠}$)

∴ الحد الأوسط في المفكوك = ٢ $ح_{٦}$ = ٢ ${}^{١٠}ق_{٥} (٣س)^{٥}$ = ٢ × ٢٥٢ × $٣^{٥}$ × $س^{٥}$

= ١٢٢٤٧٢ $س^{٥}$

مثال ١٩

إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(أس + ب)^{٢ن+١}$ متساويين حيث : ن ∈ $ص^{+}$

فأثبت أن : س = $\frac{ب}{أ}$

الحل

رتبتا الحدان الأوسطان هما : $\frac{٢ن+١+١}{٢}$ ، $\frac{٢ن+١+٣}{٢}$

أى : $\frac{٢ن+٢}{٢}$ ، $\frac{٢ن+٤}{٢}$

أى : ن + ١ ، ن + ٢

∴ الحد الأوسط الأول = $ح_{ن+١} = {}^{٢ن+١}ق_{ن} \, ب^{ن} \, (أ س)^{ن+١}$

$= {}^{٢ن+١}ق_{ن} \, ب^{ن} \, أ^{ن+١} \, س^{ن+١}$

، الحد الأوسط الثانى = $ح_{ن+٢} = {}^{٢ن+١}ق_{ن+١} \, ب^{ن+١} \, (أ س)^{ن}$

$= {}^{٢ن+١}ق_{ن+١} \, ب^{ن+١} \, أ^{ن} \, س^{ن}$

، ∵ الحدين الأوسطين متساويان.

∴ ${}^{٢ن+١}ق_{ن} \, ب^{ن} \, أ^{ن+١} \, س^{ن+١} = {}^{٢ن+١}ق_{ن+١} \, ب^{ن+١} \, أ^{ن} \, س^{ن}$

، ∵ ${}^{٢ن+١}ق_{ن} = {}^{٢ن+١}ق_{ن+١}$

∴ $ب^{ن} \, أ^{ن+١} \, س^{ن+١} = ب^{ن+١} \, أ^{ن} \, س^{ن}$

وبقسمة كل من الطرفين على $ب^{ن} \, أ^{ن} \, س^{ن}$

∴ أ س = ب

∴ $س = \frac{ب}{أ}$

مثال ٢٠

إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك :

$(٢ + س)^{٧} + ٧ س^{٢} (٢ + س)^{٦} + \frac{٧ \times ٦}{٢ \times ١} س^{٤} (٢ + س)^{٥} + ... + س^{١٤}$

متساويين فأوجد قيمة : س

الحل

∵ $(٢ + س)^{٧} + ٧ س^{٢} (٢ + س)^{٦} + \frac{٧ \times ٦}{٢ \times ١} س^{٤} (٢ + س)^{٥} + ... + س^{١٤}$

$= ((٢ + س) + س^{٢})^{٧}$

∴ الحدان الأوسطان هما : $ح_{٤}$ ، $ح_{٥}$

، ∵ $ح_{٤} = ح_{٥}$ ∴ ${}^{٧}ق_{٣} \times (س^{٢})^{٣} (٢ + س)^{٤} = {}^{٧}ق_{٤} \times (س^{٢})^{٤} (٢ + س)^{٣}$

∴ $\cancel{{}^{٧}ق_{٣}} \times س^{٦} (٢ + س)^{٤} = \cancel{{}^{٧}ق_{٣}} \times س^{٨} (٢ + س)^{٣}$

∴ (٢ + س) = $س^{٢}$ ∴ $س^{٢} - س - ٢ = ٠$

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠ ∴ س = ٢ أ ، س = −١

ملاحظة

إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ متساويين فإن : س = ص

وفى [illegible]

∵ الحدان الأوسطان متساويان. ∴ أ س = ب ∴ $س = \frac{ب}{أ}$

وفى [illegible]

∵ الحدان الأوسطان متساويان. ∴ ٢ + س = $س^{٢}$

∴ $س^{٢} - س - ٢ = ٠$ ∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ س = ٢ أ ، س = −١

مثال ٢١

بفرض أن الحدين الأوسطين فى مفكوك $(٢ س - \frac{١}{٤ س^{٢}})^{٩}$ حسب قوى س التنازلية هما أ ، ب على الترتيب.

فأثبت أن : أ + ٨ ب $س^{٣}$ = صفر

١

• [illegible]

∴ عدد الحدود = ١٠ حدود.

∴ الحدان الأوسطان هما $ح_٥ ، ح_٦$

∴ $ح_٥ = {}^{٩}ق_٤ \left(\frac{-١}{س^٢}\right)^٥ (٢س)^٥ = {}^{٩}ق_٤ \frac{١}{٨س^٣}$

، $ح_٦ = {}^{٩}ق_٥ \left(\frac{-١}{س^٢}\right)^٦ (٢س)^٦ = -{}^{٩}ق_٤ \frac{١}{٦٤س^٦}$

∴ الطرف الأيمن = $أ + ٨ب س^٣$

$= {}^{٩}ق_٤ \frac{١}{٨س^٣} - ٨ \times {}^{٩}ق_٤ \times \frac{س^٣}{٦٤س^٦}$

$= {}^{٩}ق_٤ \frac{١}{٨س^٣} - {}^{٩}ق_٤ \times \frac{١}{٨س^٣}$ = صفر = الطرف الأيسر.

تمارين 3

على نظرية ذات الحدين
بأس صحيح موجب

اختبار تفاعلى

• [illegible] ♣ مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسى

١ باستخدام نظرية ذات الحدين اكتب مفكوك كل مما يأتى :

١ $(س + ص)^٥$ ٢ $(س - ٢)^٦$ ٣ $(٢س + ٣ص)^٤$

٤ $(١ - \sqrt{٢}س)^٦$ ٥ $\left(\frac{٢}{س} + \frac{س}{٢}\right)^٤$ ٦ $\left(س - \frac{١}{س}\right)^٥$

٧ $\left(٢س^٢ - \frac{٣}{٢س}\right)^٥$ ٨ $(١ - س)^٥ (١ + س)^٥$ ٩ $\left(١ + س - \frac{١}{س}\right)^٣$

٢ اكتب فى أبسط صورة مفكوك كل من :

١ $(س + ٢)^٦ - (س - ٢)^٦$

٢ $(س + \sqrt{٢})^٤ + (س - \sqrt{٢})^٤$

٣ $(١ + \sqrt{س})^٥ - (١ - \sqrt{س})^٥$ وأوجد قيمة الناتج عند س = ٣

٤ $\left(\frac{س^٣ + ١}{س + ١} + س\right)^٤ + (س^٢ - ١)^٤$

٥ $(١ + \sqrt{١ - س^٢})^٥ + (١ - \sqrt{١ - س^٢})^٥$

٣ استخدم نظرية ذات الحدين فى إيجاد قيمة كل مما يأتى مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية :

١ $(١,٠٣)^٤$ ٢ $(٠,٩٨)^{١٠}$ ٣ $(١,٠٢)^٨ - (٠,٩٨)^٨$

٤ اكتب مفكوك :

١ $(١ + س)^٦$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة عددية للمقدار :

${}^{٦}ق_٠ + {}^{٦}ق_١ + {}^{٦}ق_٢ + \dots\dots + {}^{٦}ق_٦$

٢ $(١ - س)^٨$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة :

$١ - {}^{٨}ق_١ + {}^{٨}ق_٢ - {}^{٨}ق_٣ + \dots\dots + {}^{٨}ق_٨$

٣ $(أ + ٢س)^٦$ ومن ذلك استنتج أن :

${}^{٦}ق_١ - {}^{٦}ق_٢ + {}^{٦}ق_٣ + {}^{٦}ق_٤ + {}^{٦}ق_٥ + {}^{٦}ق_٦ = ٦٣$

④ $(1 + س)^{ن}$ ثم استنتج قيمة كل من :

(١) $1 + {}^{12}ق_1 + {}^{12}ق_2 + \dots + {}^{12}ق_{12}$

(٢) $1 + 2 \times {}^{15}ق_1 + 2^2 \times {}^{15}ق_2 + \dots + 2^{ن} \times {}^{15}ق_{ن} + \dots + 2^{15} \times {}^{15}ق_{15}$

⑤ $(1 + س)^{ن}$ ثم أثبت أن :

(١) ${}^{ن}ق_1 + {}^{ن}ق_2 + \dots + {}^{ن}ق_{ن} = 2^{ن}$

(٢) ${}^{8}ق_1 + 2 \times {}^{8}ق_2 + 3 \times {}^{8}ق_3 + \dots + 8 \times {}^{8}ق_8 = 8 \times 2^7$

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان الحد الأوسط فى مفكوك : $\left(\frac{2أ}{3} + \frac{ب}{2أ}\right)^{8ن}$ هو الحد التاسع

فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

② إذا كان الحد الأوسط فى مفكوك : $\left(س^2 - \frac{1}{س}\right)^{ن+5}$ هو $ح_{12}$

فإن : ن = ...

(أ) ١٩ (ب) ١٨ (جـ) ٢٠ (د) ١٧

③ الحد الرابع فى مفكوك : $\left(س + \frac{1}{س}\right)^4$ حسب قوى س التنازلية يساوى .....

(أ) $4س^2$ (ب) $\left(\frac{1}{س}\right)^4$ (جـ) $\frac{1}{س^2}$ (د) $\frac{4}{س^2}$

④ عدد حدود مفكوك $\left((أ + 4ب)^2 (أ - 4ب)^2\right)^2$ يساوى .....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٣٢

⑤ إذا كان عدد حدود مفكوك : $(س + ص)^{2ن-1}$ يساوى ١٢ حدًا

فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ١٢

⑥ إذا كان عدد حدود المفكوك $(أ + ب)^{2ن} + (أ - ب)^{2ن}$ يساوى ١١

فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١١

⑦ إذا كانت رتبتا الحدين الأوسطين فى مفكوك : $(س + ص)^{ن}$ هما ٧ ، ٨

فإن : ن = ...

(أ) ١٤ (ب) ١٣ (جـ) ١٦ (د) ٥٦

⑧ من مفكوك : $(1 + ب س)^9$ حسب قوى س التصاعدية يكون معامل الحد السادس هو .....

(أ) ${}^{9}ق_5$ (ب) ${}^{9}ق_6$ (جـ) ${}^{9}ق_5 ب^5$ (د) ${}^{9}ق_6 ب^6$

⑨ معامل الحد الأوسط فى مفكوك : $\left(3س - \frac{1}{6}\right)^{10}$ يساوى .....

(أ) $\frac{-63}{8}$ (ب) $\frac{-67}{8}$ (جـ) $\frac{63}{8}$ (د) $\frac{67}{8}$

⑩ مجموع معاملات حدود مفكوك : $(1 + س - 3س^2)^{2021}$ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٠ (د) ٢٠١٧

⑪ إذا كان مجموع معاملات حدود المفكوك $(4س + 3ص - 5ع)^{ن}$ يساوى ٦٤

فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٨

⑫ إذا كان مجموع معاملات الحدود من مفكوك $(أ^2 س^2 - 2أس + 1)^{51}$

يساوى صفر فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) −١

⑬ إذا كان أ هو مجموع معاملات الحدود الفردية الرتبة فى مفكوك $\left(2س - \frac{3}{س^2}\right)^{19}$

بينما ب هو مجموع معاملات الحدود الزوجية الرتبة فى نفس المفكوك

فإن : أ + ب = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٥

⑭ إذا كان أ هو مجموع معاملات الحدود فى مفكوك $(1 - 3س + 10س^2)^{ن}$

، ب هو مجموع معاملات الحدود فى مفكوك $(1 + س^2)^{ن}$ فإن : أ = ...

(أ) ب (ب) ٢ب (جـ) $ب^2$ (د) $ب^3$

١٥ من مفكوك المقدار ذى الحدين لدينا ٧ حدود موجبة ، ٦ حدود سالبة فإن المقدار يكون على الصورة .....

(أ) $(\text{أ} - \text{ب})^{١٢}$ (ب) $(\text{أ} + \text{ب})^{١٣}$ (جـ) $(\text{أ} + \text{ب})^{١٢}$ (د) $(\text{أ} - \text{ب})^{١٣}$

١٦ (دور أول ٢٠١٩) الحد الأخير من مفكوك : $(٢ - \text{س})^{٥}$ $(٢ + \text{س})^{٥}$ هو ..

(أ) $\text{س}^{٥}$ (ب) $-\text{س}^{٥}$ (جـ) $-\text{س}^{١٠}$ (د) $\text{س}^{١٠}$

١٧ من مفكوك : $(١ + \text{أ س})^{٧}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $\text{ح}_{٥} = ٦٠$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ± ٢ (د) ± ٤

١٨ إذا كان معامل الحد التاسع فى مفكوك $\left(\text{أ}\sqrt{\text{س}} - \frac{١}{\text{أ}\sqrt{\text{س}}}\right)^{١٢}$ حسب قوى س التنازلية يساوى ٧٩٢٠ فإن : أ = ...

(أ) $\pm\frac{١}{٢}$ (ب) ± ٢ (جـ) $\pm\frac{١}{٤}$ (د) ± ٤

١٩ فى مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان $\text{ح}_{٤}$ هو نفسه الحد الخامس عشر من النهاية فإن : ن = ...

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ١٨ (د) ١٩

٢٠ إذا كان معاملا الحدين السادس والسادس عشر فى مفكوك : $(\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}}$ متساويين فإن : ن = ...

(أ) ١٩ (ب) ٢٠ (جـ) ٢١ (د) ٢٢

٢١ إذا كان الحد الأوسط من مفكوك : $\left(٢\text{س}^{٢} + \frac{٢}{٣\text{س}}\right)^{٨}$ يساوى ١٧٩٢٠ فإن س = ...

(أ) ± ٢ (ب) ٣ (جـ) ± ٤ (د) ٥

٢٢ فى مفكوك : $\left(\sqrt{٢} + \frac{١}{\sqrt[٣]{٢}}\right)^{\text{ن}}$ إذا كانت النسبة بين الحد السابع من البداية إلى الحد السابع من النهاية كنسبة ١ : ٦ فإن قيمة ن تساوى .....

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

٢٣ إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(\text{أ} + ٣\text{ب})^{٢\text{ن}+١}$ متساويين فإن .....

(أ) أ = ٣ ب (ب) ٣ أ = ب (جـ) أ = ٩ ب (د) $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{١}{٩}$

٢٤ من مفكوك : $(\text{أ س} + \text{ب})^{٢\text{ن}+١}$ إذا كان الحدان الأوسطان متساويين عند س = ٢ فإن

(أ) أ = ٢ ب (ب) ب = ٢ أ (جـ) أ ب = ٢ (د) أ ب = $\frac{١}{٢}$

٢٥ من مفكوك : $(١ + \text{س})^{١٧}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $\text{ح}_{\text{ر}+٤}$ = معامل $\text{ح}_{٢\text{ر}+٣}$ فإن : ر = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١٧ (د) ٧

٢٦ فى مفكوك : $(١ + \text{س})^{\text{ن}}$ إذا كان معامل $\text{ح}_{\text{ب}}$ = معامل $\text{ح}_{\text{جـ}}$ حيث ب ≠ جـ فإن : ب + جـ = ...

(أ) ن (ب) ن + ٢ (جـ) ن − ٢ (د) ٢ ن

٢٧ المقدار : $(\sqrt{٢} + ١)^{٥} - (\sqrt{٢} - ١)^{٥} =$ .....

(أ) $٥٨\sqrt{٢}$ (ب) $-٥٨\sqrt{٢}$ (جـ) −٨٢ (د) ٨٢

٢٨ إذا كان معامل الحد الأوسط فى مفكوك $(١ + \text{م س})^{٤}$ يساوى معامل الحد الأوسط فى مفكوك $(١ - \text{م س})^{٦}$ فإن : م = ...

(أ) $\frac{-٣}{١٠}$ (ب) $\frac{٣}{١٠}$ (جـ) $\frac{-٣}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

٢٩ (دور أول ٢٠٢٠) إذا كان معامل الحد السادس فى مفكوك $\left(\text{أ س} + \frac{١}{\text{ب س}}\right)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية يساوى $\text{ق}_{٥}$ فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ...

حيث أ ∈ ح* ، ب ∈ ح*

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ١٠ (د) $\frac{١}{١٠}$

٣٠ (دور أول ٢٠٢١) إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية متساويين ، ن عددًا فرديًا فإن : س = ...

علمًا بأن أ ∈ ح* ، ب ∈ ح*

(أ) $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ (ب) $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ (جـ) أ ب (د) $-\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

• [illegible] من مفكوك $(١ + س)^{ن} = ١ + {}^{١}ق_{ن}\, س + {}^{٢}ق_{ن}\, س^{٢} + \dots + {}^{ن}ق_{ن}\, س^{ن}$ ، $٢ \cdot {}^{١}ق_{ن} = {}^{٢}ق_{ن}$ فإن ن =

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

• [illegible] إذا كان $١ + \frac{٤}{٣} س + \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ٣} س^{٢} + \frac{٤ \times ٣ \times ٢}{٣ \times ٢ \times ١} س^{٣} + \dots$ ، $\frac{١}{٣٢} س = ١٠٢٤$ فإن س =

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

• مجموعة حل المعادلة $١ + ٦ س + \frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١} س^{٢} + \dots + س^{٦} = ٦٤$ هي ح هي

(أ) {١ ، ٣} (ب) {١ ، ٢} (جـ) {١ ، ٣} (د) {١ ، ٢}

• عدد الحدود الصحيحة في مفكوك $(\sqrt{٢} + \sqrt[٣]{٣})^{١٠}$ هو

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) [illegible] (د) [illegible]

• عدد الحدود الصحيحة في مفكوك $(\sqrt[٣]{٢} - \frac{١}{\sqrt[٣]{٣}})^{٢٠}$ هو

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) [illegible]

• عدد حدود مفكوك $(س + ص)^{٢٠٠٠} + (س - ص)^{٢٠٠٠}$ بعد التبسيط هو

(أ) ١٠٠٠ (ب) ٢٠٠٠ (جـ) ٢٠٠١ (د) [illegible]

• عدد حدود مفكوك $(س + ص)^{٥٠٠٠} - (س - ص)^{٥٠٠٠}$ بعد التبسيط هو

(أ) ١٠٠٠ (ب) ٥٠٠٠ (جـ) ٥٠١ (د) [illegible]

• عدد حدود مفكوك : $(س + ص)^{١٦} + (س - ص)^{١٦}$ بعد التبسيط هو

(أ) ١٥ (ب) ١٧ (جـ) ٣٠ (د) ٣٢

• ٣٩ إذا كان عدد حدود المفكوك $(س + ص)^{ن} + (س - ص)^{ن}$ بعد التبسيط هو ١٦ فإن : ن = ..

(أ) ٣٢ فقط. (ب) ٣١ فقط. (جـ) ٣٠ أو ٣١ (د) ٣١ ، ٣٢

• في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٢ن}$ الحد الأوسط ≠ ..

(أ) ${}^{٢ن}ق_{ن}$ (ب) $\frac{{}^{٢ن}ل_{ن}}{ن!}$

(جـ) ${}^{٢ن}ل_{ن}$ (د) $\frac{١ \times ٣ \times ٥ \times \dots \times (٢ن - ١)}{ن!} \times ٢^{ن}$

• $\sum_{ر=٠}^{٢٠} {}^{٢٠}ق_{ر}$

(أ) $٢^{٢٠}$ (ب) $٢^{١٩}$

(جـ) $٢^{١٩} + \frac{١}{٢}\, {}^{٢٠}ق_{١٠}$ (د) $٢^{١٩} - \frac{١}{٢}\, {}^{٢٠}ق_{١٠}$

• $\sum_{ر=٠}^{٢٧} {}^{٢٧}ق_{ر}$

(أ) $٢^{٢٧}$ (ب) $٢^{١٤}$ (جـ) $٢^{٢٦}$ (د) $٢^{٢٧}$

• إذا كان $(١ + أس)^{ن} = ١ + ٨ س + ٢٤ س^{٢} + \dots + أ^{ن} س^{ن}$

فإن $\frac{أ^{ن}}{أ^{٠ن}}$ =

(أ) ٣ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١٠}{٣}$ (د) $\frac{١}{٣}$

• $١ + {}^{٢٠}ق_{١}\, س + {}^{٢٠}ق_{٢}\, ت^{٢} + \dots + {}^{٢٠}ق_{٢٠}\, ت^{٢٠} =$

(أ) ٢٠ (ب) ٢٠ (جـ) -١٠٢٤ (د) ١٠٢٤

• ${}^{ن}ق_{٠} - {}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢} - \dots + (-١)^{ن}\, {}^{ن}ق_{ن} =$

(أ) $(-١)^{ن}$ (ب) $(١)^{ن}$ (جـ) صفر (د) $(-٢)^{ن}$

• ${}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١}\left(\frac{١}{٣}\right) + {}^{ن}ق_{٢}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} + \dots + {}^{ن}ق_{ن}\left(\frac{١}{٣}\right)^{ن}$

(أ) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{ن}$ (ب) $\left(\frac{٤}{٣}\right)^{ن}$ (جـ) $\left(\frac{٤}{٣}\right)^{ن}$ (د) $\left(\frac{٥}{٣}\right)^{ن}$

• ${}^{ن}ق_{٠} + ٢ \times {}^{ن}ق_{١} + ٢^{٢} \times {}^{ن}ق_{٢} + \dots + ٢^{ن} \times {}^{ن}ق_{ن}$

(أ) $٢^{ن}$ (ب) $٦^{ن}$ (جـ) $٤^{ن}$ (د) $٣^{ن}$

(٤٨) عدد حدود المفكوك [(س + ص)^{١٠} + ^{١٠}ق$_{١}$ (س + ص)^{٩} (س − ص) + ^{١٠}ق$_{٢}$ (س + ص)^{٨} (س − ص)^{٢} + ... + (س − ص)^{١٠}] بعد التبسيط هو .....

(أ) ١ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١١٠

٦ أوجد :

(١) معامل الحد السادس فى مفكوك : $\left(\text{س} + \frac{٢}{\text{س}}\right)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية.

(٢) الحد الخامس فى مفكوك : (س + ٢ ص)^{١٠} حسب قوى س التنازلية.

(٣) الحد السادس فى مفكوك : (٢ س − ص)^{٧} حسب قوى س التصاعدية.

(٤) الحد الخامس من النهاية فى مفكوك : $\left(\text{س}^{٢} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢٠}$ حسب قوى س التنازلية.

(٥) الحد الأوسط فى مفكوك : $\left(٢\text{س} + \frac{١}{٢\text{س}^{٢}}\right)^{١٢}$

(٦) الحدين الأوسطين فى مفكوك : $\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٣} + \frac{٣}{\text{س}}\right)^{١٥}$

(٧) الحد الذى ترتيبه (ن + ٣) فى مفكوك : $\left(٢\text{س} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٢\text{ن}+١}$ حسب قوى س التنازلية.

(٨) الحد الأوسط فى مفكوك : (١ − س)$^{٢\text{ن}}$

(٩) الحدين الأوسطين فى مفكوك : (١ + س)$^{٢\text{ن}-١}$

(١٠) الحد الرابع من النهاية فى مفكوك : س^{٤} $\left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٩}$ حسب قوى س التنازلية.

(١١) الحد الأوسط فى المفكوك : ١ + ^{١٢}ق$_{١}$ س + ^{١٢}ق$_{٢}$ س^{٢} + ... + ^{١٢}ق$_{١٢}$ س^{١٢}

(١٢) الحد الأوسط فى المفكوك : (٢ س + ١)^{١٠} + ^{١٠}ق$_{١}$ (٢ س + ١)^{٩} (س − ٣) + ^{١٠}ق$_{٢}$ (٢ س + ١)^{٨} (س − ٣)^{٢} + ... + (س − ٣)^{١٠}

(١٣) الحد الخامس فى المفكوك : (٣ + س)^{١١} − ^{١١}ق$_{١}$ (٣ + س)^{١٠} (١ − ٢ س) + ^{١١}ق$_{٢}$ (٣ + س)^{٩} (١ − ٢ س)^{٢} − ..... − (١ − ٢ س)^{١١} حسب قوى س التصاعدية.

(١٤) القيمة العددية للحد السادس عند س = ١ من المفكوك :

(١ − س)^{٨} + ٢٤ س (١ − س)^{٧} + ٢٥٢ س^{٢} (١ − س)^{٦} + ... + ٦٥٦١ س^{٨}

حسب قوى س التصاعدية.

(١٥) الحد الأوسط من مفكوك : (٣ + ٢ س)^{٨} + (٣ − ٢ س)^{٨}

٧ أوجد قيمة س الحقيقية فى كل مما يأتى إذا كان :

١ ١ + ٨ س + ^{٨}ق$_{٢}$ س^{٢} + ... + س^{٨} = ٢٥٦

٢ $(١ + \sqrt{٣})^{٦} - (١ - \sqrt{٣})^{٦} = ٤٨٠\sqrt{٣}$ س

٣ $\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)^{١٠} - ١٠ \times ٣\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)^{٩} + ٤٥ \times ٣^{٢}\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)^{٨} - ١٢٠ \times ٣^{٣}\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)^{٧}$ + ... + $٣^{١٠}$ = ١٠٢٤

٤ ١ + ٢٠ س + ١٩٠ س^{٢} + ١١٤٠ س^{٣} + ... + س^{٢٠}

= س^{١٨} + ١٨ س^{١٧} + ١٥٣ س^{١٦} + ... + ١

٥ الحدان الأوسطان فى المفكوك : (٢ + س)^{٧} + ٧ س^{٢} × (٢ + س)^{٦} + $\frac{٧ \times ٦}{٢ \times ١}$ س^{٤} (٢ + س)^{٥} + ... + س^{١٤} متساويان.

٦ الحد الأوسط فى مفكوك : $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{٢\text{س}}\right)^{١٠}$ يساوى $\frac{٢٨}{٢٧}$

٧ (دور أول ٢٠١٥) الحدان الأوسطان فى مفكوك : $\left(\frac{٢}{\text{س}} + \frac{\text{س}^{٣}}{٨}\right)^{٩}$ متساويين.

٨ مجموع الحدين الأوسطين فى المفكوك : $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٩}$ يساوى صفر.

٩ (السودان ٢٠١٤) الحد الثالث فى مفكوك : $\left(٢\text{س}^{٢} + \frac{١}{٢}\right)^{٧}$ حسب قوى س التنازلية مساويًا الحد السادس.

١٠ الحدان الأوسطان فى مفكوك : (أ س + ب)$^{٢\text{ن}+١}$ حيث ن ∈ ص$^{+}$ متساويين.

١١ الحد الأوسط من مفكوك : (١ + س)^{١٠} يساوى ضعف الحد السابع حسب قوى س التصاعدية.

مجموع الثلاثة حدود الأول والأوسط والأخير فى مفكوك . $(س - ١)^{٦}$ يساوى ١٩٠

(١٣) النسبة بين الحدين الخامس والثامن من مفكوك $(٣ + ٥ س)^{٢٠}$ حسب قوى س التصاعدية تساوى ١ : ٢

٨ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان الحد الأوسط فى مفكوك : $(٣ س^{٢} + \frac{١}{٣ س})^{٨}$ يساوى ١١٢٠

فأوجد قيمة : $(٢ + س)^{٥}$

(٢) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك : $(٣ س + ٢ ص)^{١٢}$ متساويين

أثبت أن : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$

(٣) أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الثالث فى مفكوك : $(\frac{٢ س}{٣} + \frac{٣}{٢ س})^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية عندما س = $\sqrt{٣}$

(٤) فى مفكوك : $(١ + م س)^{ن}$ إذا كان معاملا س ، $س^{٢}$ هما ١٢ ، ٦٣ على الترتيب

فما قيمة : م ، ن ؟

(٥) من مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل الحد السادس يساوى معامل الحد العاشر أوجد قيمة : ن

(٦) فى مفكوك : $(١ + أ س)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $ح_{٢} = ٤$

ومعامل $ح_{٥} = ١١٢٠$ فأوجد قيمتى : أ ، س

(٧) فى مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان : $ح_{٣} = ٢٨ س^{٢}$

، $ح_{٥} = ١١٢٠$ فأوجد قيمة كل من : ن ، س

(٨) فى مفكوك : $(١ + حـ س)^{١٠}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل الحد الثالث يساوى ١٨٠ وكان الحد الخامس ٢١٠ أوجد قيمة كل من : حـ ، س

(٩) من مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان :

$٥ (ح_{٦})^{٢} = ١٨ ح_{٤} \times ح_{٨}$ فأوجد قيمة : ن حيث ن عدد صحيح موجب.

(١٠) من مفكوك : $(أ س + ب)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان معام $ح_{١} = \frac{٦٣}{٨}$

أثبت أن : ٢ أ ب = ١

(١١) إذا كان أ ، ب هما الحدان الأوسطان فى مفكوك $(س - \frac{١}{س})^{١٥}$

حسب قوى س التنازلية فأثبت أن : أ + ب $س^{٢}$ = .

(١٢) إذا كانت معاملات الحدود الرابع والخامس والسادس على الترتيب فى مفكوك $(٢ س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة : ن

(١٣) فى مفكوك : $(١ + م س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى هى على الترتيب ١ ، $\frac{١٠}{٣}$ س ، ٥ $س^{٢}$ أوجد قيمة م ، ن ثم احسب قيمة الحد الأوسط من هذا المفكوك عندما س = ٣

(١٤) فى مفكوك : $(١ - ٢ س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان الحدان الثانى والثالث هما على الترتيب $\frac{١٠}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$ فأوجد قيمة كل من : ن ، س ثم أوجد الحد الرابع.

(١٥) اكتب الأربعة حدود الأولى من مفكوك $(١ + م س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية وإذا كان معاملا س ، $س^{٢}$ هما ٢٤ ، ٢٥٢ على الترتيب

فأوجد قيمتى : م ، ن وكذلك معامل $س^{٣}$

(١٦) إذا كان معامل $ح_{٤}$ فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية يساوى ٣ أمثال معامل $ح_{٣}$ فى مفكوك $(١ + ص)^{ن-١}$ حسب قوى ص التصاعدية

فما قيمة : ن ؟

(١٧) إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(٢ أ + \frac{١}{س})^{٢ن+١}$ متساويين

وكان أ + س = $\frac{٩}{٤}$ فأوجد قيمة كل من : أ ، س

٩ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان : $(م + س)^{ن} = ٣ أ + ٦ أ س + ٥ أ س^{٢} + ... + س^{ن}$

حيث ن ∈ ط

فأوجد قيمة كل من : م ، ن ، أ

② إذا كان : $(1 + م س)^{10}$ حسب قوى س التصاعدية يساوى

$أ + ب س + حـ س^2 + 15 س^3 + ... + م^{10} س^{10}$

فأوجد قيمة كل من : م ، أ ، ب ، حـ

③ إذا كان : $(1 + حـ س)^{ن} = 1 + 20 س + أ_1 س^2 + أ_2 س^3 + ...$

$+ أ_{ن-1} س^{ن}$ وكان $16 أ_1 = 3 أ_2$ أوجد قيمة كل من : ن ، حـ حيث حـ ≠ ٠ .

④ إذا كان : ن عددًا صحيحًا موجبًا وكان

$(1 + حـ س)^{ن} = 1 + م_1 س + م_2 س^2 + م_3 س^3 + م_4 س^4 + ... + م_ن س^ن$

وكان $م_3 = 12$ ، $م_4 = 4 م_2$ أوجد قيمة كل من : ن ، حـ

⑤ (دور ثان ٢٠١٣) إذا كان : $(أ - س)^{14} = حـ_0 + حـ_1 س + حـ_2 س^2 + حـ_3 س^3$

$+ ..... + حـ_{14} س^{14}$ وكان $4 حـ_4 + 11 (حـ_2 + حـ_3) = 0$ أثبت أن : $أ = 2$

⑥ إذا كان $(1 + س)^{ن} = أ_0 + أ_1 س + أ_2 س^2 + ... + أ_ن س^ن$

أثبت أن : (١) $\frac{أ_1}{أ_0} + 2 \times \frac{أ_2}{أ_1} + 3 \times \frac{أ_3}{أ_2} + ... + ن \frac{أ_ن}{أ_{ن-1}} = \frac{ن}{2} (ن + 1)$

(٢) $أ_0 + 2 أ_1 + 4 أ_2 + 8 أ_3 + ... + 2^ن أ_ن = 3^ن$

⑩ أثبت أن : النسبة بين مجموع الحدين الأوسطين فى مفكوك $(2 س + ص)^7$ والحد الأوسط فى مفكوك $(2 س + ص)^8$ تساوى $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{ص} + \frac{1}{س}\right)$

⑪ أثبت أن : معامل الحد الأوسط فى مفكوك $(س + ص)^{2ن}$ يساوى مجموع معاملى الحدين الأوسطين فى مفكوك $(س + ص)^{2ن-1}$

⑫ فى مفكوك $(أ + ب)^ن$ إذا كان ل هو مجموع الحدود الفردية الرتبة ، م هو مجموع الحدود الزوجية الرتبة فأثبت أن :

(١) $ل^2 - م^2 = (أ^2 - ب^2)^ن$ (٢) $4 ل م = (أ + ب)^{2ن} - (أ - ب)^{2ن}$

⑬ أثبت أن : (١) المقدار $3^{2ن} - 8ن - 1$ يقبل القسمة على ٦٤ باستخدام نظرية ذات الحدين.

(٢) المقدار $3^{2ن} - 1$ يقبل القسمة على ٢٦ باستخدام نظرية ذات الحدين.

⑭ أثبت أن : $\frac{ن ق_ر}{ن - 1 ق_{ر-1}} = \frac{ن}{ر}$ واستخدم ذلك فى إيجاد قيمة س إذا كانت النسبة بين $ح_6$ من مفكوك $\left(س + \frac{1}{س}\right)^{10}$ حسب قوى س التنازلية ، $ح_6$ من مفكوك $\left(س - \frac{1}{س^2}\right)^{14}$ حسب قوى س التنازلية تساوى $\frac{8}{9}$

⑮ أثبت أن : $ن + 2 ق_ر + 1 : ن + 1 ق_ر = (ن + 2) : (ر + 1)$ وإذا كان معامل الحد الثامن فى مفكوك $(1 + س)^{ن+2}$ حسب قوى س التصاعدية يساوى ضعف معامل الحد السابع فى مفكوك $(1 + س)^{ن+1}$ حسب قوى س التصاعدية فأوجد قيمة ن ، إذا كان الحد الرابع فى المفكوك الأول يساوى الحد الثالث فى المفكوك الثانى فأوجد قيمة : س ، $\frac{3}{14}$

مسائل تقيس مهارات التفكير

⑯ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عدد حدود مفكوك : $(1 + 2 س + س^2)^{50}$ يساوى .....

(أ) ١٠١ (ب) ٥٠ (جـ) ٥١ (د) ١٠٠

② عدد حدود مفكوك : $(1 + س)^{101} (1 + س^2 - س)^{100}$ يساوى .....

(أ) ٣٠٢ (ب) ٣٠١ (جـ) ٢٠٢ (د) ١٠١

③ عدد حدود المفكوك : $(س + ص + ع)^{19}$ يساوى .....

(أ) ٢٠ (ب) ٢١ (جـ) ١٧١ (د) ٢١٠

④ إذا كان عدد حدود المفكوك $(س + ص + ع)^ن$ يساوى $(7ن + 1)$

فإن : ن = ... حيث $ن \in ص_+$

(أ) ٩ (ب) ١١ (جـ) ١٣ (د) ١٥

⑤ درجة المقدار $\left(س + (س^3 - 1)^{\frac{1}{2}}\right)^5 + \left(س - (س^3 - 1)^{\frac{1}{2}}\right)^5$ تساوى .....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

⑥ إذا كان : س > ١ وكان $ح_{٢}$ فى مفكوك : $\left(\frac{١}{س} + س^{لو_{٢} س}\right)^{٥}$ يساوى ١٠٠٠

فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) $٥\sqrt{٢}$ (د) ١٠٠

⑦ $١ - ٤ جتا^{٢}\theta + ٦ جتا^{٤}\theta - ٤ جتا^{٦}\theta + جتا^{٨}\theta =$ .....

(أ) $جا^{٨}\theta$ (ب) $جا ٨\theta$ (جـ) $جتا^{٨}\theta$ (د) $جتا^{١٦}\theta$

⑧ عدد الحدود الصحيحة فى مفكوك : $\left(\sqrt{٣} + \sqrt[٨]{٥}\right)^{٢٥٦}$ هو .....

(أ) ٣٢ (ب) ٣٣ (جـ) ٣٤ (د) ٣٥

⑨ إذا كان : $(١ + س - ٢س^{٢})^{٦} = ١ + أ_{١} س + أ_{٢} س^{٢} + ... + أ_{١٢} س^{١٢}$

فإن : $أ_{٢} + أ_{٤} + أ_{٦} + ... + أ_{١٢} =$ .....

(أ) ٣١ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ٦٣

⑩ معامل الحد الأوسط فى مفكوك : $(١٦ + ٣٢ س + ٢٤ س^{٢} + ٨ س^{٣} + س^{٤})^{٥}$

يساوى .....

(أ) $^{٢٠}ق_{١١}$ (ب) $^{٢٢}ق_{١١}$ (جـ) $٦٤ \, ^{١٥}ق_{٨}$ (د) $١٠٢٤ \, ^{٢٠}ق_{١٠}$

⑪ معامل $ح_{١٢}$ فى مفكوك : $\sum_{ر=٠}^{٥٠} \, ^{٥٠}ق_{ر} \, (س - ١)^{٥٠ - ر} \times ٢^{ر}$ يساوى .....

(أ) $^{٥٠}ق_{١٢}$ (ب) $^{٥٠}ق_{١٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

⑫ إذا كان : $ت^{٢} = -١$ ، $س + ص ت = \left(\sqrt{٣} + \frac{ت}{٢}\right)^{٥} + \left(\sqrt{٣} - \frac{ت}{٢}\right)^{٥}$

فإن .....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠

(جـ) س > ٠ ، ص > ٠ (د) س > ٠ ، ص < ٠

⑬ $^{١٠}ق_{٠} + \frac{١}{٢} \, ^{١٠}ق_{١} + \frac{١}{٣} \, ^{١٠}ق_{٢} + \frac{١}{٤} \, ^{١٠}ق_{٣} + ... + \frac{١}{١١} \, ^{١٠}ق_{١٠} =$ .....

(أ) $٢^{١}$ (ب) $٢^{٥٥}$

(جـ) $\frac{١}{١١}\left[(٢)^{١١} - ١\right]$ (د) $\frac{٣}{١٠}(٢)^{١٠}$

⑭ فى مفكوك $(١ + س)^{٥٩}$ حسب قوى س التصاعدية مجموع معاملات الـ ٣٠ حدًا الأخيرة يساوى .....

(أ) $٢^{٢٩}$ (ب) $٢^{٢٨}$ (جـ) $٢^{٥٨}$ (د) $٢^{٥٩}$

⑮ إذا كان الحد الأوسط فى مفكوك $\left(\frac{١}{س} + س \, جا س\right)^{١٠}$ يساوى $٧\frac{٧}{٨}$

فإن : س = ...

(أ) $٢ن\pi + (-١)^{ن} \times \frac{\pi}{٦}$ (ب) $ن\pi + (-١)^{ن} \times \frac{\pi}{٦}$

(جـ) $ن\pi + \frac{\pi}{٦}$ (د) $ن\pi + (-١)^{ن} \times \frac{\pi}{٣}$

---

⑰ أثبت أن : الحد الأوسط فى مفكوك $(١ + س)^{٢ن}$

يساوى $\frac{١ \times ٣ \times ٥ \times .... \times (٢ن - ١)}{١ \times ٢ \times ٣ \times .... \times ن} (٢ س)^{ن}$

---

⑱ أوجد مفكوك : $\left(أ + \sqrt{ب}\right)^{٢ن} + \left(أ - \sqrt{ب}\right)^{٢ن}$ حيث أ ، ب ، ن $\in ص_{+}$ ، ن عدد زوجى ثم أوجد الحد الأوسط لهذا المفكوك فى أبسط صورة.

وإذا كان : أ = ٥ ، ب = ٢٠ فأثبت أن : $\left(أ + \sqrt{ب}\right)^{٢ن} + \left(أ - \sqrt{ب}\right)^{٢ن}$

يقبل القسمة على ٥

---

⑲ أثبت أن : $(^{ن}ق_{٠})^{٢} + (^{ن}ق_{١})^{٢} + (^{ن}ق_{٢})^{٢} + ... + (^{ن}ق_{ن})^{٢} = \frac{|\underline{٢ن}}{(|\underline{ن})^{٢}}$

مستخدمًا مفكوك $(١ + س)^{٢ن}$

---

⑳ إذا كان مجموع معاملات الحدود ذات القوى الزوجية فى حاصل الضرب

$(١ - س + س^{٢} - س^{٣} + ... + س^{٢ن})(١ + س + س^{٢} + ... + س^{٢ن})$

يساوى ٦١ فأوجد قيمة ن

㉑ أثبت أن :

① $^{٢٥}ق_{٠} \, ^{٢٥}ق_{١٠} + ^{٢٥}ق_{١} \, ^{٢٥}ق_{١١} + ^{٢٥}ق_{٢} \, ^{٢٥}ق_{١٢} + ... + ^{٢٥}ق_{١٥} \, ^{٢٥}ق_{٢٥} = ^{٥٠}ق_{١٥}$

② $^{٢٥}ق_{٠} \, ^{٢٥}ق_{٥} - ^{٢٥}ق_{١} \, ^{٢٥}ق_{٦} + ^{٢٥}ق_{٢} \, ^{٢٥}ق_{٧} - ..... + ^{٢٥}ق_{٢٠} \, ^{٢٥}ق_{٢٥} = ^{٢٥}ق_{١٠}$

الدرس 4

إيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ من مفكوك ذات الحدين

فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية لإيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ نتبع ما يلى:

① نوجد $ح_{ر+١}$ فى أبسط صورة له لتحديد أس المتغير س بدلالة ر

② نساوى أس المتغير س الناتج فى $ح_{ر+١}$ بالأس المطلوب ك للحصول على قيمة ر ومنها نحدد الحد الذى يحتوى على $س^{ك}$ وهو $ح_{ر+١}$

③ نوجد الحد المشتمل على $س^{ك}$ بالتعويض عن قيمة ر التى حصلنا عليها فى $ح_{ر+١}$

ملاحظة

① إذا كانت قيمة ر التى حصلنا عليها لاتنتمى إلى مجموعة الأعداد الطبيعية فإن هذا يدل على أنه لا يوجد حد مشتمل على $س^{ك}$ المطلوبة.

② إذا كان المطلوب إيجاد الحد الخالى من س فنعتبر أن المطلوب إيجاد الحد المشتمل على $س^{٠}$ أى نساوى أس المتغير س فى $ح_{ر+١}$ بالصفر ونوجد قيمة ر

مثال ①

أوجد الحد الذى يشتمل على $س^{٨}$ فى مفكوك : $\left(٢س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية.

الحل

نفرض أن الحد الذى يشتمل على $س^{٨}$ هو $ح_{ر+١}$

، $\because ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} (٢س^{٢})^{١٠-ر} = {}^{١٠}ق_{ر} \times س^{-ر} \times ٢^{١٠-ر} \times س^{٢٠-٢ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر} \times ٢^{١٠-ر} \times س^{٢٠-٣ر}$

$\therefore$ نضع $٢٠ - ٣ر = ٨$ $\therefore ٣ر = ١٢$

$\therefore ر = ٤$ $\therefore ح_{٥}$ هو الحد الذى يشتمل على $س^{٨}$

$\therefore ح_{٥} = {}^{١٠}ق_{٤} \times ٢^{١٠-٤} \times س^{٢٠-٣(٤)} = ١٣٤٤٠ س^{٨}$

مثال ②

أوجد معامل $س^{-٦}$ فى مفكوك : $\left(\frac{س}{٣} - \frac{٣}{٢س}\right)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية.

الحل

نفرض أن الحد المشتمل على $س^{-٦}$ هو $ح_{ر+١}$

$\because ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} \left(\frac{-٣}{٢س}\right)^{ر} \left(\frac{س}{٣}\right)^{٨-ر}$

$= {}^{٨}ق_{ر} \left(\frac{-٣}{٢}\right)^{ر} \times س^{-ر} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٨-ر} \times س^{٨-ر}$

$= {}^{٨}ق_{ر} \times \left(\frac{-٣}{٢}\right)^{ر} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٨-ر} \times س^{٨-٢ر}$

$\therefore$ نضع $٨ - ٢ر = -٦$ $\therefore ٢ر = ١٤$

$\therefore ر = ٧$ $\therefore ح_{٨}$ هو الحد الذى يشتمل على $س^{-٦}$

، $\because ح_{٨} = {}^{٨}ق_{٧} \times \left(\frac{-٣}{٢}\right)^{٧} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{١} \times س^{-٦} = \frac{-٧٢٩}{١٦} س^{-٦}$

$\therefore$ معامل $س^{-٦}$ يساوى $\frac{-٧٢٩}{١٦}$

مثال ③

أوجد الحد الخالى من س فى مفكوك : $\left(س + \frac{١}{٤س^{٣}}\right)^{١٦}$ حسب قوى س التنازلية.

الحل

$\because ح_{ر+١} = {}^{١٦}ق_{ر} \left(\frac{١}{٤س^{٣}}\right)^{ر} (س)^{١٦-ر}$

$= {}^{١٦}ق_{ر} \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{ر} \times س^{-٣ر} \times س^{١٦-ر}$

$= {}^{١٦}ق_{ر} \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{ر} \times س^{١٦-٤ر}$

بوضع : $١٦ - ٤ر = ٠$ لإيجاد الحد المشتمل على $س^{٠}$ (الحد الخالى من س)

$\therefore ٤ر = ١٦$ $\therefore ر = ٤$ $\therefore ح_{٥}$ هو الحد الخالى من س

، $\because ح_{٥} = {}^{١٦}ق_{٤} \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{٤} \times س^{٠} = ١٨٢٠ \times \frac{١}{٢٥٦} = \frac{٤٥٥}{٦٤}$

مثال ٤

أوجد معامل $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٩}$ فى مفكوك : $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية.

الحل

$\because$ ح$_{\text{ر}+١}$ = ^{١٥}ق$_{\text{ر}}$ $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)^{\text{ر}}$ $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{١٥-\text{ر}}$ = ^{١٥}ق$_{\text{ر}}$ $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{-\text{ر}}$ $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{١٥-\text{ر}}$

= ^{١٥}ق$_{\text{ر}}$ $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{١٥-٢\text{ر}}$

، بوضع ١٥ − ٢ر = ٩ ⟵ ر = ٣ $\therefore$ ح$_{٤}$ هو الحد المشتمل على $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٩}$

$\therefore$ ح$_{٤}$ = ^{١٥}ق$_{٣}$ $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{١٥-٢(٣)}$ = ٤٥٥ $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٩}$

$\therefore$ معامل الحد المشتمل على $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٩}$ هو ٤٥٥

مثال ٥

أوجد الحد المشتمل على س^{٤} فى المقدار : $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{١٢} - \left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{١٢}$

الحل

نبحث عن الحد المشتمل على س^{٤} فى مفكوك كلٍ من المقدارين :

$\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{١٢}$ ، $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{١٢}$

أولاً : بالنسبة لمفكوك : $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{١٢}$:

ح$_{\text{ر}+١}$ = ^{١٢}ق$_{\text{ر}}$ $\left(\frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{\text{ر}}$ $(\text{س}^{٢})^{١٢-\text{ر}}$ = ^{١٢}ق$_{\text{ر}}$ س$^{-٢\text{ر}}$ × س$^{٢٤-٢\text{ر}}$

= ^{١٢}ق$_{\text{ر}}$ × س$^{٢٤-٤\text{ر}}$

$\therefore$ ٢٤ − ٤ر = ٤ $\therefore$ ٤ر = ٢٠

$\therefore$ ر = ٥

$\therefore$ ح$_{٦}$ = ^{١٢}ق$_{٥}$ س^{٤} $\therefore$ الحد المشتمل على س^{٤} هو ح$_{٥+١}$ أى ح$_{٦}$

ثانيًا : بالنسبة لمفكوك : $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{١٢}$:

ح$_{\text{ر}+١}$ = ^{١٢}ق$_{\text{ر}}$ $\left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ر}}$ (س)$^{١٢-\text{ر}}$ = ^{١٢}ق$_{\text{ر}}$ س$^{-\text{ر}}$ × س$^{١٢-\text{ر}}$

= ^{١٢}ق$_{\text{ر}}$ × س$^{١٢-٢\text{ر}}$

$\therefore$ ١٢ − ٢ر = ٤ $\therefore$ ٢ر = ٨

$\therefore$ ر = ٤ $\therefore$ الحد المشتمل على س^{٤} هو ح$_{٤+١}$ أى ح$_{٥}$

$\therefore$ ح$_{٥}$ = ^{١٢}ق$_{٤}$ س^{٤} (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore$ الحد المشتمل على س^{٤} فى المقدار المعطى = ^{١٢}ق$_{٥}$ س^{٤} − ^{١٢}ق$_{٤}$ س^{٤} = ٢٩٧ س^{٤}

مثال ٦

أوجد معامل س^{١٤} فى مفكوك : ٣٢ س^{٤} $\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{٢}{\text{س}^{٣}}\right)^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية.

الحل

ح$_{\text{ر}+١}$ = ٣٢ س^{٤} × ^{١٥}ق$_{\text{ر}}$ $\left(\frac{٢}{\text{س}^{٣}}\right)^{\text{ر}}$ $\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right)^{١٥-\text{ر}}$

= ٣٢ س^{٤} × ^{١٥}ق$_{\text{ر}}$ (٢)^{ر} $\left(\frac{١}{٢}\right)^{١٥-\text{ر}}$ × س$^{-٣\text{ر}}$ × س$^{٣٠-٢\text{ر}}$

= ٣٢ × ^{١٥}ق$_{\text{ر}}$ (٢)^{ر} $\left(\frac{١}{٢}\right)^{١٥-\text{ر}}$ × س$^{٤-٣\text{ر}+٣٠-٢\text{ر}}$

= ٣٢ × ^{١٥}ق$_{\text{ر}}$ (٢)^{ر} $\left(\frac{١}{٢}\right)^{١٥-\text{ر}}$ × س$^{٣٤-٥\text{ر}}$

وللحصول على معامل س^{١٤} نضع ٣٤ − ٥ر = ١٤ $\therefore$ ر = ٤

$\therefore$ معامل س^{١٤} = ٣٢ × ^{١٥}ق$_{٤}$ (٢)^{٤} $\left(\frac{١}{٢}\right)^{١١}$ = $\frac{١٣٦٥}{٤}$

حل آخر :

فى مفكوك : ٣٢ س^{٤} $\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{٢}{\text{س}^{٣}}\right)^{١٥}$

الحد المشتمل على $س^{١٤}$ يساوى ٣٢ $س^{٤}$ × الحد المشتمل على $س^{١٠}$ لذلك نوجد الحد المشتمل على $س^{١٠}$ فى مفكوك $\left(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{س^{٣}}\right)^{١٥}$ وليكن $ح_{ر+١}$ حيث :

$$ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر} \left(\frac{٢}{س^{٣}}\right)^{ر} \left(\frac{س^{٢}}{٢}\right)^{١٥-ر}$$

$$= {}^{١٥}ق_{ر} (٢)^{ر} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٥-ر} \times س^{-٣ر} \times س^{٣٠-٢ر}$$

$$\therefore ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر} (٢)^{ر} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٥-ر} \times س^{٣٠-٥ر}$$

$\therefore$ ٣٠ − ٥ ر = ١٠ $\qquad \therefore$ ر = ٤

$\therefore$ معامل $س^{١٠}$ = ${}^{١٥}ق_{٤} (٢)^{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١١}$

$\therefore$ معامل $س^{١٤}$ = ٣٢ × ${}^{١٥}ق_{٤} (٢)^{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١١} = \frac{١٣٦٥}{٤}$

مثال ٧

أثبت أن مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{٢}{س^{٣}}\right)^{١١}$ لا يحتوى على حد خال من س كما لا يحتوى على حد مشتمل على $س^{٣}$ ولكنه يحتوى على حد يشتمل على $س^{-٣}$

الحل

$$\because ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر} \left(\frac{٢}{س^{٣}}\right)^{ر} (س^{٢})^{١١-ر}$$

$$= {}^{١١}ق_{ر} (٢)^{ر} س^{-٣ر} \times س^{٢٢-٢ر}$$

$$\therefore ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر} (٢)^{ر} \times س^{٢٢-٥ر}$$

إذا كان المفكوك يحتوى على حد خالٍ من س فيجب أن يكون : ٢٢ − ٥ ر = ٠

أى : ٥ ر = ٢٢

، $\because$ ر يجب أن تكون عددًا طبيعيًا. $\qquad$ أى : ر = $٤\frac{٢}{٥}$

$\therefore$ لا يوجد حد خالٍ من س فى هذا المفكوك

وإذا كان المفكوك يحتوى على حد يشتمل على $س^{٣}$ فيجب أن يكون : ٢٢ − ٥ ر = ٣

أى : ٥ ر = ١٩ $\qquad \therefore$ ر = $٣\frac{٤}{٥}$

، $\because$ ر يجب أن تكون عددًا طبيعيًا.

$\therefore$ لا يوجد حد يشتمل على $س^{٣}$ فى هذا المفكوك

وإذا كان المفكوك يحتوى على حد يشتمل على $س^{-٣}$ فيجب أن يكون : ٢٢ − ٥ ر = −٣

أى : ٥ ر = ٢٥ $\qquad \therefore$ ر = ٥

$\therefore$ المفكوك يحتوى على حد يشتمل على $س^{-٣}$ هو $ح_{٥+١}$ أى $ح_{٦}$

مثال ٨

إذا كان مفكوك $\left(س^{٤} + \frac{١}{س^{٣}}\right)^{ن}$ يحتوى على حد خالٍ من س

فأثبت أن : ن = ٧ أو مضاعفًا للعدد ٧ وأوجد الحد الخالى من س عندما ن = ٧

الحل

$$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \left(\frac{١}{س^{٣}}\right)^{ر} (س^{٤})^{ن-ر}$$

$$= {}^{ن}ق_{ر} س^{-٣ر} \times س^{٤ن-٤ر} = {}^{ن}ق_{ر} س^{٤ن-٧ر}$$

، $\because$ المفكوك يحتوى على حد خالٍ من س

$\therefore$ ٤ ن − ٧ ر = ٠

، $\because$ ر يجب أن تكون عددًا طبيعيًا. $\qquad \therefore$ ر = $\frac{٤ن}{٧}$

$\therefore$ ن = ٧ أو مضاعفات العدد ٧ $\qquad \therefore$ ن يجب أن تقبل القسمة على ٧

وعندما ن = ٧ تكون ر = $\frac{٤ \times ٧}{٧}$ = ٤ $\qquad$ أى يكون الحد الخالى من س هو $ح_{٤+١}$ أى $ح_{٥}$

ويكون $ح_{٥}$ = ${}^{٧}ق_{٤}$ = ٣٥

أى أن : الحد الخالى من س = ٣٥

مثال ٩

في مفكوك : $\left(\text{س}^{\text{ك}} + \frac{1}{\text{س}}\right)^{12}$ حيث ك ∈ ص$^+$ أوجد :

① قيم ك التي تجعل للمفكوك حداً خالياً من س

② النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل الحد الأوسط وذلك لأكبر قيم ك التي حصلت عليها من أولاً.

الحل

① نفرض أن الحد الخالي من س هو $\text{ح}_{\text{ر}+1}$

$\therefore \text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{12}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} (\text{س}^{\text{ك}})^{12-\text{ر}} = {}^{12}\text{ق}_{\text{ر}} \times \text{س}^{-\text{ر}} \times \text{س}^{12\text{ك}-\text{ك}\text{ر}}$

$\therefore \text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{12}\text{ق}_{\text{ر}} \times \text{س}^{12\text{ك}-\text{ك}\text{ر}-\text{ر}}$

ولكي يكون هذا الحد خالٍ من س $\therefore 12\text{ك} - \text{ك}\text{ر} - \text{ر} = 0$

$\therefore 12\text{ك} = \text{ك}\text{ر} + \text{ر}$ $\therefore 12\text{ك} = \text{ر}(\text{ك}+1)$

$\therefore \text{ر} = \frac{12\text{ك}}{\text{ك}+1}$ ، $\because \text{ر} \in \text{ط}$ ، ك + ١ لا يمكن أن يكون قاسم من قواسم ك

$\therefore$ ك + ١ قاسم من قواسم العدد ١٢

$\therefore$ ك + ١ = ١ ومنها ك = ٠ (مرفوضة لأن ك ∈ ص$^+$)

، ك + ١ = ٢ ومنها ك = ١

، ك + ١ = ٣ ومنها ك = ٢

، ك + ١ = ٤ ومنها ك = ٣

، ك + ١ = ٦ ومنها ك = ٥

، ك + ١ = ١٢ ومنها ك = ١١

② $\because$ أكبر قيمة لـ ك = ١١ ، وذلك عند ر = ١١

$\therefore$ الحد الخالي من س هو $\text{ح}_{12} = {}^{12}\text{ق}_{11} = {}^{12}\text{ق}_{1} = 12$

، الحد الأوسط = $\text{ح}_{\frac{12}{2}+1} = \text{ح}_{7}$

$\therefore \frac{\text{الحد الخالي من س}}{\text{معامل الحد الأوسط}} = \frac{12}{924} = \frac{1}{77}$ $\therefore$ معامل الحد الأوسط = ${}^{12}\text{ق}_{6} = 924$

مثال ١٠

أوجد : ① معامل س^2 في حاصل ضرب $(1 - 2\text{س})^5 (1 + \text{س})^{10}$

② معامل س^2 في مفكوك $(1 + \text{س} - 2\text{س}^2)^8$

الحل

① بفرض أن : الحد العام في مفكوك $(1 - 2\text{س})^5$ هو $\text{ح}_{\text{أ}+1}$

، الحد العام في مفكوك $(1 + \text{س})^{10}$ هو $\text{ح}_{\text{ب}+1}$

$\therefore \text{ح}_{\text{أ}+1} = {}^{5}\text{ق}_{\text{أ}} (-2\text{س})^{\text{أ}} = {}^{5}\text{ق}_{\text{أ}} \times (-2)^{\text{أ}} \times \text{س}^{\text{أ}}$

، $\text{ح}_{\text{ب}+1} = {}^{10}\text{ق}_{\text{ب}} \text{س}^{\text{ب}}$

$\therefore \text{ح}_{\text{أ}+1} \times \text{ح}_{\text{ب}+1} = {}^{5}\text{ق}_{\text{أ}} \times {}^{10}\text{ق}_{\text{ب}} \times (-2)^{\text{أ}} \times \text{س}^{\text{أ}+\text{ب}}$

$\therefore$ معامل الحد المشتمل على س^2 = ${}^{5}\text{ق}_{\text{أ}} \times {}^{10}\text{ق}_{\text{ب}} \times (-2)^{\text{أ}}$

لكل أ ، ب ∈ ط ، أ + ب = ٢

أي أن :

أ	٠	١	٢
ب	٢	١	٠

$\therefore$ معامل س^2 في حاصل الضرب = ${}^{5}\text{ق}_{0} \times {}^{10}\text{ق}_{2} \times (-2)^{0}$

$+ {}^{5}\text{ق}_{1} \times {}^{10}\text{ق}_{1} \times (-2)^{1}$

$+ {}^{5}\text{ق}_{2} \times {}^{10}\text{ق}_{0} \times (-2)^{2}$

$= 45 + (-100) + 40 = -15$

حل آخر :

$(1 - 2\text{س})^5 (1 + \text{س})^{10}$

$= \left(1 + {}^{5}\text{ق}_{1}(-2\text{س})^{1} + {}^{5}\text{ق}_{2}(-2\text{س})^{2} + {}^{5}\text{ق}_{3}(-2\text{س})^{3} + \dots + {}^{5}\text{ق}_{5}(-2\text{س})^{5}\right)$

$\times \left(1 + {}^{10}\text{ق}_{1}\text{س} + {}^{10}\text{ق}_{2}\text{س}^{2} + {}^{10}\text{ق}_{3}\text{س}^{3} + \dots + {}^{10}\text{ق}_{10}\text{س}^{10}\right)$

∴ الحد المشتمل على $س^{٢}$

$= ١ \times {}^{١٠}ق_{٢}\, س^{٢} + {}^{٥}ق_{١}\, (-٢ س) \times {}^{١٠}ق_{١}\, س + {}^{٥}ق_{٢}\, (-٢ س)^{٢} \times ١$

$= ٤٥ س^{٢} + ٥ \times (-٢ س) \times ١٠ \times س + ١٠ \times ٤ س^{٢}$

$= ٤٥ س^{٢} - ١٠٠ س^{٢} + ٤٠ س^{٢} = -١٥ س^{٢}$

∴ معامل الحد المشتمل على $س^{٢} = -١٥$

(٢) المفكوك : $(١ + س(١ - ٢ س))^{٨}$ ويفرض أن الحد العام فيه هو

$ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر}\, (س(١ - ٢ س))^{ر} = {}^{٨}ق_{ر}\, س^{ر}\, (١ - ٢ س)^{ر}$

ويفرض أن : $ح_{ر+١}$ هو الحد العام من مفكوك $(١ - ٢ س)^{ر}$

∴ $ح_{ر+١} = {}^{ر}ق_{هـ}\, (-٢ س)^{هـ} = {}^{ر}ق_{هـ}\, (-٢)^{هـ}\, س^{هـ}$

∴ $ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر}\, {}^{ر}ق_{هـ}\, (-٢)^{هـ} . س^{هـ+ر}$ حيث : $٠ \le هـ \le ر \le ٨$

في معامل الحد المشتمل على $س^{٢}$ يكون $هـ + ر = ٢$ أي أن :

هـ	٠	١
ر	٢	١

معامل الحد المشتمل على $س^{٢} = {}^{٨}ق_{٢}\, {}^{٢}ق_{٠}\, (-٢)^{٠} + {}^{٨}ق_{١}\, {}^{١}ق_{١}\, (-٢)^{١}$

$= ٢٨ + (-١٦) = ١٢$

حل آخر :

$(١ + س - ٢ س^{٢})^{٨} = [١ + (س - ٢ س^{٢})]^{٨}$

$= ١ + {}^{٨}ق_{١}\, (س - ٢ س^{٢}) + {}^{٨}ق_{٢}\, (س - ٢ س^{٢})^{٢} + ...$

∴ معامل $س^{٢} = {}^{٨}ق_{١}\, (-٢) + {}^{٨}ق_{٢} = -١٦ + ٢٨ = ١٢$

تمارين 4

على إيجاد الحد المشتمل على $س^{هـ}$ من مفكوك ذات الحدين

اختبار تفاعلي

• مهم • صعب • مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد :

(١) معامل $س^{٨}$ في مفكوك : $\left(س + \frac{٢}{س^{٢}}\right)^{١٤}$ «٣٦٤»

(٢) معامل س في مفكوك : $\left(\frac{٣ س}{٢} + \frac{٢}{٣ س}\right)^{١١}$ «٦٩٣»

(٣) الحد المشتمل على $س^{-٨}$ في مفكوك : $\left(س - \frac{١}{٢ س^{٢}}\right)^{١٢}$ «$-\frac{٩٩}{٤} س^{-٨}$»

(٤) الحد الخالي من س في مفكوك : $\left(٢ س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{١٢}$ «٧٩٢٠»

(٥) معامل $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٤}$ في مفكوك : $\left(\frac{٢ س}{ص} + \frac{ص}{٢ س}\right)^{١٠}$ «١٩٢٠»

(٦) معامل $س^{١٢}$ من مفكوك : $س^{٢}\left(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{س^{٢}}\right)^{١٥}$ «$\frac{٣٠٠٣}{٣٢}$»

(٧) معامل $\frac{١}{س^{٥}}$ في مفكوك : $\frac{١}{س^{٣}}\left(س + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{١٠}$ «٢١٠»

(٨) معامل $س^{٩}$ في مفكوك

$[(٢ + س)^{١١} + ١١ (٢ + س)^{١٠} (١ + س) + \frac{١٠ \times ١١}{١ \times ٢} (٢ + س)^{٩} (١ + س)^{٢}$

$+ ..... + (١ + س)^{١١}]$ «٢٥٣٤٤٠»

(٩) الحد الذي يشتمل على $س^{٦}$ في مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{١٥} + \left(س + \frac{١}{س}\right)^{١٠}$

«$٥٠٥٠ س^{٦}$»

(١٠) قيمة الحد الخالي من س في مفكوك : $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٦} - \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٦}$ «٤٠»

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) معامل الحد الذي يحتوي على $س^{٣}$ في مفكوك : $(١ + س)^{١٠}$

حسب قوى س الصاعدية يساوي .....

(أ) ${}^{١٠}ق_{٢}$ (ب) ${}^{١٠}ق_{٣}$ (جـ) ${}^{١٠}ق_{٤}$ (د) ٣

② الحد الخالى من س فى مفكوك : $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٨}$ يساوى .....

(أ) ٧٠ (ب) −٧٠ (ج) ٥٦ (د) −٥٦

③ (دور أول ٢٠١٧) الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية هو .....

(أ) $\text{ح}_{٢}$ (ب) $\text{ح}_{٧}$ (ج) $\text{ح}_{٦}$ (د) $\text{ح}_{٤}$

④ معامل $\text{س}^{٤}$ فى مفكوك $\left(\frac{\text{س}}{٢} - \frac{٣}{\text{س}^{٢}}\right)^{١٠}$ هو .....

(أ) $\frac{٤٠٥}{٢٥٦}$ (ب) $\frac{٤٠٥}{٢٥٩}$ (ج) $\frac{٤٥٠}{٢٦٣}$ (د) لا شئ مما سبق

⑤ معامل س فى مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{\text{أ}}{\text{س}}\right)^{٥}$ هو .....

(أ) $٩\text{أ}^{٢}$ (ب) $١٠\text{أ}^{٢}$ (ج) $١٠\text{أ}^{٣}$ (د) ١٠أ

⑥ إذا كان الحد الخالى من س فى مفكوك : $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية هو $\text{ح}_{٤}$ فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ١٠ (د) ١٢

⑦ إذا كان الحد الخالى من س فى مفكوك : $\left(\frac{\text{أ}}{\text{س}^{٢}} + \text{س}\right)^{٩}$ هو ٦٧٢

فإن : أ = ...

(أ) ٨ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

⑧ إذا كان الحد المطلق فى مفكوك $\left(\sqrt{\text{س}} - \frac{\text{ك}}{\text{س}^{٢}}\right)^{١٠}$ يساوى ٤٠٥

فإن : ك = ...

(أ) ±١ (ب) ±٢ (ج) ±٣ (د) لا شئ مما سبق.

⑨ من مفكوك : $\text{س}^{٢}(١ + \text{س})^{٨}$ يكون معامل الحد المشتمل على $\text{س}^{٥}$ هو .....

(أ) ٨ (ب) ٢٨ (ج) ٥٦ (د) ٧٠

⑩ فى مفكوك : $(١ + \text{س})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $\text{س}^{٥}$ يساوى معامل $\text{ح}_{١٠}$ فإن : ن = ...

(أ) ٩ (ب) ٥ (ج) ١٤ (د) ٤

⑪ من مفكوك : $\left(\text{أ س} + \frac{١}{\text{ب س}}\right)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالى من س يساوى معامل الحد السابع فإن : .....

(أ) $\text{أ ب} = \frac{٦}{٥}$ (ب) $\text{أ ب} = \frac{٥}{٦}$ (ج) $\text{أ ب} = \frac{٣٦}{٢٥}$ (د) $\text{أ ب} = \frac{٢٥}{٣٦}$

⑫ إذا كان : معاملا $\text{س}^{٣}$ ، $\text{س}^{٦}$ فى مفكوك $\left(\text{أ س}^{٢} + \frac{١}{\text{أ س}}\right)^{٩}$ متساويين فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (ج) ±١ (د) ±٢

⑬ فى مفكوك : $\left(٢ + \frac{\text{س}}{٣}\right)^{\text{ن}}$ إذا كان معاملا $\text{س}^{٧}$ ، $\text{س}^{٨}$ متساويين فإن : ن = ...

(أ) ٥٦ (ب) ٥٥ (ج) ٤٥ (د) ١٥

⑭ فى مفكوك $\left(\sqrt[٣]{\text{س}} - \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\right)^{٩}$ الحد الخالى من س يساوى .....

(أ) ٨٤ (ب) −٨٤ (ج) ٨,٤ (د) −٨٤,٠

⑮ فى مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{٥\text{س}}\right)^{٣\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية رتبة الحد الخالى من س هى .....

(أ) ٣ن − ١ (ب) ٣ن + ١ (ج) ٢ن − ١ (د) ٢ن + ١

⑯ (دور أول ٢٠٢١) الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(\text{س}^{٥} - \frac{\text{ك}}{\text{س}^{٢}}\right)^{٧\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية حيث ك ، ن ∈ ص+ هو .....

(أ) $\text{ح}_{٥\text{ن}}$ (ب) $\text{ح}_{٥\text{ن}+١}$ (ج) $\text{ح}_{٦\text{ن}+١}$ (د) $\text{ح}_{٦\text{ن}-١}$

⑰ (دور أول ٢٠٢١) فى مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + ٢ + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٦}$ معامل الحد الذى يشتمل على $\text{س}^{٢}$ هو .....

(أ) $\text{ق}_{٥}^{١٢}$ (ب) $\text{ق}_{٦}^{١٢}$ (ج) $\text{ق}_{٢}^{١٢}$ (د) $\text{ق}_{٥}^{٦}$

⑱ معاملا $\text{س}^{\text{ن}}$ ، $\text{س}^{\text{م}}$ فى مفكوك $(١ + \text{س})^{\text{م}+\text{ن}}$ .....

(أ) متساويان. (ب) متساويان ومختلفان فى الإشارة.

(ج) أحدهما معكوس ضربى للآخر. (د) أحدهما ضعف الآخر.

⑲ إذا كان : ٠ ≤ ك ≤ ن فإن معامل $\text{س}^{\text{ك}}$ فى مفكوك :

$١ + (١ + \text{س}) + (١ + \text{س})^{٢} + (١ + \text{س})^{٣} + \ldots + (١ + \text{س})^{\text{ن}}$ هو .....

(أ) $\text{ق}_{\text{ك}+١}^{\text{ن}+١}$ (ب) $\text{ق}_{\text{ك}}^{\text{ن}}$ (ج) $\text{ق}_{\text{ن}+\text{ك}}^{\text{ن}+١}$ (د) $\text{ق}_{\text{ن}-\text{ك}+١}^{\text{ن}}$

(٢٠) قيمة الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢ن} + \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٢ن}$ يساوى ..... (حيث ن عدد صحيح فردى)

(أ) صفر (ب) $-٢\,ق_{ن}^{٢ن}$ (ج) $٢\,ق_{ن}^{٢ن}$ (د) $٢\,ق_{ن}^{ن}$

(٢١) معامل $س^{٩}$ فى مفكوك $(١ + ٣س + ٣س^{٢} + س^{٣})^{١٥}$ يساوى .....

(أ) $ق_{٩}^{١٥}$ (ب) $ق_{٨}^{١٥}$ (ج) $ق_{٧}^{١٥}$ (د) $ق_{٨}^{١٥}$

(٢٢) معامل $س^{٤}$ فى مفكوك $(١ + س + س^{٢} + س^{٤})^{١٠}$ يساوى .....

(أ) $ق_{٤}^{١٠}$ (ب) $ق_{٦}^{١٠}$ (ج) ٣١٠ (د) ٢١٠

٣ إذا كان $ح_{ن}$ فى مفكوك : $\left(٢س - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية خالٍ من س فأوجد قيمة : ن

«١٢»

٤ أوجد قيمة ل التى تجعل معامل $س^{١٥}$ = معامل $س^{٥}$ فى مفكوك : $\left(٢س^{٢} + \frac{ل}{س^{٢}}\right)^{١٠}$ حيث ل موجبة.

«$\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$»

٥ أوجد فى مفكوك : $\left(\frac{٢س}{٣} + \frac{٣}{٢س^{٢}}\right)^{١٢}$ كلًا من :

(١) الحد الأوسط. (٢) الحد المشتمل على $س^{٣}$ «٩٢٤ $س^{-٦}$ ، $\frac{١٤٠٨٠}{٧٢٩}$ $س^{٣}$»

٦ فى مفكوك : $\left(٩س^{٢} + \frac{١}{٣س}\right)^{٩}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س ، ثم أثبت أن الحدين الأوسطين متساويان عندما س = $\frac{١}{٣}$

«١٤٠»

٧ أثبت أنه لا يوجد حد يشتمل على $س^{٧}$ فى مفكوك : $\left(س^{٢} - \frac{٣}{س^{٦}}\right)^{٦}$

٨ فى مفكوك : $\left(\frac{س}{٢} - \frac{٢}{س^{٣}}\right)^{١٠}$ أثبت أنه : لا يوجد حد خالٍ من س ثم أوجد : معامل $\frac{١}{س^{٢}}$

«$-\frac{١٥}{٢}$»

٩ (دور أول ٢٠١٠) فى مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{٨س}\right)^{١٣}$ حسب قوى س التنازلية :

(١) أثبت أنه : لا يوجد حد يشتمل على س

(٢) إذا كان الحدان الرابع والحادى عشر متساويين فأوجد قيمة : س

«$\frac{١}{٣}$»

١٠ (دور أول ٢٠٠٨) فى مفكوك : $\left(\frac{٥}{س} + س\right)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية :

(١) أثبت أن : الحد الخالى من س هو الحد الأوسط وأوجد قيمته.

(٢) أوجد : قيمة س التى تجعل النسبة بين الحدين الثالث والسابع كنسبة ١ : ١٦

«٤٣٧٥٠ ، $\pm\sqrt{١٠}$»

١١ فى مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{١٥}$ أوجد النسبة بين الحد الخالى من س ومجموع معاملى الحدين الأوسطين.

«$\frac{٧}{٣٠}$»

١٢ فى مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{أ س}\right)^{٨}$ إذا كان معامل الحد الأوسط يساوى معامل $س^{١٠}$ فأوجد قيمة : أ

«$\frac{\pm\sqrt{١٠}}{٢}$»

١٣ من مفكوك : $\left(٤س^{٢} + \frac{١}{٢س}\right)^{١٣}$ أوجد معامل $س^{٥}$ ثم أوجد قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين من هذا المفكوك متساويين ثم أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س فى هذا المفكوك.

«٥٤٩١٢ ، $\frac{١}{٢}$»

١٤ فى مفكوك : $\left(أس^{٢} + \frac{١}{أ س}\right)^{١١}$ إذا كان معاملا $س^{٧}$ ، $س^{٤}$ متساويين فأوجد قيمة : أ «±١»

١٥ أوجد معامل $س^{٦}$ فى مفكوك : $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٩}\left(س - \frac{١}{س}\right)^{٩}$

وأثبت أن : هذا المفكوك لا يشتمل على $س^{-٣}$

«-٨٤»

١٦ إذا كان مفكوك : $(س^{٥} + س^{-٢})^{٢ن}$ يحتوى على حد خالٍ من س

فأثبت أن : ن = ٧ أو مضاعفًا للعدد ٧ واحسب هذا الحد عندما ن = ٧

«١٠٠١»

١٧ فى مفكوك : $\left(أ س^{م} + \frac{س}{س^{ك}}\right)^{ن}$ أوجد الشرط اللازم لكى يكون للمفكوك حدًا خاليًا من س حيث م ، ك ∈ $ح^{+}$

1 مهم ○ تجريبي ∴ مستويات عليا

١٨ إذا كان رتبة الحد الخالى من س فى مفكوك : $\left(٢س^{٢} - \frac{٣}{س}\right)^{٢١}$ حسب قوى س التنازلية تساوى رتبة الحد الخالى من س فى مفكوك : $\left(س + \frac{٣}{س}\right)^{٢ن}$ حسب قوى س التنازلية فأوجد قيمة : ن «١٤»

١٩ إذا كان الحد السابع فى مفكوك : $\left(\frac{س^{٢}}{\sqrt{٢}} - \frac{\sqrt{٢}}{س^{٢}}\right)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية هو نفس الحد الخالى من س فأوجد قيمة : ن ، ثم احسب قيمة هذا الحد. «ن = ١٢ ، ٩٢٤»

٢٠ فى مفكوك : $\left(س^{ك} + \frac{١}{س}\right)^{١٠}$ حيث ك ∈ ص⁺ أوجد :

① قيم ك التى تجعل للمفكوك حدًا خاليًا من س «١ ، ٤ ، ٨»

② النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط وذلك لأكبر قيم ك التى حصلت عليها من أولًا. «$\frac{٥}{١٢٦}$»

٢١ من مفكوك : $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢ن}$ أثبت أن : الحد الخالى من س هو الحد الأوسط ، ثم أوجد قيمة هذا الحد عندما ن = ٨ «١٢٨٧٠»

٢٢ أثبت أن الحد الخالى من س فى مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{س^{٣}}\right)^{٥ن}$ حيث ن ∈ ص⁺ يساوى $\frac{|\underline{٥ن}}{|\underline{٢ن}\ |\underline{٣ن}}$

٢٣ إذا كان الحد الثالث فى مفكوك : $\left(٢س + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية خاليًا من س فأوجد قيمة ن ثم أوجد ص التى تجعل هذا الحد مساويًا للحد الثانى فى مفكوك $(١ + ص^{٣})^{٢٠}$ «ن = ٦ ، ص = ±٢»

٢٤ فى مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٥ن}$ حسب قوى س التنازلية أثبت أن : الحد الخالى من س يساوى معامل الحد المشتمل على $س^{٥ن}$ وإذا كان الحد الخالى من س هو الحد الرابع فأوجد قيمة معامل $س^{٥ن}$ «١٠»

٢٥ إذا كان معاملا $س^{ب}$ ، $س^{جـ}$ فى مفكوك $(١ + س)^{أ}$ حسب قوى س التصاعدية متساويين فأثبت أن : أ = ب + جـ

٢٦ إذا كان معامل $س^{ك}$ فى مفكوك $(١ + س)^{٢ن}$ يساوى معامل $س^{ك+٢}$ فى نفس المفكوك فأثبت أن : ك = ن − ١

٢٧ أوجد قيمة الحد الخالى من س فى مفكوك : $(س^{٢} + ١)\left(س - \frac{١}{س}\right)^{١٠}$ «−٤٢»

٢٨ أوجد معامل $س^{٥}$ فى مفكوك : $(١ - س + س^{٢})(١ + س)^{١١}$ «٢٩٧»

٢٩ أوجد معامل س فى مفكوك : $(س + ٢)^{٢}\left(س - \frac{١}{س}\right)^{٨}$ «−٣٨٠»

٣٠ أوجد معامل $س^{٢}$ فى حاصل الضرب : $(١ - س)^{٨}(٣ + ٢س)^{٦}$ «١٩٤٤»

٣١ إذا كان معامل $س^{٢}$ فى مفكوك : $(١ + ٢س)^{٥}(١ + نس)^{٤}$ هو −٢٦ فأوجد قيمة : ن «−٣ أ ، $-\frac{١١}{٣}$»

٣٢ أوجد : ① معامل $س^{٣}$ فى مفكوك : $(١ + س + س^{٢})^{٦}$ «٥٠»

② معامل $س^{٢}$ فى مفكوك : $(١ + س - س^{٢})^{٥}$ «٥»

مسائل تقيس مهارات التفكير

٣٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① معامل $س^{٢٠}$ فى مفكوك $(١ + س^{٢})^{٤٠}\left(س^{٢} + ٢ + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{-٥}$ يساوى .....

(أ) ١ (ب) $^{٣٠}ق_{١٠}$ (جـ) $^{٣٠}ق_{٥}$ (د) ٣٠

② معامل $س^{١٣}$ فى مفكوك $\sum_{ر=٠}^{٥٠} {}^{٥٠}ق_{ر}\,(س - ١)^{٥٠-ر} \times ٢^{ر}$ يساوى .....

(أ) $^{٥٠}ق_{١٣}$ (ب) $^{٥٠}ق_{١٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

③ معامل $س^{٤}$ فى مفكوك $(١ + س + س^{٢} + س^{٣})^{ن}$ هو .....

(أ) $ن ق_{٢} + ن ق_{١} + ن ق_{٤}$ (ب) $ن ق_{٤} + ن ق_{٢}$

(ج) $ن ق_{٤} + ن ق_{٢} + ن ق_{١}$ (د) $ن ق_{٤} + ن ق_{٢} + ن ق_{١}$

④ معامل $س^{٢٤}$ فى مفكوك $(١ + س^{٢})^{١٢} (١ + س^{١٢}) (١ + س^{٢٤})$ يساوى .....

(أ) $^{١٢}ق_{٦}$ (ب) $^{١٢}ق_{٦} + ٢$ (ج) $^{١٢}ق_{٦} + ٣$ (د) $^{١٢}ق_{٦} + ٤$

⑤ الحد الخالى من س فى مفكوك $(١ - \frac{١}{س})^{٨} (س + ١)^{٨}$ هو .....

(أ) $-^{٨}ق_{٦}$ (ب) $^{٨}ق_{٤}$ (ج) $-^{٨}ق_{٤}$ (د) $^{٨}ق_{٤}$

⑥ إذا كان : أ ، ب معاملا $س^{ن}$ فى مفكوك $(١ + س)^{٢ن}$ ، $(١ + س)^{٢ن - ١}$ على الترتيب فإن .....

(أ) أ = ٢ب (ب) ب = ٢أ (ج) أ = ٢ب (د) ب = ٣أ

⑦ معامل $س^{٦}$ فى مفكوك $[(١ + س)^{٦} + (١ + س)^{٧} + (١ + س)^{٨} + ... + (١ + س)^{١٢}]$ يساوى .....

(أ) $^{١٢}ق_{٦}$ (ب) $^{١٢}ق_{٦} - ^{٦}ق_{٦}$ (ج) $^{١٢}ق_{٧} - ١$ (د) $^{١٥}ق_{٦}$

٣٤ أثبت أن : معامل الحد الذى يشتمل على $س^{٣} ص^{٤} ع^{٥}$ فى مفكوك : $(س + ص + ع)^{١٢}$ هو $\frac{|\underline{١٢}}{|\underline{٣} \, |\underline{٤} \, |\underline{٥}}$

٣٥ فى مفكوك : $(١ + أس) (١ + بس)^{٤}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل الحد الذى يحتوى على س هو −٥ ولا يوجد حد يحتوى على $س^{٢}$ فأوجد قيمة كلًا من : أ ، ب حيث ب ≠ ٠ .

«٣ ، −٢»

٣٦ بين أن : الفرق بين معاملى $س^{ر+١}$ ، $س^{ر}$ فى مفكوك $(١ + س)^{ن+١}$ يساوى الفرق بين معاملى $س^{ر+١}$ ، $س^{ر-١}$ فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$

الدرس 5

النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

فى مفكوك $(أ س + ب ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية يكون :

• النسبة بين حدين متتاليين هى :

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{ب ص}{أ س}$$

أى أن :

$$\frac{ن - ر \text{ (الأصغر)} + ١}{ر \text{ (الأصغر)}} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الأول}}$$

• النسبة بين معاملى حدين متتاليين هى :

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{ب}{أ}$$

• لاحظ الفرق بين : $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}}$ ، $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}}$:

حيث $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{ن - ر \text{ (الأكبر)} + ١}{ر \text{ (الأكبر)}}$

فمثلًا : $\frac{^{٧}ق_{٥}}{^{٧}ق_{٤}} = \frac{٧ - ٥ + ١}{٥} = \frac{٣}{٥}$

بينما $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الأول}} = \frac{ن - ر \text{ (الأصغر)} + ١}{ر \text{ (الأصغر)}} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الأول}}$

فمثلًا : فى مفكوك $(س - ٥)^{٧}$ فإن : $\frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = \frac{٧ - ٤ + ١}{٤} \times \frac{٥}{س} = \frac{٥}{س}$

مثال ١

أوجد النسبة بين الحدين الثامن والسابع فى مفكوك : $(س + \frac{١}{س})^{١٢}$ حسب قوى س التنازلية عندما س = ٢

الحل

$$\because \frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الأول}}$$

$\therefore \frac{ح_{٨}}{ح_{٧}} = \frac{١٢ - ٧ + ١}{٧} \times \frac{\frac{١}{س}}{س} = \frac{٦}{٧} \times \frac{١}{س^{٢}} = \frac{٦}{٧ س^{٢}}$

وعندما س = ٢ $\therefore \frac{ح_{٨}}{ح_{٧}} = \frac{٦}{٧ \times ٤} = \frac{٣}{١٤}$

مثال ١

في مفكوك : $(٣ س - ٤ ص)^{١٢}$ حسب قوى س التنازلية

أوجد : ① $\frac{ح_{٥}}{ح_{٤}}$ ② $\frac{ح_{٩}}{ح_{١٠}}$ ③ $\frac{ح_{٨}}{ح_{٧}}$

الحل

$\because \frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الثاني}}{\text{الأول}}$

① $\frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = \frac{١٢ - ٤ + ١}{٤} \times \frac{-٤ ص}{٣ س} = \frac{٩}{٤} \times \frac{-٤ ص}{٣ س} = -\frac{٣ ص}{س}$

② $\because \frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = \frac{١٢ - ٩ + ١}{٩} \times \frac{-٤ ص}{٣ س} = \frac{٤}{٩} \times \frac{-٤ ص}{٣ س} = -\frac{١٦ ص}{٢٧ س}$ $\therefore \frac{ح_{٩}}{ح_{١٠}} = -\frac{٢٧ س}{١٦ ص}$

③ $\because \frac{ح_{٨}}{ح_{٧}} = \frac{ح_{٨}}{ح_{٧}} \times \frac{ح_{٧}}{ح_{٦}}$

$\therefore \frac{ح_{٨}}{ح_{٧}} = \left(\frac{١٢ - ٧ + ١}{٧} \times \frac{-٤ ص}{٣ س}\right) \times \left(\frac{١٢ - ٦ + ١}{٦} \times \frac{-٤ ص}{٣ س}\right)$

$= \frac{٦}{٧} \times \frac{-٤ ص}{٣ س} \times \frac{٧}{٦} \times \frac{-٤ ص}{٣ س} = \frac{١٦ ص^{٢}}{٩ س^{٢}}$

مثال ٢

إذا كانت النسبة بين الحدين الثالث والرابع في مفكوك : $\left(\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right)^{٦}$

حسب قوى س التنازلية هي ٥ : ٣ فما قيمة س ؟

الحل

$\because \frac{ح_{٣}}{ح_{٤}} = \frac{٥}{٣}$ $\therefore \frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{٣}{٥}$ $\therefore \frac{٦ - ٣ + ١}{٣} \times \frac{\frac{١}{\sqrt{س}}}{\sqrt{س}} = \frac{٣}{٥}$

$\therefore \frac{٤}{٣} \times \frac{١}{س} = \frac{٣}{٥}$ $\therefore ٩ س = ٢٠$ $\therefore س = \frac{٢٠}{٩}$

مثال ٤

إذا كانت قيم الحدود الثاني والثالث والرابع في مفكوك : $(٢ س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية هي على الترتيب ٤٠ ، ٢٠ ، ٥ فأوجد قيمة كل من : ن ، س ، ص

الحل

$\because ح_{٢} = ٤٠ ، ح_{٣} = ٢٠$ $\therefore \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{٢٠}{٤٠} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times \frac{ص}{٢ س} = \frac{١}{٢}$ $\therefore \frac{ن - ١}{٤} \times \frac{ص}{س} = \frac{١}{٢}$ وبالضرب في ٤

$\therefore (ن - ١) \times \frac{ص}{س} = ٢$ (١)

، $\because ح_{٣} = ٢٠ ، ح_{٤} = ٥$ $\therefore \frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{٥}{٢٠} = \frac{١}{٤}$

$\therefore \frac{ن - ٣ + ١}{٣} \times \frac{ص}{٢ س} = \frac{١}{٤}$ $\therefore \frac{ن - ٢}{٦} \times \frac{ص}{س} = \frac{١}{٤}$ وبالضرب في ٦

$\therefore (ن - ٢) \times \frac{ص}{س} = \frac{٣}{٢}$ (٢)

، بقسمة (١) على (٢) : $\therefore \frac{ن - ١}{ن - ٢} = ٢ \times \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣}$

$\therefore ٤ ن - ٨ = ٣ ن - ٣$ $\boxed{\therefore ن = ٥}$

وبالتعويض في (١) : $\therefore (٥ - ١) \times \frac{ص}{س} = ٢$

$\therefore ٤ ص = ٢ س$ أي $٢ ص = س$

، $\because ح_{٢} = ٤٠$ $\therefore {}^{ن}ق_{١} ص^{١} (٢ س)^{ن - ١} = ٤٠$

وبالتعويض عن ن = ٥ ، س = ٢ ص $\therefore {}^{٥}ق_{١} ص (٤ ص)^{٤} = ٤٠$

$\therefore ٥ \times ص \times (٤ ص)^{٤} = ٤٠$ $\therefore ٥ \times ص \times ٢٥٦ ص^{٤} = ٤٠$

$\therefore ١٢٨٠ ص^{٥} = ٤٠$ $\therefore ص^{٥} = \frac{٤٠}{١٢٨٠} = \frac{١}{٣٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥}$

$\boxed{\therefore ص = \frac{١}{٢}}$

، $\because س = ٢ ص$ $\boxed{\therefore س = ١}$

مثال ٥

في مفكوك : $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان ن عددًا فرديًا أثبت أن النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب = $\frac{\text{س}}{\text{أ}}$

الحل

∵ ن عدد فردي. ∴ الحدين الأوسطين هما $\text{ح}_{\frac{\text{ن}+١}{٢}}$ ، $\text{ح}_{\frac{\text{ن}+٣}{٢}}$

، ∵ $\frac{\text{ح}_{\frac{\text{ن}+٣}{٢}}}{\text{ح}_{\frac{\text{ن}+١}{٢}}} = \frac{\text{ح}_{\frac{\text{ن}+٣}{٢}}}{\text{ح}_{\left(\frac{\text{ن}+١}{٢}\right)+١}} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} \times \frac{٢\text{ن} - \text{ن} - ١ + ٢}{\text{ن} + ١}$

$= \frac{\text{ن}+١}{\text{ن}+١} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{أ}}{\text{س}}$

∴ النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب = $\frac{\text{ح}_{\frac{\text{ن}+١}{٢}}}{\text{ح}_{\frac{\text{ن}+٣}{٢}}} = \frac{\text{س}}{\text{أ}}$

مثال ٦

في مفكوك $(١ + \text{س})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان ضعف معامل $\text{ح}_{٦}$ = معامل $\text{ح}_{٥}$ + معامل $\text{ح}_{٧}$

فأوجد قيمة : ن وأثبت أن هناك علاقتين أخريين تفي بالشروط السابقة.

الحل

∵ ٢ × معامل $\text{ح}_{٦}$ = معامل $\text{ح}_{٥}$ + معامل $\text{ح}_{٧}$

، بالقسمة على معامل $\text{ح}_{٦}$

∴ $٢ = \frac{\text{معامل ح}_{٥}}{\text{معامل ح}_{٦}} + \frac{\text{معامل ح}_{٧}}{\text{معامل ح}_{٦}}$ (١)

، ∵ $\frac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \times \frac{\text{معامل الثاني}}{\text{معامل الأول}}$

∴ $\frac{\text{معامل ح}_{٥}}{\text{معامل ح}_{٦}} = \frac{\text{ن} - ٥ + ١}{٥} \times \frac{١}{١} = \frac{\text{ن} - ٤}{٥}$ ∴ $\frac{\text{معامل ح}_{٦}}{\text{معامل ح}_{٥}} = \frac{٥}{\text{ن} - ٤}$ (٢)

، $\frac{\text{معامل ح}_{٧}}{\text{معامل ح}_{٦}} = \frac{\text{ن} - ٦ + ١}{٦} \times \frac{١}{١} = \frac{\text{ن} - ٥}{٦}$ (٣)

وبالتعويض من (٢) ، (٣) في (١) :

∴ $٢ = \frac{٥}{\text{ن} - ٤} + \frac{\text{ن} - ٥}{٦}$ وبضرب الطرفين في ٦ (ن − ٤)

∴ ١٢ (ن − ٤) = ٣٠ + (ن − ٥) (ن − ٤) ∴ ١٢ ن − ٤٨ = ٣٠ + $\text{ن}^{٢}$ − ٩ ن + ٢٠

∴ $\text{ن}^{٢}$ − ٢١ ن + ٩٨ = ٠ ∴ (ن − ٧) (ن − ١٤) = ٠

∴ ن = ٧ أ، ن = ١٤

وعندما ن = ٧ يكون معامل $\text{ح}_{٥} = {}^{٧}\text{ق}_{٤} = {}^{٧}\text{ق}_{٣}$ = معامل $\text{ح}_{٤}$

، معامل $\text{ح}_{٦} = {}^{٧}\text{ق}_{٥} = {}^{٧}\text{ق}_{٢}$ = معامل $\text{ح}_{٣}$

، معامل $\text{ح}_{٧} = {}^{٧}\text{ق}_{٦} = {}^{٧}\text{ق}_{١}$ = معامل $\text{ح}_{٢}$

∴ معاملات الحدود الرابع والثالث والثاني تكون العلاقة :

٢ معامل $\text{ح}_{٣}$ = معامل $\text{ح}_{٤}$ + معامل $\text{ح}_{٢}$

وعندما ن = ١٤ يكون معامل $\text{ح}_{٥} = {}^{١٤}\text{ق}_{٤} = {}^{١٤}\text{ق}_{١٠}$ = معامل $\text{ح}_{١١}$

، معامل $\text{ح}_{٦} = {}^{١٤}\text{ق}_{٥} = {}^{١٤}\text{ق}_{٩}$ = معامل $\text{ح}_{١٠}$

، معامل $\text{ح}_{٧} = {}^{١٤}\text{ق}_{٦} = {}^{١٤}\text{ق}_{٨}$ = معامل $\text{ح}_{٩}$

∴ معاملات الحدود الحادي عشر والعاشر والتاسع تكون العلاقة

٢ معامل $\text{ح}_{١٠}$ = معامل $\text{ح}_{١١}$ + معامل $\text{ح}_{٩}$

إيجاد أكبر حد وأكبر معامل فى مفكوك ذى الحدين

فى مفكوك (أ س + ب ص)^{ن} حسب قوى س التنازلية وبمعلومية قيمتى س ، ص فإن أكبر حد عدديًا فى المفكوك وليكن $ح_{ر+1}$ يكون أكبر من أو يساوى الحدود السابقة له وأكبر من أو يساوى الحدود التالية له أى يحقق الشرطين :

① $\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} \geq 1$ «أكبر من أو يساوى السابق له»

أى أن : $\frac{ن - ر + 1}{ر} \times \left|\frac{ب ص}{أ س}\right| \geq 1$

② $\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر+2}} \geq 1$ «أكبر من أو يساوى التالى له»

$\therefore \frac{ح_{ر+2}}{ح_{ر+1}} \geq 1$ $\therefore \frac{ن - (ر + 1) + 1}{ر + 1} \times \left|\frac{ب ص}{أ س}\right| \geq 1$

وباستخدام الشرطين السابقين يمكن إيجاد أكبر حد وأكبر معامل فى المفكوك والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال ٧

فى مفكوك : (٢ س − ٣ ص)^{١٠} حسب قوى س التنازلية

① أوجد القيمة العددية لأكبر حد وذلك عندما س = ٣ ، ص = ٢

② أوجد القيمة العددية لأكبر حد وذلك عندما س = ١ ، ص = ٣

③ أوجد قيمة أكبر معامل فى المفكوك.

الحل

① بفرض أن أكبر حد هو $ح_{ر+1}$

$\therefore \frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} \geq 1$ (أكبر من أو يساوى السابق له)

$\therefore \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \left|\frac{ب ص}{أ س}\right| \geq 1$ $\therefore \frac{١٠ - ر + 1}{ر} \times \left|\frac{-٣ \times ٢}{٢ \times ٣}\right| \geq 1$

$\therefore \frac{١٠ - ر + 1}{ر} \geq 1$ $\therefore ١٠ - ر + 1 \geq ر$

$\therefore ٢ ر \leq ١١$ $\therefore ر \leq ٥\frac{1}{2}$ (١)

$\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر+2}} \geq 1$ (أكبر من أو يساوى التالى له)

$\therefore \frac{ح_{ر+2}}{ح_{ر+1}} \geq 1$ $\therefore \frac{١٠ - (ر + 1) + 1}{ر + 1} \times \left|\frac{ب ص}{أ س}\right| \geq 1$

$\therefore \frac{١٠ - ر}{ر + 1} \times \left|\frac{-٣ \times ٢}{٢ \times ٣}\right| \geq 1$ $\therefore ١٠ - ر \geq ر + 1$

$\therefore ٢ ر \leq ٩$ $\therefore ر \leq ٤\frac{1}{2}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore ٤\frac{1}{2} \leq ر \leq ٥\frac{1}{2}$ $\therefore ر = ٥$

$\therefore ح_{٦}$ هو أكبر حدود المفكوك (٢ س − ٣ ص)^{١٠} عدديًا عندما س = ٣ ، ص = ٢

، $ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥} \left|(-٣ \times ٢)^{٥} (٢ \times ٣)^{٥}\right| = ٢٥٢ \times ١٠٦$

② بفرض أن أكبر حد هو $ح_{ر+1}$

$\therefore \frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} \geq 1$ (أكبر من أو يساوى السابق له)

$\therefore \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \left|\frac{ب ص}{أ س}\right| \geq 1$ $\therefore \frac{١٠ - ر + 1}{ر} \times \left|\frac{-٣ \times ٢}{١ \times ٢}\right| \geq 1$

$\therefore \frac{١١ - ر}{ر} \geq \frac{٢}{٩}$ $\therefore ٩٩ - ٩ ر \geq ٢ ر$

$\therefore ١١ ر \leq ٩٩$ $\therefore ر \leq ٩$ (١)

$\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر+2}} \geq 1$ (أكبر من أو يساوى التالى له)

$\therefore \frac{ح_{ر+2}}{ح_{ر+1}} \geq 1$ $\therefore \frac{١٠ - (ر + 1) + 1}{ر + 1} \times \left|\frac{-٣ \times ٣}{١ \times ٢}\right| \geq 1$

$\therefore \frac{١٠ - ر}{ر + ١} \times \frac{٩}{٢} \geq ١$ $\qquad \therefore ٩٠ - ٩ر \geq ٢ر + ٢$

$\therefore ١١ر \leq ٨٨$ $\qquad \therefore ر \leq ٨$

من (١) ، (٢) : $\therefore ٨ \geq ر \geq ٩$ $\qquad \therefore ر = ٨ ، ٩$ (٢)

$\therefore$ هناك حدان متساويان هما الأكبر فى المفكوك

$، ح_٩ = ح_{١٠} = {}^{١٠}ق_٩ \left|(-٣ \times ٢)^٩ (٢ \times ١)\right| = ٢٠ \times ٣^٩$

② لإيجاد قيمة أكبر معامل فى المفكوك نوجد قيمة أكبر حد عندما س = ص = ١ وبفرض أن أكبر حد هو $ح_{ر+١}$

$\therefore \frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} \leq ١$ (أكبر من أو يساوى السابق له)

$\therefore \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \left|\frac{-٣}{٢}\right| \leq ١$ $\qquad \therefore \frac{١٠ - ر + ١}{ر} \leq \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{١١ - ر}{ر} \leq \frac{٢}{٣}$ $\qquad \therefore ٣٣ - ٣ر \leq ٢ر$

$\therefore ٥ر \geq ٣٣$ $\qquad \therefore ر \geq ٦\frac{٣}{٥}$ (١)

$، \frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر+٢}} \leq ١$ «أكبر من أو يساوى التالى له»

$\therefore \frac{ح_{ر+٢}}{ح_{ر+١}} \geq ١$ $\qquad \therefore \frac{١٠ - (ر + ١) + ١}{ر + ١} \times \left|\frac{-٣}{٢}\right| \geq ١$

$\therefore \frac{١٠ - ر}{ر + ١} \times \frac{٣}{٢} \geq ١$ $\qquad \therefore ٣٠ - ٣ر \geq ٢ر + ٢$

$\therefore ٥ر \leq ٢٨$ $\qquad \therefore ر \leq ٥\frac{٣}{٥}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore ٥\frac{٣}{٥} \leq ر \leq ٦\frac{٣}{٥}$ $\qquad \therefore ر = ٦$

$\therefore ح_٧$ عند س = ص = ١ هو أكبر معامل فى المفكوك.

$\therefore ح_٧ = {}^{١٠}ق_٦ \left|(-٣)^٦ (٢)^٤\right| = ٢٤٤٩٤٤٠$

ملاحظة

فى مفكوك $(١ + س)^ن$

① إذا كان : ن عددًا زوجيًا.

فإن : أكبر معامل فى المفكوك هو معامل الحد الأوسط = $ن ق_{\frac{ن}{٢}}$

② إذا كان : ن عددًا فرديًا.

فإن : معاملا الحدين الأوسطين متساويان ومعامل أى منهما هو أكبر معامل فى المفكوك = $ن ق_{\frac{ن-١}{٢}}$ أو $ن ق_{\frac{ن+١}{٢}}$

مثال ٨

فى مفكوك : $(س + ٣)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية أوجد قيم س التى تجعل $ح_٧$ هو أكبر حد عدديًا.

الحل

$\because ح_٧$ هو أكبر حد $\qquad \therefore \frac{ح_٧}{ح_٦} \leq ١$

$\therefore \frac{١٠ - ٦ + ١}{٦} \times \left|\frac{٣}{س}\right| \leq ١$ $\qquad \therefore \frac{٥}{٦} \times ٣ \leq |س|$

$\therefore |س| \geq \frac{٥}{٢}$ $\qquad \therefore س \in \left[-\frac{٥}{٢} ، \frac{٥}{٢}\right]$ (١)

$، \frac{ح_٧}{ح_٨} \leq ١$ $\qquad \therefore \frac{ح_٨}{ح_٧} \geq ١$

$\therefore \frac{١٠ - ٧ + ١}{٧} \times \left|\frac{٣}{س}\right| \geq ١$ $\qquad \therefore \frac{٤}{٧} \times ٣ \geq |س|$

$\therefore ١\frac{٥}{٧} \geq |س|$ $\qquad \therefore س \leq ١\frac{٥}{٧}$ أ، $س \geq -١\frac{٥}{٧}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore$ س التى تجعل $ح_٧$ هو أكبر حد $\in \left[-\frac{٥}{٢} ، -١\frac{٥}{٧}\right] \cup \left[١\frac{٥}{٧} ، \frac{٥}{٢}\right]$

تمارين 5

على النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

اختبار تفاعلي

• فهم • تطبيق ∴ مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسي

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① من مفكوك : $(س + ص)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية

فإن الحد التاسع : الحد الثامن يساوى .....

(أ) $\frac{٢ص}{٨س}$ (ب) $\frac{٣س}{٨ص}$ (جـ) $\frac{٨ص}{٣س}$ (د) $\frac{٨س}{٣ص}$

② من مفكوك : $(١ - س)^{١٢}$ حسب قوى س التصاعدية

فإن معامل الحد السادس : معامل الحد الخامس يساوى .....

(أ) $\frac{٨}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٨}$ (جـ) $\frac{-٨}{٥}$ (د) $\frac{-٥}{٨}$

③ فى مفكوك : $(٢ + أس)^{٩}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $ح_٣$ = معامل $ح_٤$

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{٩}{٤}$ (جـ) $\frac{٩}{٧}$ (د) $\frac{٩}{٢}$

④ إذا كان : $ح_{١٧} = ح_{١٨}$ فى مفكوك $(٢ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية

فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑤ فى مفكوك : $(س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية تكون نسبة $ح_٦ : ح_٤$ تساوى .....

(أ) $٢٥ ص^٢ : ١٦ س^٢$ (ب) $٢٥ س^٢ : ١٦ ص^٢$

(جـ) ١ (د) $ص^٢ : س^٢$

⑥ من مفكوك : $(١ + س)^{٢٧}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب ٣ : ١ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

⑦ من مفكوك : $(٣أ - ٢ب)^{١١}$ حسب قوى أ التنازلية إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب تساوى $\frac{-٢}{٣}$ فإن أ : ب = ...

(أ) ٩ : ٤ (ب) ٤ : ٩ (جـ) ١ (د) ١-

⑧ فى مفكوك : $(أ - ب)^{ن}$ حسب قوى أ التنازلية حيث ن ≥ ٥ إذا كان كل من $ح_٥$ ، $ح_٦$ كل منهما معكوس جمعى للآخر فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{ن - ٥}{٦}$ (ب) $\frac{ن - ٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٥}{ن - ٤}$ (د) $\frac{٦}{ن - ٥}$

⑨ إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س})^{٢ن + ١}$ متساويين

فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ١- (جـ) ± ١ (د) ٢

⑩ النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب فى مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٢ن - ١}$ حسب قوى س التنازلية = ...

(أ) $س^٢$ (ب) $\frac{س^٢}{٢ن}$ (جـ) $\frac{س^٢}{ن}$ (د) $\frac{٢ن + ١}{٢ن + ٣}$

⑪ فى مفكوك : $(\frac{١}{س} - س^٢)^{٩}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان : $ح_٥ = ١٢ ح_٤$

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٢- (جـ) ٨ (د) ٨-

⑫ الحدان المتتاليان فى مفكوك $(٣ + ٢س)^{٧٤}$ حسب قوى س التصاعدية الذى معاملاهما متساويان هما .....

(أ) $ح_{٢٩}$ ، $ح_{٣٠}$ (ب) $ح_{٣٠}$ ، $ح_{٣١}$ (جـ) $ح_{٣١}$ ، $ح_{٣٢}$ (د) $ح_{٢٨}$ ، $ح_{٢٩}$

⑬ فى مفكوك : $(١ + س)^{٢ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $ح_٣$ وسط حسابى بين معاملى $ح_٢$ ، $ح_٤$ فإن قيمة $٢ن^٢ - ٩ن$ = ...

(أ) ٨- (ب) ٦- (جـ) ٧- (د) ١٨-

⑭ إذا كانت النسبة بين معاملى حدين متتاليين فى مفكوك $(١ + س)^{٢٤}$ حسب قوى س التصاعدية هى ٤ : ١ فإن الحدان هما .....

(أ) $ح_٤$ ، $ح_٥$ (ب) $ح_{٢٠}$ ، $ح_{٢١}$ (جـ) $ح_٣$ ، $ح_٤$ (د) $ح_{٢١}$ ، $ح_{٢٢}$

(١٥) فى مفكوك : $\left(أ س^{٢} + \frac{١}{٢ س}\right)^{٦}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالى من س يساوى معامل الحد المشتمل على $س^{٦}$ فإن : $أ^{٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{٣}$

(١٦) فى مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{أ}{س^{٣}}\right)^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية

إذا كان معامل $س^{١٠}$ = ضعف معامل $س^{١٥}$ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢

(١٧) فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{١٥}$ تكون النسبة بين الحد الخالى من س ومجموع معاملى الحدين الأوسطين = ...

(أ) $\frac{٧}{١٥}$ (ب) $\frac{٧}{٣٠}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(١٨) الحد الذى له أكبر معامل فى مفكوك : $(١ + س)^{١٠}$ حسب قوى س التصاعدية هو .....

(أ) $ح_{١١}$ (ب) $ح_{٥}$ (جـ) $ح_{٦}$ (د) $ح_{١٠}$

(١٩) الحد الذى له أصغر معامل فى مفكوك : $(٢ س + ٧ ص)^{٣}$ حسب قوى س التنازلية هو .....

(أ) $ح_{٤}$ (ب) $ح_{٣}$ (جـ) $ح_{٢}$ (د) $ح_{١}$

(٢٠) فى مفكوك : $(س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد السابع هو الحد الذى له أكبر معامل فإن : ن = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ١٥

(٢١) أكبر معامل فى مفكوك $(٢ س + ص)^{٨}$ يساوى .....

(أ) ١١٢٠ (ب) ٤٤٨ (جـ) ١٧٩٢ (د) ١٠٢٤

(٢٢) إذا كان مجموع معاملات حدود مفكوك : $(١ + ٢ س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية يساوى ٦٥٦١ فإن أكبر معامل فى هذا المفكوك يساوى .....

(أ) ٨٩٦ (ب) ٣٥٩٤ (جـ) ١٧٩٢ (د) ١٩٧٢

(٢٣) أكبر حد فى مفكوك : $(١ + ٤ س)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية عند س = $\frac{١}{٢}$ يساوى .....

(أ) $٥٦ \times \left(\frac{٤}{٣}\right)^{٥}$ (ب) $٥٦ \times \left(\frac{٢}{٤}\right)^{٥}$ (جـ) $٥٦ \times \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٤}$ (د) $٥٦ \times \left(\frac{٢}{٥}\right)^{٤}$

(٢٤) إذا كان أكبر معامل فى مفكوك $(أ + س)^{٢٠}$ هو معامل $ح_{١١}$

فإن : أ ∈ ..... حيث أ ∈ $ح^{+}$

(أ) $\left[\frac{١٠}{١١} ، \frac{١١}{١٠}\right]$ (ب) $[١٠ ، ١١]$

(جـ) $\left[\frac{-١١}{١٠} ، \frac{١٠}{١١}\right]$ (د) $\left[\frac{٩}{١١} ، \frac{١٠}{١١}\right]$

١ أوجد النسبة بين الحدين الرابع والثالث فى مفكوك : $(٣ + س)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية.

« $\frac{٢}{٣}$ س »

٢ أوجد النسبة بين الحدين الثالث والخامس فى مفكوك : $(س - ٢)^{٧}$ حسب قوى س التنازلية.

« $\frac{٣ س^{٢}}{٢٠}$ »

٣ أوجد النسبة بين معاملى الحدين التاسع والعاشر فى مفكوك : $(٢ س - ٣ ص)^{١٤}$ حسب قوى س التنازلية.

« -١ »

٥ أوجد النسبة بين الحدين السابع والثامن فى مفكوك :

$\left(س + \frac{١}{٣} س^{-١}\right)^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية عندما س = $\frac{١}{٢}$

« $\frac{٧}{١٢}$ »

٦ من مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{٢}{س}\right)^{٨}$

(١) أوجد النسبة بين الحدين الخامس والسادس ، وإذا كانت النسبة تساوى ٨ : ٢٥ أوجد قيمة : س

(٢) أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد خالى من س

« $\frac{٥ س^{٣}}{٨}$ ، $\frac{٤}{٥}$ »

٧ (دورثانى ٢٠١٤) فى مفكوك : $(١ + ٢ س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية ، إذا كانت النسبة بين الحدين الثامن والعاشر كنسبة ١ : ٢٨ عندما س = ٣ فأوجد قيمة : ن

« ١٥ »

٨ (دور أول ٢٠١٢) أوجد رتبة وقيمة الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(س^{٣} - \frac{١}{س}\right)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية ثم أوجد النسبة بين الحد الأوسط فى هذا المفكوك والحد الذى يليه عندما س = ٢ «$ح_{٧}$ ، ٢٨ ، -٢»

٩ إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $(١ + س)^{١٠}$ حسب قوى س التصاعدية يساوى ضعف الحد السابع أوجد قيمة : س «$\frac{٢}{٥}$»

١٠ إذا كانت النسبة بين الحد الخالى من س إلى الحد السابق له فى مفكوك $\left(س + \frac{١}{٢س}\right)^{١٢}$ حسب قوى س التنازلية كنسبة ٧ : ٣ فما قيمة : س «$\pm\frac{١}{٢}$»

١١ فى مفكوك : $\left(س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{١٤}$ حسب قوى س التنازلية أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س ، ثم أوجد النسبة بين الحد السابع والحد السادس فى هذا المفكوك عندما س = -١ «$\frac{٢}{٣}$»

١٢ فى مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{٩}$ حسب قوى س التنازلية أوجد قيمة الحد الخالى من س ، وإذا كانت النسبة بين الحد الخالى من س والحد السادس تساوى ٩ : ٤ فأوجد قيمة : س الحقيقية. «$\frac{٢}{٣}$»

١٣ فى مفكوك : $(٥ + ٤س)^{١٦}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان أحد حدود المفكوك يساوى ثلاثة أمثال الحد التالى له فأوجد رتبة هذين الحدين إذا كانت س = ١ «$ح_{١٢}$ ، $ح_{١٣}$»

١٤ أوجد أكبر حد فى مفكوك : $(٣ + ٢س)^{٦}$ حسب قوى س التصاعدية عندما س = ١ «$ح_{٢}$»

١٥ (دور أول ٢٠١٢) فى مفكوك : $\left(٢ + \frac{س}{٣}\right)^{٩}$

① أوجد قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين متساويين.

② بدون إيجاد المفكوك أوجد قيمة أكبر معامل فيه «٦ ، ٧٦٨»

١٦ فى مفكوك : $(١ + س)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $٢ ح_{٥} = ح_{٤} + ح_{٦}$ فأوجد قيمة : س «٢ أو $\frac{١}{٢}$»

١٧ فى مفكوك : $(٢س - ٣)^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية أوجد قيم : س التى تجعل $١٣ ح_{٣} + ١٠ ح_{٤} + ح_{٥} = ٠$ «$\frac{٩}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$»

١٨ فى مفكوك : $\left(\frac{٣س}{٢} + \frac{٢}{٣س^{٢}}\right)^{١٢}$ أوجد كلاً من الحد الأوسط والحد الذى يحتوى على $س^{-٣}$ ، وإذا كانت النسبة بين هذين الحدين تساوى ٧ : ٤ فأوجد قيمة : س «$\frac{٢}{٣}$»

١٩ فى مفكوك : $(س + ص)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية وجد أن النسبة بين $ح_{٣}$ ، $ح_{٤}$ تساوى ١ : ٤ وكان الحد الأوسط يساوى ١١٢٠ فأوجد كلاً من : س ، ص «±١ ، ±٢»

٢٠ فى مفكوك : $(٣ + ٢س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية كان $ح_{٥} = ٦ ح_{٤}$ ، $ح_{٨} = ٣ ح_{٧}$ أوجد كلاً من : ن ، س «٢٧ ، $\frac{٢}{٣}$»

٢١ (دور أول ٢٠١٧) فى مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $ح_{٣} = ١٧$ ، $٣ح_{٣} \times ح_{٤} = ٥٤٤$ أوجد قيمة كل من : ن ، س «١٨ ، $\pm\frac{١}{٣}$»

٢٢ فى مفكوك : $\left(٢س + \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان $ح_{٩} = ح_{١٠}$ ، $\frac{ح_{٦}}{ح_{٧}} = \frac{٨}{١٥}$ فأوجد قيمة ن وأثبت أنه لا يوجد حد خالى من س فى هذا المفكوك. «ن = ٢٠»

٢٣ من مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $(ح_{٣})^{٢} = ح_{٢} \times ح_{٥}$ أوجد قيمة : ن عندما س = $\frac{٩}{٥}$ «٧»

٢٤ من مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $ح_{١٠}$ هو الوسط الحسابى بين معامل $ح_{٩}$ ، معامل $ح_{١١}$ أوجد كلاً من :

① ن ② $ل^{ن}_{٣}$ ③ $\frac{ن - ١٩}{}$ «٢٣ أ ، ١٤ ، ١٠٦٢٦ أ ، ٢١٨٤ ، ٢٤»

٢٥ (دور ثان ٢٠١٢) فى مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $ح_{٥} = ح_{٦}$ ، $ح_{٤} = \frac{٢٥}{٣} ح_{٢}$ فأوجد قيمة كلًا من : ن ، س «١٠ ، $\frac{٥}{٦}$»

٢٦ من مفكوك : $(س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الثانى وسط حسابى بين الحد الأول والحد الثالث عندما س = ٢ ص أوجد قيمة : ن «٨»

٢٧ (دور أول ٢٠١٢) فى مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{٢ س}\right)^{٢ ن}$ حسب قوى س التنازلية

(١) أثبت أن الحد الخالى من س رتبته (٢ ن + ١)

(٢) أوجد النسبة بين الحد الخالى من س والحد الأوسط عندما ن = ٤ ، س = ١ «$\frac{١٥}{١١٢}$»

٢٨ إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(ب س - أ)^{٢ ن - ١}$ متساويين فما قيمة س ؟ وإذا كان $\left(٢ س + \frac{أ}{ب}\right)^{١٠} = ١٠٢٤$ فأثبت أن : أ = ± ٢ ب «$\frac{١}{ب}$»

٢٩ إذا كانت النسبة بين الحدود الخامس والسادس والسابع فى مفكوك $\left(\frac{٣ س}{٢} + \frac{٢}{٣ س}\right)^{ن}$ هى ٤٠ : ٢٤ : ١١ حسب قوى س التنازلية أوجد كلاً من : ن ، س «١٦ ، $\pm\frac{١}{٢}$»

٣٠ إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاثة حدود متتالية فى مفكوك : $\left(س + \frac{ك}{س^{٢}}\right)^{٢٧}$ حسب قوى س التنازلية كنسبة ١٥ : ٦ : ٢ حيث ك ∈ ص$^{+}$ فأوجد رتب هذه الحدود ثم أوجد رتبة وقيمة الحد الخالى من س فى هذا المفكوك. «$ح_{٢٠}$ ، $ح_{٢١}$ ، $ح_{٢٢}$ ، $ح_{١٠} = {}^{٢٧}ق_{١٠}$»

٣١ (دور ثان ٢٠٠١) إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية من مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ هى ٣٥ ، ٢١ ، ٧ حسب قوى س التصاعدية أوجد قيمة : ن ورتب الحدود الثلاثة. «٧ ، $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$ ، $ح_{٧}$»

٣٢ فى مفكوك : $(أ + ب)^{ن}$ حسب قوى أ التنازلية إذا كانت الحدود الثانى والثالث والرابع هى على الترتيب ٢٤٠ ، ٧٢٠ ، ١٠٨٠ فأوجد قيمة كلًا من : أ ، ب ، ن «٢ ، ٣ ، ٥»

٣٣ إذا كانت معاملات الحدود الرابع والخامس والسادس فى مفكوك : $(٢ س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة : ن «١٩ أو ٨»

٣٤ فى مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان ٣ $ح_{٤}$ ، $\sqrt{٥}\, ح_{٦}$ ، ٦ $ح_{٨}$ فى تتابع هندسى فأوجد قيمة ن «١٢»

٣٥ من مفكوك : $\left(\sqrt{س} + \frac{١}{س}\right)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان $ح_{٤}$ ، $ح_{٥}$ ، ٢٥ $ح_{٧}$ ، $ح_{٦}$ متناسبة أوجد قيمة : س «$\frac{٥}{٢}$»

٣٦ (دور ثان ٢٠٠٨) أثبت أن مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{ن}$ يحتوى على حد خال من س إذا كانت ن مضاعفًا للعدد ٣ ، وإذا كان : ن = ١٢ والمفكوك حسب قوى س التنازلية فأوجد النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد التالى له مباشرة. «$\frac{٩}{٤}$»

٣٧ (دور ثان ٢٠٠٧) فى مفكوك : $\left(٢ س + \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٢٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحدان التاسع والعاشر متساويين فأوجد قيمة س ثم أوجد رتبتى حدين متتاليين فى هذا المفكوك بحيث تكون النسبة بين أحدها والحد التالى له كنسبة ٨ : ١٥ وأثبت أن المفكوك لا يحتوى على حد خال من س «$\sqrt[٣]{٢}$ ، $ح_{٦}$ ، $ح_{٧}$»

٣٨ فى مفكوك : $\left(٢ س + \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد التاسع والعاشر متساويين والنسبة بين الحد السادس والحد السابع كنسبة ٨ : ١٥ فأوجد قيمة : ن وأثبت أن : المفكوك لا يحتوى على حد خال من س «٢٠»

٣٩ من مفكوك : $(١ + م س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كانت : ٤ $ح_{٦}$ = ٧ $ح_{٨}$ ، $\frac{ح_{٤}}{ح_{٦}} = \frac{١}{٤}$ وذلك عندما س = ١ أوجد قيمة كل من : م ، ن «± ٢ ، ٨»

٤٠ (دور أول ٢٠٠٣) من مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{٣ ن}$ أوجد معامل $س^{٣ ن}$ ، وإذا كانت ن = ٦ فأوجد النسبة بين معامل $س^{٣ ن}$ ومعامل الحد الأوسط. «${}^{٣ ن}ق_{ن}$ ، $\frac{٢١}{٥٥}$»

٤١ إذا كانت $ح_{٢}$: $ح_{٣}$ من مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ حسب قوى أ التنازلية تساوى النسبة بين $ح_{٣}$: $ح_{٤}$ من مفكوك $(أ + ب)^{ن + ٣}$ حسب قوى أ التنازلية أوجد قيمة : ن «٥»

٤٢ إذا كانت رتبة الحد الخالى من س من مفكوك : $\left(٢س^{٢} - \frac{٣}{س}\right)^{٢١}$ حسب قوى س التنازلية تساوى رتبة الحد الخالى من س من مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢ن}$ حسب قوى س التنازلية أوجد قيمة : ن ثم أوجد النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب من المفكوك الأول عند س = −١ «١٤ ، $\frac{٢}{٣}$»

٤٣ فى مفكوك : $(١ - م س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $ح_{٢} = -\frac{١}{٤}$ س ، $ح_{٣} = \frac{٣}{١٠٠}$ $س^{٢}$ فأوجد قيمتى : م ، ن «$\frac{١}{١٠٠}$ ، ٢٥»

مسائل تقيس مهارات التفكير

٤٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى مفكوك : $(٢ + س)^{٩}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد السادس مضافًا إليه $\frac{١}{٤}$ الحد السابع يساوى سبعة أمثال الحد الثامن فإن س = ...

(أ) ٣ أ ، $\frac{٨}{٣}$ (ب) −٣ أ ، $\frac{-٨}{٣}$ (جـ) ٣ أ ، $\frac{-٨}{٣}$ (د) −٣ أ ، $\frac{٨}{٣}$

② فى مفكوك : $(١ + أس)^{ن}$ حيث ن ∈ ط ، إذا كان معاملا س ، $س^{٢}$ على الترتيب هما ٨ ، ٢٤ فإن .....

(أ) أ = ٢ ، ن = ٤ (ب) أ = ٤ ، ن = ٢

(جـ) أ = ٢ ، ن = ٦ (د) أ = ١ ، ن = ٨

③ فى مفكوك : $(س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان :

$(٩ ح_{٤})^{٢} = ٩ ح_{٢} \times ٤٤ ح_{٦}$ فإن : ن = ...

(أ) ١١ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٤

④ فى مفكوك : $\left(س + \frac{١}{٢س}\right)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان :

٢ × معامل $ح_{٢}$ = معامل $ح_{١}$ + معامل $ح_{٣}$ فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ١٢٢ (جـ) ١٥ (د) ١٨

⑤ إذا كان معامل $ح_{ن+١}$ = معامل $ح_{ن+٣}$ فى مفكوك $(١ + س)^{٢٠}$

فإن ن = ...

(أ) ١٠ (ب) ٩ (جـ) ١١ (د) ١٢

⑥ فى مفكوك $(٤ - س)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $ح_{٥}$ هو أكبر حد عدديًا

فإن س ∈ .....

(أ) [−٥ ، ٥] (ب) $\left]-\frac{١٦}{٥} ، \frac{١٦}{٥}\right[$

(جـ) $[-٥ ، ٥] - \left[-\frac{١٦}{٥} ، \frac{١٦}{٥}\right]$ (د) $\left[-٥ ، \frac{-١٦}{٥}\right] \cup \left[\frac{١٦}{٥} ، ٥\right]$

٤٥ أخذت ٣ حدود متتالية فى مفكوك : $(١ + س)^{٣٠}$ حسب قوى س التصاعدية فوجد أن نسبة مجموع معامل الحدين الأول والثانى من هذه الحدود إلى مجموع معاملى الحدين الثانى والثالث منها كنسبة ٥ : ٣ فما هذه الحدود ؟ «$ح_{١٩}$ ، $ح_{٢٠}$ ، $ح_{٢١}$»

الوحدة 2

الأعداد المركبة

متطلبات قبلية للوحدة الثانية (الصورة الجبرية للعدد المركب).

الدرس 1 | الصورة المثلثية للعدد المركب.

الدرس 2 | الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر).

الدرس 3 | نظرية ديموافر

الدرس 4 | الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

يمكنك دخول الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح الكود الخاص بكل امتحان

متطلبات قبلية (الصورة الجبرية للعدد المركب)

يعرف العدد التخيلي ت بأنه العدد الذي مربعه يساوي −١ ت² = −١

. لقوى الصحيحة للعدد ت تعطى القيم ت أو −١ أو −ت أو ١ وهذه القيم تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار ٤ وبصفة عامة لكل ن ∈ ص

ت⁰ = ١	ت¹ = ت	ت² = −١	ت³ = −ت
ت⁴ = ١	ت⁵ = ت	ت⁶ = −١	ت⁷ = −ت
ت⁸ = ١	ت⁹ = ت	ت¹⁰ = −١	ت¹¹ = −ت
ت¹² = ١	ت¹³ = ت	ت¹⁴ = −١	ت¹⁵ = −ت

. لأي عدد موجب أ يكون √−أ = √أ × √−١ = ت √أ

مثلاً √−٩ = √٩ ت = ٣ ت وهكذا

العدد المركب هو العدد الذي يمكن كتابته على الصورة س + ت ص

حيث س، ص عددان حقيقيان، ت = √−١ ويسمى س بالجزء الحقيقي

، ص بالجزء التخيلي وتعرف الصورة س + ت ص للعدد المركب بالصورة الجبرية.

فمثلاً: العدد المركب ع = ٢ − ٣ ت جزءه الحقيقي = ٢ وجزءه التخيلي = −٣

تعرف مجموعة الأعداد المركبة كالآتي

ك = {س + ت ص : س ∈ ح ، ص ∈ ح ، ت² = −١}

* لأى عدد مركب ع = س + ت ص

① إذا كان : س = ٠ ، ص ≠ ٠ فإن العدد المركب يصبح ع = ت ص ، ويسمى عدد مركب تخيلى صرف أى أن كل عدد تخيلى هو عدد مركب جزءه الحقيقى يساوى صفر

② إذا كان : ص = ٠ فإن العدد المركب يصبح ع = س ، ويسمى عدد مركب حقيقى صرف أى أن كل عدد حقيقى هو عدد مركب جزءه التخيلى يساوى صفر ولذلك فإن مجموعة الأعداد الحقيقية ح هى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة ك

تساوى عددين مركبين

• يتساوى العددان المركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزآن الحقيقيان وتساوى الجزآن التخيليان فيهما والعكس صحيح

أى أن : لأى عددين مركبين $ع_١ = س_١ + ت ص_١$ ، $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢$ فإن :

• $ع_١ = ع_٢$ إذا وفقط إذا كان : $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$

وبالعكس :

• إذا كان : $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$ فإن : $ع_١ = ع_٢$

• العدد المركب = صفر إذا وفقط إذا كان كل من جزئيه الحقيقى والتخيلى = صفر والعكس صحيح

أى أن : إذا كان س = ٠ ، ص = ٠ فإن : س + ت ص = ٠

وبالعكس :

إذا كان : س + ت ص = ٠ فإن : س = ٠ ، ص = ٠

فمثلاً : إذا كان : س + ت ص = ٥ − ٤ ت فإن : س = ٥ ، ص = − ٤

وإذا كان : س + ت ص = ٣ فإن : س = ٣ ، ص = ٠

جمع وطرح عددين مركبين

لأى عددين مركبين $ع_١ = س_١ + ت ص_١$ ، $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢$

• $ع_١ + ع_٢ = (س_١ + س_٢) + (ص_١ + ص_٢)$ ت

• $ع_١ - ع_٢ = (س_١ - س_٢) + (ص_١ - ص_٢)$ ت

فمثلاً : (٢ + ٣ ت) + (٥ − ٤ ت) = (٢ + ٥) + (٣ + (−٤)) ت = ٧ − ت

، (−١ + ٤ ت) − (٦ − ت) = (−١ − ٦) + (٤ − (−١)) ت = − ٧ + ٥ ت

ضرب عددين مركبين

لأى عددين مركبين $ع_١ = س_١ + ت ص_١$ ، $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢$

$ع_١ \times ع_٢ = (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) + (س_١ ص_٢ + س_٢ ص_١)$ ت

يستخدم فى عملية الضرب نفس خواص ضرب الحدود والمقادير الجبرية فى إيجاد ناتج حاصل الضرب.

فمثلاً : • ٢ ت (١ − ٣ ت) = ٢ ت − ٦ $ت^٢$ = ٦ + ٢ ت (حيث $ت^٢$ = −١)

• (٣ − ٥ ت) (٢ + ت) = ٦ − ٧ ت − ٥ $ت^٢$ = ١١ − ٧ ت (حيث $ت^٢$ = −١)

(٣ ت ، −١٠ ت)

• $(٤ - ت)^٢$ = ١٦ − ٨ ت + $ت^٢$ (حيث $ت^٢$ = −١)

= ١٥ − ٨ ت

تذكر أن : $(أ \pm ب)^٢ = أ^٢ \pm ٢ أ ب + ب^٢$

• (٥ − ٢ ت) (٥ + ٣ ت) = ٢٥ − ٩ $ت^٢$ (حيث $ت^٢$ = −١)

= ٢٥ + ٩ = ٣٤

تذكر أن : $(أ + ب)(أ - ب) = أ^٢ - ب^٢$

مرافق العدد المركب

يرمز لمرافق العدد المركب ع = س + ت ص بالرمز $\overline{ع}$ حيث $\overline{ع}$ = س − ت ص

ونلاحظ أن : $\overline{ع}$ ينتج من تغيير إشارة الجزء التخيلى فى العدد المركب ع ويكون

① ع + $\overline{ع}$ = (س + ت ص) + (س − ت ص) = ٢ س ∈ ح

② ع × $\overline{ع}$ = (س + ت ص) (س − ت ص) = س^{٢} + ص^{٢} ∈ ح

فمثلاً : إذا كان : ع = ٣ + ٢ ت فإن : $\overline{ع}$ = ٣ − ٢ ت

ويكون : ع + $\overline{ع}$ = (٣ + ٢ ت) + (٣ − ٢ ت) = ٦ (∈ ح)

، ع × $\overline{ع}$ = (٣ + ٢ ت) (٣ − ٢ ت) = ٩ + ٤ = ١٣ (∈ ح)

قسمة عددين مركبين

لأى عددين مركبين ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ حيث ع$_{٢}$ ≠ ٠ يكون : $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{ع_{١}\,\overline{ع_{٢}}}{ع_{٢}\,\overline{ع_{٢}}}$

أى أن : لإيجاد خارج قسمة $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ نضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق ع$_{٢}$ أى فى $\overline{ع_{٢}}$

فمثلاً :

• $\frac{٣٠ + ٤٥ت}{١ - ٢ت} = \frac{٣٠ + ٤٥ت}{١ - ٢ت} \times \frac{١ + ٢ت}{١ + ٢ت} = \frac{٣٠ + ١٠٥ت + ٩٠ت^{٢}}{١ - ٤ت^{٢}} = \frac{-٦٠ + ١٠٥ت}{٥}$

$= -١٢ + ٢١ت$

• $\frac{٤ + \sqrt{-٢٥}}{٢ - \sqrt{-٩}} = \frac{٤ + ٥ت}{٢ - ٣ت} \times \frac{٢ + ٣ت}{٢ + ٣ت} = \frac{٨ + ٢٢ت + ١٥ت^{٢}}{٤ - ٩ت^{٢}} = \frac{-٧ + ٢٢ت}{١٣}$

$= \frac{-٧}{١٣} + \frac{٢٢}{١٣}ت$

ملاحظات

① $\overline{(ع_{١} \pm ع_{٢})} = \overline{ع_{١}} \pm \overline{ع_{٢}}$

② $\overline{(ع_{١} \times ع_{٢})} = \overline{ع_{١}} \times \overline{ع_{٢}}$

③ $\overline{\left(\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}\right)} = \frac{\overline{ع_{١}}}{\overline{ع_{٢}}}$ حيث ع$_{٢}$ ≠ صفر

④ $\overline{\overline{ع}} = ع$

⑤ إذا كان : ع عددًا حقيقيًا فإن : $\overline{ع} = ع$

فمثلاً : إذا كان : ع = ٥ فإن : $\overline{ع} = ٥$

حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد فى ك

مثال

أوجد مجموعة الحل فى ك لكل من المعادلتين الآتيتين :

① س^{٢} + ٤ = ٠ ② س^{٢} + ٢ س + ٢ = ٠

الحل

① س^{٢} + ٤ = ٠ ∴ س^{٢} = −٤

∴ س = ± $\sqrt{-٤}$ ∴ س = ± ٢ ت

∴ مجموعة الحل فى ك = {٢ ت ، −٢ ت}

② س^{٢} + ٢ س + ٢ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = ٢ ، حـ = ٢

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أحـ}}{٢أ} = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤ - ٨}}{٢} = \frac{-٢ \pm \sqrt{-٤}}{٢} = \frac{-٢ \pm ٢ت}{٢}$

$= -١ \pm ت$

∴ مجموعة الحل فى ك = {−١ + ت ، −١ − ت}

ملاحظة

إذا كان : ع = س$_{١}$ + ص$_{١}$ ت أحد جذرى المعادلة :

أس^{٢} + ب س + حـ = ٠ حيث أ ∈ ح* ، ب ∈ ح ، حـ ∈ ح

فإن : الجذر الآخر هو $\overline{ع}$ = س$_{١}$ − ص$_{١}$ ت

أى أنه : إذا كان أحد جذور المعادلة التربيعية التى معاملات حدودها أعداد حقيقية هو عدد مركب فإن الجذر الآخر هو مرافق هذا العدد المركب.

تمارين

على المتطلبات القبلية
(الصورة الجبرية للعدد المركب)

مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسي

• مهم • تفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : ٢ س + ٢ ت ص − ٦ + ٤ ت س = ٠ فإن : (س ، ص) = ...

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (٢ ، −٤) (جـ) (−٢ ، ٤) (د) (−٢ ، −٤)

② مجموعة حل المعادلة : س^{٢} + ٩ = ٠ في ك هي .....

(أ) {±٣} (ب) {±ت} (جـ) {± ٣ ت} (د) {−٩}

③ إذا كان : ع = ١ + ت فإن : $\frac{ع}{\bar{ع}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) − ت (د) ت

④ إذا كان : ع = أ + ب ت ، ع + $\bar{ع}$ = ٦ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) −٣ (جـ) ٦ (د) −٦

⑤ إذا كان : س + ت ص = ت (٢ + ت) فإن : س − ص = ...

(أ) ٢ (ب) −٣ (جـ) ٦ (د) −٦

⑥ إذا كان : ع = ٢ − ت فإن : ع − $\bar{ع}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) −٢ ت (د) ٢ ت

⑦ إذا كان : أ + ب ت = ت (١ − ٥ ت)^{٢} فإن : ب = ...

(أ) ١٠ (ب) −١٠ (جـ) ٢٤ (د) −٢٤

⑧ ت^{ن} × ت$^{ن+١}$ × ت$^{ن+٢}$ × ت$^{ن+٣}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ت

⑨ ت^{ن} + ت$^{ن+١}$ + ت$^{ن+٢}$ + ت$^{ن+٣}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ت

⑩ إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ ت س^{٢} − ٤ ت س + ٣ ت^{٣} = ٠

فإن : ل^{٢} + م^{٢} = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

⑪ ت^{٥٧} + $\frac{١}{ت^{٢٥}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −١

⑫ (١ + ت)^{١٢} = ...

(أ) −٨ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) −٦٤

⑬ (١ + ت)^{٥} (١ + $\frac{١}{ت}$)^{٥} = ...

(أ) −٨ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) −٦٤

⑭ ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ... + ت^{١٠٠} = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ١٠٠

⑮ $\left(\frac{٢ ت}{١ + ت}\right)^{٥}$ = ...

(أ) ١ + ت (ب) ١ − ت (جـ) −٤ − ٤ ت (د) ٤ − ٤ ت

⑯ إذا كان : (١ + ت)^{٢ن} = (١ − ت)^{٢ن} فإن أقل قيمة للعدد ن من القيم التالية تحقق ذلك هي .....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ١٢

⑰ إذا كان : $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{أ + ب ت}$ = ٢ + ٣ ت فإن : أ × ب = ...

حيث أ ، ب ∈ ح*

(أ) −٦ (ب) −٥ (جـ) ٥ (د) ٦

⑱ إذا كانت : د (س) = ٢ س^{٤} − ٣ س^{٣} + ٥ س^{٢} − ٣ س + ١

فإن : د (ت) = ...

(أ) −٢ (ب) ٢ (جـ) ٢ + ت (د) ٢ − ت

(١٩) إذا كان : ٢ ، ٢ − ت جذرين لمعادلة من الدرجة الثالثة معاملاتها حقيقية فإن الجذر الثالث لهذه المعادلة هو .....

(أ) −٢ (ب) ٢ + ت (جـ) −٢ + ت (د) ٢ − ت

(٢٠) إذا كان : $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين مترافقين

فإن : $\frac{١}{ع_١} + \frac{١}{ع_٢}$ يمكن أن يساوى .....

(أ) ٩ − ٤ ت (ب) ٥ ت (جـ) ١٣ (د) ١ + ت

(٢١) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية : $س^٢ + ١ = ٠$

فإن : $ل^{٢٠٢٢} + م^{٢٠٢٢}$ = ...

(أ) −٢ ت (ب) ٢ ت (جـ) −٢ (د) ٢٠١٨

(٢٢) إذا كانت : أ ، ب ، حـ ، ء أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية

فإن : $ت^{أ} + ت^{ب} + ت^{حـ} + ت^{ء}$ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ت

(٢٣) إذا كان : $ت^{م} = ت^{ن}$ فأى مما يأتى دائمًا صحيح ؟

(١) م = ن (٢) (م + ن) عدد زوجى (٣) (ن − م) مضاعف للعدد ٤

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٣) فقط.

(جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) جميع ما سبق.

(٢٤) إذا كان : أ < ب < ٠ < حـ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية

وكان : $\sqrt{ب(حـ - أ)} + \sqrt{أ ب} = ٢ + ٣ ت$

فإن : ب حـ = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) −٥

(٢٥) أى من الآتى صحيح ؟

(أ) ٢ + ٣ ت < ٣ + ٤ ت (ب) ٣ − ٤ ت < ٢ − ٣ ت

(جـ) ١ + ت > −١ − ت (د) لا شئ مما سبق.

(٢٦) $ت^{ك} + ت^{ك+١} + ت^{ك+٢} + ت^{ك+٣} + ... + ت^{ك+٢٥}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ ت (جـ) ٢ ت + ٢٥ (د) ٢ ت + ٢٠

أوجد العدد المركب الذى يساوى كلاً مما يأتى :

(١) $(٣ - ٢ ت)^٢ + (٣ + ٢ ت)^٢$

(٢) $(١ + ت)^٤ - (١ - ت)^٤$

(٣) $(١ - ت^٥)(١ - ت^{١٠})(١ - ت^{١٥})$

(٤) $(\sqrt{٨} - \sqrt{-٥٤})(\sqrt{١٨} - \sqrt{-٢٤})$

(٥) $(٢ - \frac{١}{ت})^٦$

(٦) $\frac{٣}{٢ + ت}$

(٧) $\frac{٢ + ت}{٢ - ٤ ت}$

(٨) $\frac{٤ - ٥ ت}{٧ ت}$

أوجد فى ك مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

(١) $س^٢ + ١ = ٠$

(٢) $س^٤ - ١٦ = ٠$

(٣) $س^٢ + ٤ س + ٥ = ٠$

(٤) $س^٢ - ٦ س + ٢٥ = ٠$

أوجد قيم س ، ص الحقيقية التى تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

(١) $٢ س - ٢ ت ص = (٥ - ت)^٢$

(٢) $س^٢ - ص^٢ + ت (س + ص) = ٣ (١ + ت)$

(٣) $(س + ٢ ص ت)^٢ + \frac{٨ (١ - ت)}{١ + ت} + ١٥ = ٠$

إذا كان (−٢) جذرًا للمعادلة : $س^٣ + س^٢ - س + ١٥ = ٠$ فأوجد الجذرين الآخرين.

إذا كانت : ع ∈ ك وكان $ع^٢ - \bar{ع} = ٠$

فأوجد قيمة ع وأثبت أن هناك قيمتين للعدد ع مترافقتين.

إذا كان ع عددًا مركبًا فأوجد مجموعة حل المعادلة : $٢ ع - ٣ \bar{ع} = ٥ + ١٠ ت$

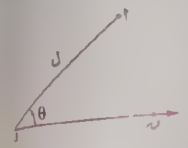
الدرس 1

الصورة المثلثية للعدد المركب

الإحداثيات القطبية

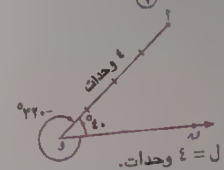
يعتمد تعيين نقطة ولتكن (أ) فى النظام القطبى على بعد هذه النقطة عن نقطة ثابتة فى المستوى ولتكن (و) وقياس الزاوية المحصورة بين المحور القطبى وليكن $\overleftarrow{\text{و س}}$ الذى غالبًا ما يمثله شعاع أفقى يبدأ من نقطة و ومتجهًا يمينًا والشعاع $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ويكون قياس الزاوية موجبا إذا كان اتجاه الزاوية بدءًا من المحور القطبى ضد اتجاه عقارب الساعة وسالبًا إذا كان مع اتجاه عقارب الساعة.

فى الشكل المقابل :



إذا رمزنا لبعد النقطة أ عن و بالرمز (ل) ولقياس الزاوية الموجهة (د $\overleftarrow{\text{و س}}$ و أ) بالرمز (θ) فإن النقطة (أ) فى النظام القطبى تعين بالزوج المرتب (ل ، θ)

فمثلًا : ①

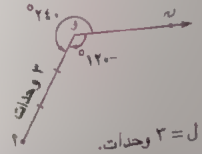


ل = ٤ وحدات.

θ = ٤٠° أو θ = -٣٢٠°

∴ أ (٤ ، ٤٠°) أو (٤ ، -٣٢٠°)

②



ل = ٣ وحدات.

θ = -١٢٠° أو θ = ٢٤٠°

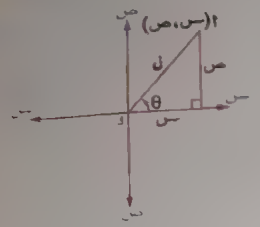
∴ أ (٣ ، -١٢٠°) أو (٣ ، ٢٤٠°)

ملاحظة

إذا كان θ أصغر قياس موجب للزاوية الموجهة د $\overleftarrow{\text{و س}}$ و أ فى النظام القطبى فإنه يمكن التعبير عن أ بعدد لا نهائى من الأزواج المرتبة التى كل منها يكون على الصورة (ل ، θ ± ٣٦٠° ن) حيث ن ∈ ص

فمثلًا : إذا كانت : أ (٦ ، ٣٠°) فإنه يمكن التعبير عن أ بعدد لا نهائى من الأزواج المرتبة مثل . أ (٦ ، -٣٣٠°) أو (٦ ، ٣٩٠°) أو (٦ ، -٦٩٠°) أو ...

تحويل الإحداثيات القطبية إلى الديكارتية



إذا انطبق المحور القطبى على الجزء الموجب لمحور السينات فإنه يمكن تحويل الإحداثيات القطبية لأى نقطة أ (ل ، θ) إلى إحداثيات ديكارتية أ (س ، ص) كالآتى :

س = ل جتا θ ، ص = ل جا θ

أى أن أ (س ، ص) = أ (ل جتا θ ، ل جا θ)

ملاحظة

يمكن تحويل الإحداثيات الديكارتية لنقطة أ (س ، ص) إلى إحداثيات قطبية أ (ل ، θ) بإيجاد ل ، θ كالآتى : ل = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ ، ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

∴ θ = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$

مثال ①

عبر عن أ فى كل مما يأتى بالإحداثيات الديكارتية :

① أ (٥ ، ١٥٠°) ② أ (٣ ، -١٢٠°)

الحل

① ∵ ل = ٥ وحدات طول ، θ = ١٥٠°

∴ س = ل جتا θ = ٥ جتا ١٥٠° = $-\frac{٥}{٢}\sqrt{٣}$

، ص = ل جا θ = ٥ جا ١٥٠° = $\frac{٥}{٢}$

∴ أ $\left(-\frac{٥}{٢}\sqrt{٣} ، \frac{٥}{٢}\right)$ «الصورة الديكارتية»

② ∵ ل = ٣ وحدات طول ، θ = -١٢٠°

∴ س = ل جتا θ = ٣ جتا (-١٢٠°) = $\frac{-٣}{٢}$

، ص = ل جا θ = ٣ جا (-١٢٠°) = $\frac{-٣}{٢}\sqrt{٣}$

∴ أ $\left(\frac{-٣}{٢} ، \frac{-٣}{٢}\sqrt{٣}\right)$ «الصورة الديكارتية»

مثال ٢

عبر عن أ بالإحداثيات القطبية فى كل مما يأتى :

① أ (٣ ، ٣$\sqrt{٣}$)

② أ (−٥$\sqrt{٣}$ ، ٥$\sqrt{٣}$)

الحل

① ∵ ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{٩ + ٢٧}$ = ٦ وحدة طول.

، ∵ θ = طا$^{-١}$ $\left(\frac{ص}{س}\right)$ = طا$^{-١}$ $\left(\frac{٣\sqrt{٣}}{٣}\right)$ = طا$^{-١}$ ($\sqrt{٣}$)

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ θ تقع فى الربع الأول.

∴ θ = ٦٠° ∴ أ (٦ ، ٦٠°)

② ∵ ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{٥٠ + ٥٠}$ = ١٠ وحدة طول.

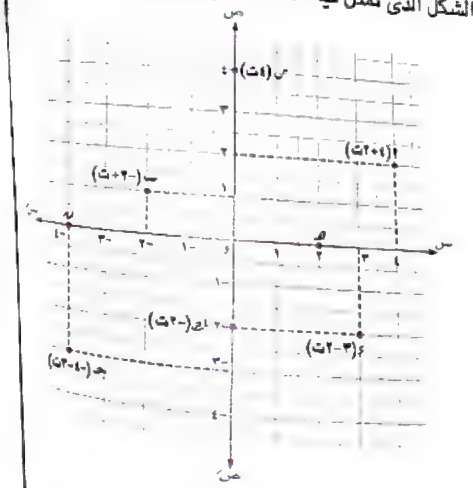
، ∵ θ = طا$^{-١}$ $\left(\frac{ص}{س}\right)$ = طا$^{-١}$ $\left(\frac{٥\sqrt{٣}}{-٥\sqrt{٣}}\right)$ = طا$^{-١}$ (−١)

، ∵ س < ٠ ، ص > ٠ ∴ θ تقع فى الربع الثانى.

∴ θ = ١٣٥° ∴ أ (١٠ ، ١٣٥°)

مستوى أرجاند

استخدم العالم أرجاند المستوى الإحداثى المتعامد فى تمثيل العدد المركب على الصورة س + ت ص بجعل المحور الأفقى $\overleftrightarrow{س س}$ يمثل الجزء الحقيقى والمحور $\overleftrightarrow{ص ص}$ يمثل الجزء التخيلى من العدد المركب ولذلك عرف الشكل الذى تمثل فيه الأعداد المركبة بيانيًا بشكل أرجاند أو مستوى أرجاند.



من الشكل المقابل :

أ تمثل العدد (٤ + ٢ ت)

، ب تمثل العدد (−٢ + ت)

، جـ تمثل العدد (−٤ − ٢ ت)

، د تمثل العدد (٣ − ٢ ت)

، هـ تمثل العدد (٢)

، ن تمثل العدد (٤ ت)

، ك تمثل العدد (−٢ ت)

، و تمثل العدد (−٤)

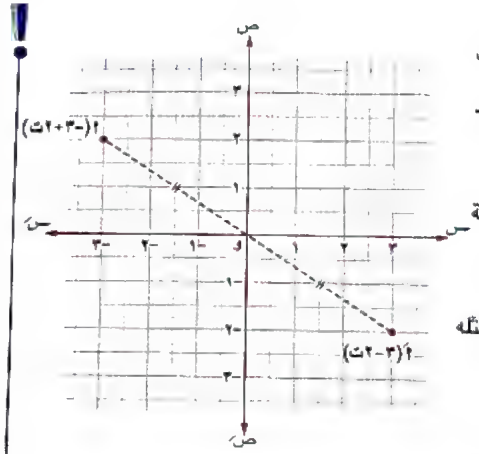
ملاحظات !

① النقطتان اللتان تمثلان العدد المركب ومعكوسه الجمعى على شكل أرجاند تكونان متماثلتين بالنسبة لنقطة الأصل أى هما طرفا قطعة مستقيمة تكون نقطة الأصل فى منتصفها

فمثلًا : إذا كان ع = −٣ + ٢ ت تمثله نقطة أ ومعكوسه الجمعى

− ع = ٣ − ٢ ت تمثله نقطة أَ

فإن : و نقطة تماثل $\overline{أأَ}$ أى و منتصف $\overline{أأَ}$



② العددان المركبان المترافقان يمثلان فى شكل أرجاند بنقطتين متماثلتين بالنسبة لمحور السينات $\overleftrightarrow{س س}$

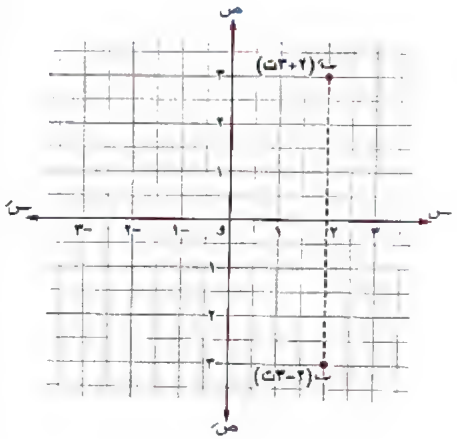
فمثلًا : إذا كان : ع = ٢ − ٣ ت

تمثله نقطة ب ومرافقه

$\bar{ع}$ = ٢ + ٣ ت

تمثله نقطة بَ

فإن : $\overleftrightarrow{س س}$ هو محور تماثل $\overline{ب بَ}$



الوحدة 2

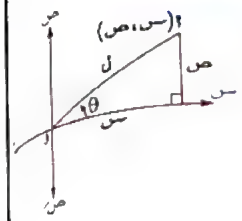
المقياس والسعة والصورة المثلثية (القطبية) للعدد المركب

المقياس والسعة والصورة المثلثية (القطبية) للعدد المركب

إذا كان العدد المركب ع = س + ت ص تمثله النقطة

أ(س ، ص) فى الإحداثيات الديكارتية وكانت الإحداثيات

القطبية لنفس النقطة أ(ل ، θ) فإن :



① مقياس العدد ع : هو بعد النقطة التى تمثل العدد ع عن نقطة الأصل و يرمز له بالرمز |ع|

أى أن : |ع| = ل = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

② سعة العدد ع : تسمى θ بسعة العدد ع

وإذا كانت θ ∈]-π ، π]

فإن : θ تسمى السعة الأساسية للعدد ع حيث : ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

أى أن : θ = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$

③ الصورة المثلثية (القطبية) للعدد المركب ع

∵ س = ل جتا θ ، ص = ل جا θ ، ∵ ع = س + ت ص (الصورة الجبرية)

∴ ع = ل جتا θ + ت ل جا θ ∴ ع = ل (جتا θ + ت جا θ) (الصورة القطبية)

ملاحظات :

تحدد قيمة θ تبعًا للحالات الآتية :

① (١) إذا كان : س > ٠ ، ص > ٠ فإن : θ تقع فى الربع الأول.

∴ θ = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$

(٢) إذا كان : س < ٠ ، ص > ٠ فإن : θ تقع فى الربع الثانى.

∴ θ = π + ظا$^{-1}$ $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$

(٣) إذا كان : س < ٠ ، ص < ٠ فإن : θ تقع فى الربع الثالث.

∴ θ = -π + ظا$^{-1}$ $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$

(٤) إذا كان : س > ٠ ، ص < ٠ فإن : θ تقع فى الربع الرابع.

∴ θ = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$

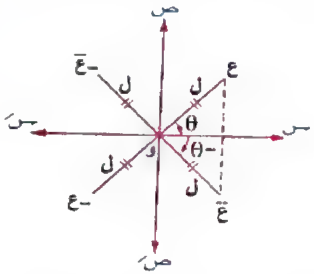
② (١) إذا كان : س > ٠ ، ص = ٠ فإن : θ = ٠

(٢) إذا كان : س < ٠ ، ص = ٠ فإن : θ = π

(٣) إذا كان : س = ٠ ، ص > ٠ فإن : θ = $\frac{\pi}{2}$

(٤) إذا كان : س = ٠ ، ص < ٠ فإن : θ = $\frac{-\pi}{2}$

• **خواص المقياس والسعة للعدد المركب :**



لكل عدد مركب ع = س + ص ت وسعته θ يكون :

① |ع| ≥ ٠

مع ملاحظة أن : |ع| = ٠ إذا وفقط إذا كان ع = ٠

② |ع| = |ع̄| = |-ع| = |-ع̄|

أى أن : العدد ومرافقه ومعكوسه الجمعى والمعكوس الجمعى لمرافقه لهم نفس المقياس

③ ع ع̄ = |ع|^2 = |ع̄|^2

④ سعة العدد المركب تأخذ عدد غير منته من القيم وذلك بإضافة عدد صحيح من الدورات الكاملة (٢ π)

أى أن : سعة العدد المركب = θ + ٢ π ن حيث ن ∈ ص

⑤ سعة العدد المركب لا تتغير عند ضربه فى عدد حقيقى موجب

أى أن : سعة (ع) = سعة (ك ع) حيث ك ∈ ح$^+$

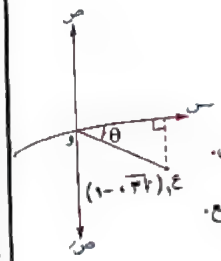
مثال ٣

أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية :

① $ع_١ = \sqrt{٣} - ت$ ② $ع_٢ = \frac{-١}{\sqrt{٢} - \sqrt{٢}\,ت}$

③ $ع_٣ = -٤ت$ ④ $ع_٤ = ٦$

الحل



① ∵ $ع_١ = \sqrt{٣} - ت$

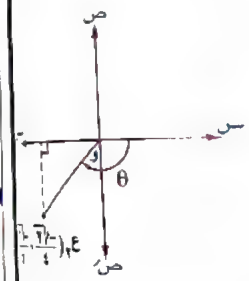
∴ س = $\sqrt{٣}$ ، ص = -١

∴ |ع١| = ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{١ + ٣} = ٢$ وحدة طول.

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ θ تقع فى الربع الرابع.

∴ θ = $ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right) = ظا^{-١}\left(\frac{-١}{\sqrt{٣}}\right) = \frac{-\pi}{٦}$

∴ مقياس العدد $ع_١$ = ٢ وحدة طول ، والسعة الأساسية للعدد $ع_١ = \frac{-\pi}{٦}$



② $ع_٢ = \frac{-١}{\sqrt{٢} - \sqrt{٢}\,ت} \times \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٢}\,ت}{\sqrt{٢} + \sqrt{٢}\,ت} = \frac{-\sqrt{٢} - \sqrt{٢}\,ت}{٢ + ٢}$

$= \frac{-\sqrt{٢} - \sqrt{٢}\,ت}{٤} = \frac{-\sqrt{٢}}{٤} - \frac{\sqrt{٢}}{٤}\,ت$

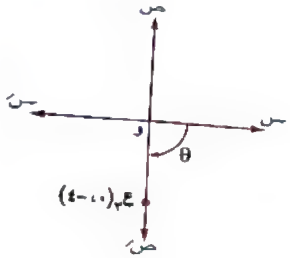
∴ س = $\frac{-\sqrt{٢}}{٤}$ ، ص = $\frac{-\sqrt{٢}}{٤}$

∴ |$ع_٢$| = ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{\frac{٢}{١٦} + \frac{٢}{١٦}} = \frac{١}{٢}$

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ θ تقع فى الربع الثالث.

∴ θ = $-\pi + ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right) = -\pi + ظا^{-١}\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٤} \div \frac{-\sqrt{٢}}{٤}\right) = -\pi + ظا^{-١}(١) = -\frac{٣}{٤}\pi$

∴ مقياس العدد $ع_٢$ = $\frac{١}{٢}$ وحدة طول ، السعة الأساسية للعدد $ع_٢ = -\frac{٣}{٤}\pi$



③ $ع_٣ = -٤ت$

∴ س = ٠ ، ص = -٤

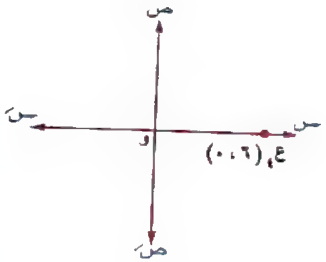
∴ |$ع_٣$| = $\sqrt{٠ + ١٦} = ٤$ وحدة طول.

، ∵ س = ٠ ، ص < ٠

∴ θ = $\frac{-\pi}{٢}$

∴ مقياس العدد $ع_٣$ = ٤ وحدة طول.

، والسعة الأساسية للعدد $ع_٣ = \frac{-\pi}{٢}$



④ $ع_٤ = ٦$

∴ س = ٦ ، ص = ٠

∴ |$ع_٤$| = $\sqrt{٣٦ + ٠} = ٦$ وحدة طول.

، ∵ س > ٠ ، ص = ٠

∴ θ = ٠

∴ مقياس العدد $ع_٤$ = ٦ وحدة طول ، السعة الأساسية للعدد $ع_٤$ = ٠

مثال ٤

عبر عن كل من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية :

① $ع_١ = -٢ + ٢ت$ ② $ع_٢ = -٤ - ٤\sqrt{٣}\,ت$ ③ $ع_٣ = ٢\sqrt{٣} - ٢ت$

الحل

① $ع_١ = -٢ + ٢ت$ ∴ س = -٢ ، ص = ٢

∴ |$ع_١$| = ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{٤ + ٤} = ٢\sqrt{٢}$

، ∵ س < ٠ ، ص > ٠ ∴ θ تقع فى الربع الثانى.

∴ θ = $\pi + ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right) = \pi + ظا^{-١}\left(\frac{٢}{-٢}\right)$

$= \pi + ظا^{-١}(-١) = \pi + \left(\frac{-١}{٤}\right)\pi = \frac{٣}{٤}\pi$

، ∵ $ع_١$ = ل (جتا θ + ت جا θ) ∴ $ع_١ = ٢\sqrt{٢}\left(جتا\frac{٣}{٤}\pi + ت\,جا\frac{٣}{٤}\pi\right)$

② $ع_١ = -٤ - ٤\sqrt{٣}\,ت$ ∴ س = −٤ ، ص = −٤ $\sqrt{٣}$

∴ $|ع_١| = ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{١٦ + ٤٨} = ٨$

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ θ تقع فى الربع الثالث.

∴ $\theta = -\pi + ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right) = -\pi + ظا^{-١}\left(\frac{-٤\sqrt{٣}}{-٤}\right)$

$= -\pi + ظا^{-١}\left(\sqrt{٣}\right) = -\pi + \frac{\pi}{٣} = \frac{-٢}{٣}\pi$

، ∵ $ع_١ = ل\left(جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta\right)$ ∴ $ع_١ = ٨\left(جتا\left(\frac{-٢}{٣}\pi\right) + ت\,جا\left(\frac{-٢}{٣}\pi\right)\right)$

③ $ع_١ = ٢\sqrt{٣} - ٢\,ت$ ∴ س = ٢ $\sqrt{٣}$ ، ص = −٢

∴ $|ع_١| = ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{١٢ + ٤} = ٤$

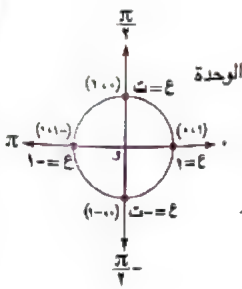
، ∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ θ تقع فى الربع الرابع.

∴ $\theta = ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right) = ظا^{-١}\left(\frac{-٢}{٢\sqrt{٣}}\right) = ظا^{-١}\left(\frac{١}{-\sqrt{٣}}\right) = -\frac{\pi}{٦}$

∴ $ع_١ = ل\left(جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta\right) = ٤\left(جتا\left(\frac{-\pi}{٦}\right) + ت\,جا\left(\frac{-\pi}{٦}\right)\right)$

لاحظ أن

الأعداد المركبة ١ ، ت ، −١ ، −ت يمثلها جميعًا فى شكل أرجاند نقط تقع على دائرة مركزها «و» وطول نصف قطرها الوحدة وتنتج من تقاطع هذه الدائرة مع محورى الإحداثيات نجد أن مقياس كل منها يساوى الواحد الصحيح أى ل = ١ والسعة الأساسية لكل منها على الترتيب هى : ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، π ، $\frac{-\pi}{٢}$ ولذلك يمكن التعبير عنها بالصورة المثلثية كالآتى :



١ = جتا ٠° + ت جا ٠° ، ت = جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$

، −١ = جتا π + ت جا π ، −ت = جتا $\left(\frac{-\pi}{٢}\right)$ + ت جا $\left(\frac{-\pi}{٢}\right)$

مثال ٥ اكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية :

① ٥ ② ٣ ت ③ $-\sqrt{٣}$ ④ $-\frac{١}{٢}$ ت

الحل

① ٥ = ٥ × ١ = ٥ (جتا ٠° + ت جا ٠°) ② ٣ ت = ٣ × ت = ٣ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)

③ $-\sqrt{٣} = \sqrt{٣} \times -١ = \sqrt{٣}$ (جتا π + ت جا π)

④ $-\frac{١}{٢}$ ت = $\frac{١}{٢} \times -ت = \frac{١}{٢}\left(جتا\left(\frac{-\pi}{٢}\right) + ت\,جا\left(\frac{-\pi}{٢}\right)\right)$

مثال ٦ عبر عن كل من الأعداد الآتية بالصورة المثلثية وكذا الصورة الجبرية :

① العدد $ع_١$ الذى مقياسه ٢ وسعته الأساسية $\frac{\pi}{٢}$

② العدد $ع_١$ الذى مقياسه ٣ وسعته $\frac{٤\pi}{٣}$

③ العدد $ع_١$ الذى مقياسه ٢ $\sqrt{٢}$ وسعته ٣١٥°

④ العدد $ع_١$ الذى مقياسه ٤ وسعته $\frac{\pi}{٤} + ٢ن\pi$ حيث ن ∈ ص

الحل

① ∵ $|ع_١| = ٢$ ، $\theta = \frac{\pi}{٢}$ ∴ $ع_١ = ٢\left(جتا\frac{\pi}{٢} + ت\,جا\frac{\pi}{٢}\right)$ «الصورة المثلثية»

، ∵ جتا $\frac{\pi}{٢}$ = ٠ ، جا $\frac{\pi}{٢}$ = ١ ∴ $ع_١$ = ٢ (٠ + ت × ١) = ٢ ت «الصورة الجبرية»

② ∵ $|ع_١| = ٣$ ، ∵ سعة العدد $ع_١ = \frac{٤\pi}{٣}$

∴ السعة الأساسية للعدد $ع_١$ $(\theta) = \frac{٤\pi}{٣} - ٢\pi = \frac{-٢}{٣}\pi$

∴ $ع_١ = ٣\left(جتا\left(\frac{-٢}{٣}\pi\right) + ت\,جا\left(\frac{-٢\pi}{٣}\right)\right)$ «الصورة المثلثية»

، ∵ جتا $\left(\frac{-٢}{٣}\pi\right)$ = جتا (−١٢٠°) = $-\frac{١}{٢}$ ، ∵ جا $\left(\frac{-٢\pi}{٣}\right)$ = جا (−١٢٠°) = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $ع_١ = ٣\left(\frac{-١}{٢} + \frac{-\sqrt{٣}}{٢}ت\right) = \frac{-٣}{٢} - \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ت «الصورة الجبرية»

③ ∵ |ع₂| = ٢√٢ ، ∴ سعة العدد ع₂ = ٣١٥°

∴ السعة الأساسية للعدد ع₂ (θ) = ٣١٥° − ٣٦٠° = −٤٥°

∴ ع₂ = ٢√٢ (جتا (−٤٥°) + ت جا (−٤٥°)) «الصورة المثلثية»

، ∵ جتا (−٤٥°) = √٢/٢ ، جا (−٤٥°) = −√٢/٢

∴ ع₂ = ٢√٢ (√٢/٢ − √٢/٢ ت) = ٢ − ٢ ت «الصورة الجبرية»

④ ∵ |ع₤| = ٤ ، ∵ سعة العدد ع₤ = π/٤ + ٢ ن π حيث ن ∈ ص

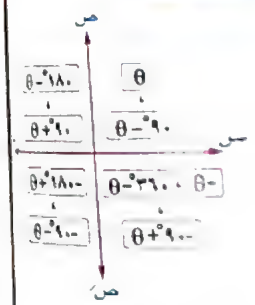
∴ السعة الأساسية للعدد ع₤ (θ) = π/٤

∴ ع₤ = ٤ (جتا π/٤ + ت جا π/٤) «الصورة المثلثية»

، ∵ جتا π/٤ = جتا ٤٥° = √٢/٢ ، جا π/٤ = جا ٤٥° = √٢/٢

∴ ع₤ = ٤ (√٢/٢ + √٢/٢ ت) = ٢√٢ + ٢√٢ ت «الصورة الجبرية»

تحويل الصورة المثلثية الغير قياسية إلى الصورة القياسية



- نحدد الربع حسب الإشارة التي أمام الدوال المثلثية بالجزئين الحقيقي والتخيلي.
- في حالة وجود دالة جيب التمام بالجزء الحقيقي ودالة الجيب بالجزء التخيلي (الدوال المثلثية مضبوطة) تنسب الزوايا إلى ١٨٠° أو ٣٦٠°
- في حالة وجود دالة الجيب بالجزء الحقيقي ودالة جيب التمام بالجزء التخيلي (الدوال المثلثية معكوسة) تنسب الزوايا إلى ٩٠° ، −٩٠°

ثم نستخدم الشكل التالي :

الربع الأول

- إذا كان : ع = ل (جتا θ + ت جا θ) (الدوال المثلثية مضبوطة)
  تبقى كما هي : ع = ل (جتا θ + ت جا θ)
- إذا كان : ع = ل (جا θ + ت جتا θ) (الدوال المثلثية معكوسة)
  تحول للصورة
  ع = ل [جتا (٩٠° − θ) + ت جا (٩٠° − θ)]

الربع الثاني

- إذا كان : ع = ل (− جتا θ + ت جا θ) (الدوال المثلثية مضبوطة)
  تحول إلى ع
  = ل [جتا (١٨٠° − θ) + ت جا (١٨٠° − θ)]
- إذا كان : ع = ل (− جا θ + ت جتا θ) (الدوال المثلثية معكوسة)
  تحول إلى
  ع = ل [جتا (٩٠° + θ) + ت جا (٩٠° + θ)]

الربع الرابع

- إذا كان : ع = ل (جتا θ − ت جا θ) (الدوال المثلثية مضبوطة)
  تحول إلى ع
  = ل [جتا (−θ) + ت جا (−θ)]
- إذا كان : ع = ل (جا θ − ت جتا θ) (الدوال المثلثية معكوسة)
  تحول إلى
  ع = ل [جتا (−٩٠° + θ) + ت جا (−٩٠° + θ)]

الربع الثالث

- إذا كان : ع = ل (− جتا θ − ت جا θ) (الدوال المثلثية مضبوطة)
  تحول إلى ع
  = ل [جتا (−١٨٠° + θ) + ت جا (−١٨٠° + θ)]
- إذا كان : ع = ل (− جا θ − ت جتا θ) (الدوال المثلثية معكوسة)
  تحول إلى
  ع = ل [جتا (−٩٠° − θ) + ت جا (٩٠° − θ)]

لاحظ أن

- الطريقة السابقة تستخدم لكل ل > ٠ ، θ ∈ [٠ ، ٢π[
- إذا كانت السعة التي حصلنا عليها ∈]−π ، π[فإنها تكون هي السعة الأساسية.
- إذا لم تكن السعة التي حصلنا عليها أساسية نضيف إليها ٣٦٠° أو نحذف منها ٣٦٠° نحصل على السعة الأساسية.

مثال ٧

أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد الآتية واكتب العدد بصورته المثلثية :

① ع₁ = −٤ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

② ع₂ = ٦ (جا ٤/٣ π + ت جتا ٤/٣ π)

③ ع₣ = ٣ (جا ١٢٠° + ت جتا ١٢٠°)

④ ع₤ = ٨ (جتا ٢٤٠° − ت جا ٢٤٠°)

الحل

① $ع_1 = ٤ (-\text{جتا } ٤٥° - ت \text{ جا } ٤٥°)$

∵ إشارتى الدوال المثلثية (− ، −)

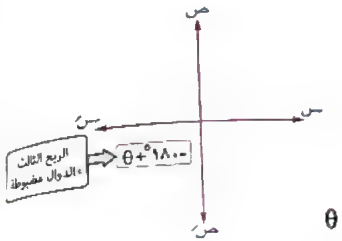
∴ نختار الربع الثالث.

، ∵ الدوال المثلثية مضبوطة.

∴ السعة الأساسية للعدد $ع_1 = -١٨٠° + \theta$

$= -١٨٠° + ٤٥° = -١٣٥°$

، مقياس العدد $ع_1 = ٤$ وصورته المثلثية هى : $ع_1 = ٤ (\text{جتا } (-١٣٥°) + ت \text{ جا } (-١٣٥°))$



② $ع_2 = ٦ (\text{جا } \frac{٤}{٣}\pi + ت \text{ جتا } \frac{٤}{٣}\pi)$

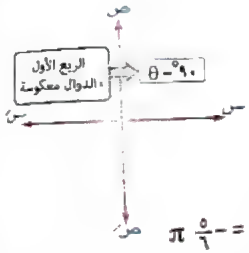
∵ إشارتى الدوال المثلثية (+ ، +)

∴ نختار الربع الأول.

، ∵ الدوال المثلثية معكوسة.

∴ السعة الأساسية للعدد $ع_2 = ٩٠° - \theta = \frac{\pi}{٢} - \frac{٤}{٣}\pi = -\frac{٥}{٦}\pi$

ومقياس العدد $ع_2 = ٦$ وصورته المثلثية $= ٦ \left(\text{جتا } \left(\frac{-٥}{٦}\right)\pi + ت \text{ جا } \left(\frac{-٥}{٦}\right)\pi\right)$



③ $ع_3 = ٣ (\text{جا } ١٢٠° + ت \text{ جتا } ١٢٠°)$

∵ إشارتى الدوال المثلثية (+ ، +)

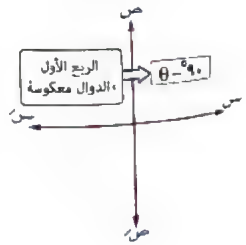
∴ نختار الربع الأول.

، ∵ الدوال المثلثية معكوسة.

∴ السعة الأساسية للعدد $ع_3 = ٩٠° - \theta$

$= ٩٠° - ١٢٠° = -٣٠°$

، مقياس العدد $ع_3 = ٣$ ، وصورته المثلثية $= ٣ (\text{جتا } (-٣٠°) + ت \text{ جا } (-٣٠°))$



④ $ع_4 = ٨ (\text{جتا } ٢٤٠° - ت \text{ جا } ٢٤٠°)$

∵ إشارتى الدوال المثلثية (+ ، −)

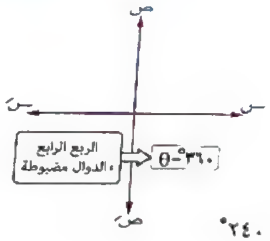
∴ نختار الربع الرابع.

، ∵ الدوال المثلثية مضبوطة.

∴ السعة الأساسية للعدد $ع_4 = ٣٦٠° - \theta = ٣٦٠° - ٢٤٠°$

$= ١٢٠°$

، مقياس العدد $ع_4 = ٨$ ، وصورته المثلثية $ع_4 = ٨ (\text{جتا } ١٢٠° + ت \text{ جا } ١٢٠°)$



مثال ٨

إذا كان : $ع = ل (\text{جتا } \theta + ت \text{ جا } \theta)$

فاكتب الصورة المثلثية لكل من الأعداد الآتية حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$:

① $-ع$ ② $\bar{ع}$ ③ $-\bar{ع}$

④ $\frac{١}{ع}$ ⑤ $\frac{١}{\bar{ع}}$

الحل

① $-ع = -ل (\text{جتا } \theta + ت \text{ جا } \theta) = ل (-\text{جتا } \theta - ت \text{ جا } \theta)$

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠

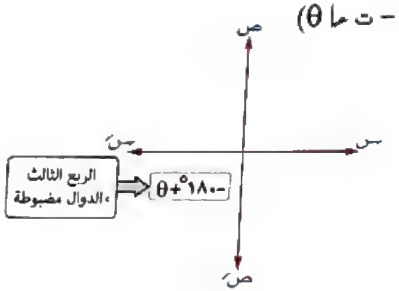
∴ −ع يقع فى الربع الثالث.

، ∵ الدوال المثلثية مضبوطة.

∴ سعة العدد $(-ع) = -١٨٠° + \theta$

ومقياس العدد $(-ع) = ل$

∴ $-ع = ل (\text{جتا } (\theta - ١٨٠°) + ت \text{ جا } (\theta - ١٨٠°))$



② $\bar{ع} = ل\,(جتا\,\theta - ت\,جا\,\theta)$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠

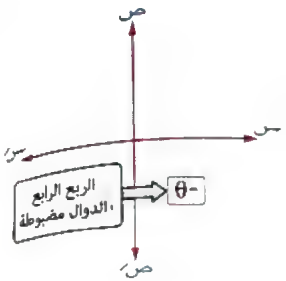
∴ $\bar{ع}$ تقع فى الربع الرابع.

، ∵ الدوال المثلثية مضبوطة.

∴ سعة العدد $\bar{ع} = -\theta$

ومقياس العدد $\bar{ع} = ل$

∴ $\bar{ع} = ل\,(جتا\,(-\theta) + ت\,جا\,(-\theta))$



③ $-\bar{ع} = -ل\,(جتا\,\theta - ت\,جا\,\theta) = ل\,(-جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta)$

∵ س < ٠ ، ص > ٠

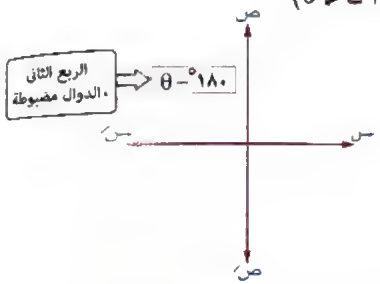
∴ $-\bar{ع}$ تقع فى الربع الثانى.

، ∵ الدوال المثلثية مضبوطة.

∴ سعة العدد $-\bar{ع} = (١٨٠° - \theta)$

، مقياس العدد $(-\bar{ع}) = ل$

∴ $-\bar{ع} = ل\,(جتا\,(١٨٠° - \theta) + ت\,جا\,(١٨٠° - \theta))$



④ $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل\,(جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta)}$ بالضرب × $(جتا\,\theta - ت\,جا\,\theta)$ بسطاً ومقاماً.

∴ $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل} \times \frac{١}{(جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta)} \times \frac{(جتا\,\theta - ت\,جا\,\theta)}{(جتا\,\theta - ت\,جا\,\theta)}$

$= \frac{١}{ل} \times \frac{(جتا\,\theta - ت\,جا\,\theta)}{جتا^٢\,\theta + جا^٢\,\theta} = \frac{١}{ل}\,(جتا\,\theta - ت\,جا\,\theta)$

تذكر أن:

$جا^٢\,\theta + جتا^٢\,\theta = ١$

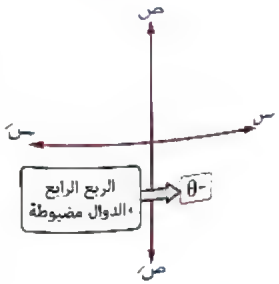
، ∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ العدد $\frac{١}{ع}$ يقع فى الربع الرابع.

، ∵ الدوال المثلثية مضبوطة.

∴ سعة العدد $\frac{١}{ع} = -\theta$ ومقياس العدد $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل}$

∴ $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل}\,(جتا\,(-\theta) + ت\,جا\,(-\theta))$



⑤ $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل\,(جتا\,\theta - ت\,جا\,\theta)} = \frac{١}{ل} \times \frac{١}{جتا\,\theta - ت\,جا\,\theta} \times \frac{جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta}{جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta}$

$= \frac{١}{ل} \times \frac{جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta}{جتا^٢\,\theta + جا^٢\,\theta} = \frac{١}{ل}\,(جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta)$

∴ سعة العدد $\frac{١}{ع} = \theta$ ومقياس العدد $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل}$

∴ $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل}\,(جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta)$

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة المثلثية

إذا كان : $ع_١ = ل_١\,(جتا\,\theta_١ + ت\,جا\,\theta_١)$ ، $ع_٢ = ل_٢\,(جتا\,\theta_٢ + ت\,جا\,\theta_٢)$ فإن :

❶ $ع_١\,ع_٢ = ل_١\,ل_٢\,(جتا\,(\theta_١ + \theta_٢) + ت\,جا\,(\theta_١ + \theta_٢))$

الإثبات :

$ع_١\,ع_٢ = ل_١\,(جتا\,\theta_١ + ت\,جا\,\theta_١) \times ل_٢\,(جتا\,\theta_٢ + ت\,جا\,\theta_٢)$

$= ل_١\,ل_٢\,(جتا\,\theta_١ + ت\,جا\,\theta_١)\,(جتا\,\theta_٢ + ت\,جا\,\theta_٢)$

$= ل_١\,ل_٢\,(جتا\,\theta_١\,جتا\,\theta_٢ + ت\,جتا\,\theta_١\,جا\,\theta_٢ + ت\,جا\,\theta_١\,جتا\,\theta_٢ - جا\,\theta_١\,جا\,\theta_٢)$

$= ل_١\,ل_٢\,((جتا\,\theta_١\,جتا\,\theta_٢ - جا\,\theta_١\,جا\,\theta_٢) + ت\,(جا\,\theta_١\,جتا\,\theta_٢ + جتا\,\theta_١\,جا\,\theta_٢))$

$= ل_١\,ل_٢\,(جتا\,(\theta_١ + \theta_٢) + ت\,جا\,(\theta_١ + \theta_٢))$

ولاحظ أن : مقياس حاصل ضرب عددين مركبين = حاصل ضرب مقياسيهما

أى $|ع_١\,ع_٢| = ل_١\,ل_٢ = |ع_١|\,|ع_٢|$

، سعة حاصل ضرب عددين مركبين = مجموع سعتيهما

أى سعة $(ع_١\,ع_٢)$ = سعة $ع_١$ + سعة $ع_٢$ = $\theta_١ + \theta_٢$

❷ $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢}\,(جتا\,(\theta_١ - \theta_٢) + ت\,جا\,(\theta_١ - \theta_٢))$

الإثبات :

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١\,(جتا\,\theta_١ + ت\,جا\,\theta_١)}{ل_٢\,(جتا\,\theta_٢ + ت\,جا\,\theta_٢)}$ وبضرب البسط والمقام × مرافق المقام

$$\therefore \frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2} \times \frac{\text{جتا}\,\theta_1 + \text{ت جا}\,\theta_1}{\text{جتا}\,\theta_2 + \text{ت جا}\,\theta_2} \times \frac{\text{جتا}\,\theta_2 - \text{ت جا}\,\theta_2}{\text{جتا}\,\theta_2 - \text{ت جا}\,\theta_2}$$

$$= \frac{ل_1}{ل_2} \times \frac{\text{جتا}\,\theta_1\,\text{جتا}\,\theta_2 - \text{ت جتا}\,\theta_1\,\text{جا}\,\theta_2 + \text{ت جا}\,\theta_1\,\text{جتا}\,\theta_2 + \text{جا}\,\theta_1\,\text{جا}\,\theta_2}{\text{جتا}^2\,\theta_2 + \text{جا}^2\,\theta_2}$$

$$= \frac{ل_1}{ل_2} \times \frac{(\text{جتا}\,\theta_1\,\text{جتا}\,\theta_2 + \text{جا}\,\theta_1\,\text{جا}\,\theta_2) + \text{ت}\,(\text{جا}\,\theta_1\,\text{جتا}\,\theta_2 - \text{جتا}\,\theta_1\,\text{جا}\,\theta_2)}{1}$$

$$= \frac{ل_1}{ل_2}\left(\text{جتا}\,(\theta_1 - \theta_2) + \text{ت جا}\,(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

ولاحظ أن : مقياس خارج قسمة عددين مركبين = خارج قسمة مقياسيهما أن :

$$\left|\frac{ع_1}{ع_2}\right| = \frac{ل_1}{ل_2} = \frac{|ع_1|}{|ع_2|}$$

سعة خارج قسمة عددين مركبين = الفرق بين سعتيهما

أى أن سعة $\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right)$ = سعة $ع_1$ − سعة $ع_2$ = $\theta_1 - \theta_2$

ملاحظة هامة

لاستخدام قواعد الضرب والقسمة فى الأعداد المركبة باستخدام الصورة المثلثية يجب أن تكون الأعداد فى صورتها المثلثية القياسية أى على الصورة ل (جتا θ + ت جا θ)

مثال ٩

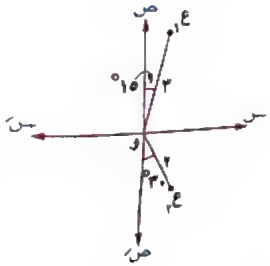
أوجد $ع_1$ ، $ع_2$ ، $\frac{ع_1}{ع_2}$ بالصورة المثلثية فى كل من الحالات الآتية :

① إذا كان : $ع_1 = ٢\,(\text{جتا}\,٦٠° + \text{ت جا}\,٦٠°)$ ، $ع_2 = ٤\,(\text{جتا}\,١٥٠° + \text{ت جا}\,١٥٠°)$

② إذا كان : $ع_1 = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٥} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٥}\right)$ ، $ع_2 = ٨\left(\text{جتا}\,\frac{-٢\pi}{٥} + \text{ت جا}\,\frac{-٢\pi}{٥}\right)$

③ إذا كان : $ع_1 = ٢\,(\text{جتا}\,١٢٠° - \text{ت جا}\,١٢٠°)$ ، $ع_2 = ٣\,(\text{جا}\,١٢٠° + \text{ت جتا}\,١٢٠°)$

④ إذا كان : $ع_1$ ، $ع_2$ ممثلين على أشكال أرجاند كما فى الشكل المقابل :



الحل

① $ع_1 = ٢\,(\text{جتا}\,٦٠° + \text{ت جا}\,٦٠°) \times ٤\,(\text{جتا}\,١٥٠° + \text{ت جا}\,١٥٠°)$

$= ٨\,(\text{جتا}\,(٦٠° + ١٥٠°) + \text{ت جا}\,(٦٠° + ١٥٠°))$

$= ٨\,(\text{جتا}\,٢١٠° + \text{ت جا}\,٢١٠°) = ٨\,(\text{جتا}\,(-١٥٠°) + \text{ت جا}\,(-١٥٠°))$

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{٢\,(\text{جتا}\,٦٠° + \text{ت جا}\,٦٠°)}{٤\,(\text{جتا}\,١٥٠° + \text{ت جا}\,١٥٠°)} = \frac{١}{٢}\,(\text{جتا}\,(٦٠° - ١٥٠°) + \text{ت جا}\,(٦٠° - ١٥٠°))$$

$= \frac{١}{٢}\,(\text{جتا}\,(-٩٠°) + \text{ت جا}\,(-٩٠°))$

② $ع_1 = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٥} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٥}\right) \times ٨\left(\text{جتا}\,\left(\frac{-٢\pi}{٥}\right) + \text{ت جا}\,\left(\frac{-٢\pi}{٥}\right)\right)$

$= ٢ \times ٨\left(\text{جتا}\,\left(\frac{\pi}{٥} + \left(\frac{-٢\pi}{٥}\right)\right) + \text{ت جا}\,\left(\frac{\pi}{٥} + \left(\frac{-٢\pi}{٥}\right)\right)\right)$

$= ١٦\left(\text{جتا}\,\left(\frac{-\pi}{٥}\right) + \text{ت جا}\,\left(\frac{-\pi}{٥}\right)\right)$

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{٢\left(\text{جتا}\,\left(\frac{\pi}{٥}\right) + \text{ت جا}\,\left(\frac{\pi}{٥}\right)\right)}{٨\left(\text{جتا}\,\left(\frac{-٢\pi}{٥}\right) + \text{ت جا}\,\left(\frac{-٢\pi}{٥}\right)\right)}$$

$= \frac{١}{٤}\left(\text{جتا}\,\left(\frac{\pi}{٥} - \left(\frac{-٢\pi}{٥}\right)\right) + \text{ت جا}\,\left(\frac{\pi}{٥} - \left(\frac{-٢\pi}{٥}\right)\right)\right)$

$= \frac{١}{٤}\left(\text{جتا}\,\left(\frac{٣\pi}{٥}\right) + \text{ت جا}\,\left(\frac{٣\pi}{٥}\right)\right)$

③ ∵ $ع_1 = ٢\,(\text{جتا}\,١٢٠° - \text{ت جا}\,١٢٠°)$

∵ إشارتى الدوال المثلثية (+ ، −) ∴ نختار الربع الرابع.

∵ الدوال المثلثية مضبوطة. ∴ السعة الأساسية للعدد $ع_1 = -١٢٠°$

∴ $ع_1 = ٢\,(\text{جتا}\,(-١٢٠°) + \text{ت جا}\,(-١٢٠°))$

∵ $ع_2 = ٣\,(\text{جا}\,١٢٠° + \text{ت جتا}\,١٢٠°)$

∵ إشارتى الدوال المثلثية (+ ، +) ∴ نختار الربع الأول.

∵ الدوال المثلثية معكوسة.

∴ السعة الأساسية للعدد $ع_2 = ٩٠° - ١٢٠° = -٣٠°$

∴ $ع_2 = ٣\,(\text{جتا}\,(-٣٠°) + \text{ت جا}\,(-٣٠°))$

∴ ع١ ع٢ = ٢ × ٣ (جتا (−١٢٠° − ٣٠°) + ت جا (−١٢٠° − ٣٠°))

= ٦ (جتا (−١٥٠°) + ت جا (−١٥٠°))

، ع١/ع٢ = ٢/٣ (جتا (−١٢٠° + ٣٠°) + ت جا (−١٢٠° + ٣٠°))

= ٢/٣ (جتا (−٩٠°) + ت جا (−٩٠°))

④ من الشكل : ع١ = ٣ (جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°)

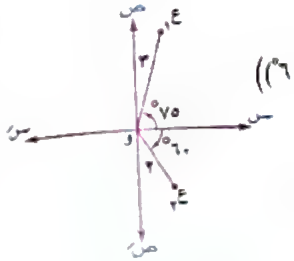
، ع٢ = ٢ (جتا (−٦٠°) + ت جا (−٦٠°))

∴ ع١ ع٢ = ٣ × ٢ (جتا (٧٥° − ٦٠°) + ت جا (٧٥° − ٦٠°))

= ٦ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)

، ع١/ع٢ = ٣/٢ (جتا (٧٥° + ٦٠°) + ت جا (٧٥° + ٦٠°))

= ٣/٢ (جتا ١٣٥° + ت جا ١٣٥°)



نتائج

① إذا كان : ع = ل (جتا θ + ت جا θ) فإن :

(١) ١/ع = ١/ل (جتا (−θ) + ت جا (−θ)) (٢) ع² = ل² (جتا (٢ θ) + ت جا (٢ θ))

② إذا كان : ع١ = ل١ (جتا θ١ + ت جا θ١)

، ع٢ = ل٢ (جتا θ٢ + ت جا θ٢) ، ... ، ع ن = ل ن (جتا θ ن + ت جا θ ن)

فإن: ع١ ع٢ ... ع ن

= ل١ ل٢ ... ل ن (جتا (θ١ + θ٢ + ... + θ ن) + ت جا (θ١ + θ٢ + ... + θ ن))

أى أنه يمكن تعميم قاعدة الضرب على عدد محدود من الأعداد المركبة.

إذا كان : ع١ = ع٢ = ع٣ = ... = ع

فإن : ع^ن = ل^ن (جتا (ن θ) + ت جا (ن θ))

ومنها نجد أن : |ع^ن| = |ع|^ن

مثال ١٠

إذا كان ع١ = ٢ (جتا ١٢٠° − ت جا ١٢٠°) ، ع٢ = ٣ (جا ١٥٠° + ت جتا ١٥٠°)

فأوجد على الصورة المثلثية القياسية والصورة الجبرية :

① ع١ ع٢ ② ١/ع١ ③ ع٢² ④ ع٢⁴

الحل

نضع أولاً كلاً من ع١ ، ع٢ على الصورة المثلثية القياسية.

∵ ع١ = ٢ (جتا ١٢٠° − ت جا ١٢٠°)

، ∵ إشارتى الدوال المثلثية (+ ، −) ∴ نختار الربع الرابع

، ∵ الدوال المثلثية مضبوطة ∴ السعة الأساسية للعدد ع١ = −١٢٠°

∴ ع١ = ٢ (جتا (−١٢٠°) + ت جا (−١٢٠°))

، ∵ ع٢ = ٣ (جا ١٥٠° + ت جتا ١٥٠°)

، ∵ إشارتى الدوال المثلثية (+ ، +) ∴ نختار الربع الأول

، ∵ الدوال المثلثية معكوسة ∴ السعة الأسية للعدد ع٢ = ٩٠° − ١٥٠° = −٦٠°

∴ ع٢ = ٣ (جتا (−٦٠°) + ت جا (−٦٠°))

① ع١ ع٢ = ٢ × ٣ (جتا (−١٢٠° − ٦٠°) + ت جا (−١٢٠° − ٦٠°))

= ٦ (جتا (−١٨٠°) + ت جا (−١٨٠°)) = ٦ (جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°) «الصورة المثلثية»

، ع١ ع٢ = ٦ (−١ + ت × ٠) = −٦ «الصورة الجبرية»

② ١/ع١ = ١/(٢ (جتا (−١٢٠°) + ت جا (−١٢٠°))) = ١/٢ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°) «الصورة المثلثية»

∴ ١/ع١ = ١/٢ (−١/٢ + ت × √٣/٢) = −١/٤ + √٣/٤ ت «الصورة الجبرية»

اللَّهُمَّ صَلِّ وَسَلِّمْ على نَبِيِّنَا مُحَمَّد

③ $ع_{٢}^{٢} = ٢^{٢} \left(جتا\ ٢\ (-١٢٠°) + ت\ جا\ ٢\ (-١٢٠°)\right) = ٤\ \left(جتا\ (-٢٤٠°) + ت\ جا\ (-٢٤٠°)\right)$

$= ٤\ (جتا\ ١٢٠° + ت\ جا\ ١٢٠°)$ «الصورة المثلثية»

$ع_{٢}^{٢} = ٤\ \left(\frac{-١}{٢} + ت \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) = -٢ + ٢\sqrt{٣}\ ت$ «الصورة الجبرية»

④ $ع_{٢}^{٤} = ٣^{٤} \left(جتا\ ٤\ (-٦٠°) + ت\ جا\ ٤\ (-٦٠°)\right) = ٨١\ \left(جتا\ (-٢٤٠°) + ت\ جا\ (-٢٤٠°)\right)$

$= ٨١\ (جتا\ ١٢٠° + ت\ جا\ ١٢٠°)$ «الصورة المثلثية»

$= ٨١\left(\frac{-١}{٢} + ت \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) = \frac{-٨١}{٢} + \frac{٨١\sqrt{٣}}{٢}\ ت$ «الصورة الجبرية»

مثال ١١

إذا كان : ع عدد مركب وكانت السعة الأساسية للعدد (−ع) تساوى $\frac{-٥\pi}{٦}$

أوجد السعة الأساسية للعدد : $\left(\frac{\bar{ع}}{ت}\right)$

الحل

نفرض أن السعة الأساسية للعدد المركب ع هى θ

∴ السعة الأساسية للعدد (−ع) هى $\pi - \theta$

∴ $\frac{-٥\pi}{٦} = \pi - \theta$ ∴ $\frac{\pi}{٦} = \theta$

، السعة الأساسية للعدد $(\bar{ع}) = \frac{-\pi}{٦}$

∴ السعة الأساسية للعدد $\left(\frac{\bar{ع}}{ت}\right)$ = (سعة العدد $\bar{ع}$) − (سعة العدد ت)

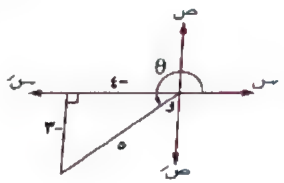
$= \frac{-\pi}{٦} - \frac{\pi}{٢} = \frac{-٢\pi}{٣}$

مثال ١٢

إذا كان : $ع = ٢\ (جتا\ \theta + ت\ جا\ \theta)$ حيث $\theta \in \left]\pi\ ، \frac{٣}{٢}\pi\right[$ ، $ظا\ \theta = \frac{٣}{٤}$

فأوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لكل من : $\frac{١}{ع}$ ، $ع^{-٢}$ ، $\frac{١}{\bar{ع}}$

الحل



∵ $ع = ٢\ (جتا\ \theta + ت\ جا\ \theta)$

∴ $\frac{١}{ع} = \frac{١}{٢}\ (جتا\ (-\theta) + ت\ جا\ (-\theta))$ «الصورة المثلثية»

$= \frac{١}{٢}\ (جتا\ \theta - ت\ جا\ \theta) = \frac{١}{٢}\left(-\frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥}\ ت\right)$

∴ $\frac{١}{ع} = -\frac{٢}{٥} + \frac{٣}{١٠}\ ت$ «الصورة الجبرية»

∵ $ع^{٢} = ٤\ (جتا\ \theta + ت\ جا\ \theta)^{٢}$

∴ $ع^{٢} = ٤\ (جتا\ ٢\theta + ت\ جا\ ٢\theta)$

∴ $\frac{١}{ع^{٢}} = \frac{١}{٤}\ (جتا\ (-٢\theta) + ت\ جا\ (-٢\theta))$ «الصورة المثلثية»

$= \frac{١}{٤}\ (جتا\ ٢\theta - ت\ جا\ ٢\theta) = \frac{١}{٤}\ (٢\ جتا^{٢}\theta - ١ - ت \times ٢\ جا\theta\ جتا\theta)$

$= \frac{١}{٤}\left(\frac{٣٢}{٢٥} - ١ - ت \times ٢ \times \frac{-٣}{٥} \times \frac{-٤}{٥}\right) = \frac{١}{٤}\left(\frac{٧}{٢٥} - \frac{٢٤}{٢٥}\ ت\right)$

∴ $ع^{-٢} = \frac{٧}{١٠٠} - \frac{٦}{٢٥}\ ت$ «الصورة الجبرية»

، ∵ $\bar{ع} = ٢\ (جتا\ \theta - ت\ جا\ \theta) = ٢\ \left(جتا\ (-\theta) + ت\ جا\ (-\theta)\right)$

∴ $\frac{١}{\bar{ع}} = \frac{١}{٢}\ \left(جتا\ -(-\theta) + ت\ جا\ -(-\theta)\right) = \frac{١}{٢}\ (جتا\ \theta + ت\ جا\ \theta)$ «الصورة المثلثية»

$= \frac{١}{٢}\left(-\frac{٤}{٥} - \frac{٣}{٥}\ ت\right)$

∴ $\frac{١}{\bar{ع}} = -\frac{٢}{٥} - \frac{٣}{١٠}\ ت$ «الصورة الجبرية»

مثال ١٢

إذا كان : $ع_١ = ٥ (جتا\ \theta - ت\ جا\ \theta)$ ، $ع_٢ = -٦ (جتا\ ٢\theta + ت\ جا\ ٢\theta)$

حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ ، $ظا\ \theta = \frac{٤}{٣}$ فأوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لكل من :

① $ع_١^٢$ ② $ع_١ ع_٢$

الحل

∵ $ع_١ = ٥ (جتا\ \theta - ت\ جا\ \theta) = ٥ (جتا\ (-\theta) + ت\ جا\ (-\theta))$

، $ع_٢ = ٦ (-جتا\ ٢\theta - ت\ جا\ ٢\theta) = ٦ (جتا\ (-\pi + ٢\theta) + ت\ جا\ (-\pi + ٢\theta))$

① $ع_١^٢ = ٢٥ (جتا\ (-\theta) + ت\ جا\ (-\theta))^٢$

$= ٢٥ (جتا\ (-٢\theta) + ت\ جا\ (-٢\theta))$ «الصورة المثلثية»

∴ $ع_١^٢ = ٢٥ (جتا\ ٢\theta - ت\ جا\ ٢\theta)$

، ∵ $جتا\ ٢\theta = ١ - ٢\ جا^٢\ \theta = ١ - ٢ \times \frac{١٦}{٢٥} = -\frac{٧}{٢٥}$

، $جا\ ٢\theta = ٢\ جا\ \theta\ جتا\ \theta = ٢ \times \frac{٤}{٥} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$

∴ $ع_١^٢ = ٢٥ \left(\frac{-٧}{٢٥} - ت \times \frac{٢٤}{٢٥}\right) = -٧ - ٢٤\ ت$ «الصورة الجبرية»

② $ع_١ ع_٢ = ٥ (جتا\ (-\theta) + ت\ جا\ (-\theta)) \times ٦ (جتا\ (-\pi + ٢\theta) + ت\ جا\ (-\pi + ٢\theta))$

$= ٣٠ (جتا\ (-\pi + \theta) + ت\ جا\ (-\pi + \theta))$ «الصورة المثلثية»

∴ $ع_١ ع_٢ = ٣٠ (-جتا\ \theta - ت\ جا\ \theta) = ٣٠ \left(\frac{-٣}{٥} - ت \times \frac{٤}{٥}\right)$

$= -١٨ - ٢٤\ ت$ «الصورة الجبرية»

ملاحظات

① إذا كان : $ع = \frac{س + ت\ ص}{س - ت\ ص}$ فإن : $|ع| = ١$ (حيث أن البسط مرافق المقام)

فمثلًا : $\left|\frac{٣ + ت}{٣ - ت}\right| = ١$ ، $\left|\frac{\sqrt{٢ + ٢} - ٤\ ت}{\sqrt{٢ + ٢} + ٤\ ت}\right| = ١$

② إذا كان ع عدد مركب سعته θ فإن العدد (ت ع) هو صورة العدد (ع) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° وبالتالى يكون |ت ع| = |ع| وسعته (ت ع) = ٩٠° + θ

على الصورة المثلثية للعدد المركب

اختبار تفاعلى

• فهم ○ تطبيق ⁂ مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسى

١ إذا كانت : ع = ٣ + ٤ ت مثل على شكل أرجاند كلاً من الأعداد الآتية :

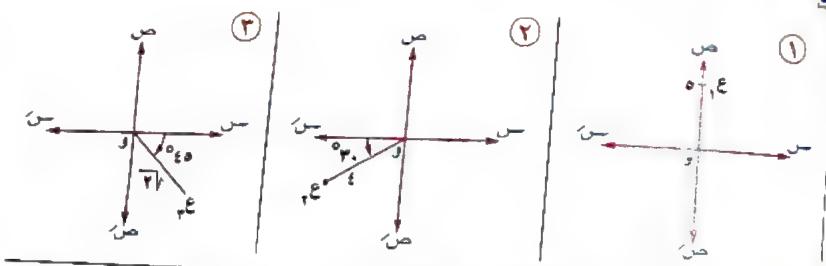
① ع ② $\bar{ع}$ ③ −ع ④ −$\bar{ع}$ ⑤ ١ + ع

٢ اكتب الصورة المثلثية وكذا الصورة الجبرية لكلٍ من الأعداد الآتية :

① العدد الذى مقياسه ٢ وسعته صفر ② العدد الذى مقياسه ٢ وسعته $\frac{٣\pi}{٢}$

③ العدد الذى مقياسه ١ وسعته ٢١٠° ④ العدد الذى مقياسه $\sqrt{٢}$ وسعته $\frac{٥\pi}{٤}$

٣ اكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية :



٤ أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية ثم ضع كلًا منها فى الصورة المثلثية :

① −٣ ② ٢ ت ③ ١ + ت

④ $-\sqrt{٣} + ت$ ⑤ −١ − ت ⑥ $٤ - ٤\sqrt{٣}\ ت$

⑦ $\frac{-٤}{\sqrt{٣} + ت}$ ⑧ $-\sqrt{٣} + ٤\ ت$

٥ ضع كلاً من الأعداد الآتية على الصورة س + ت ص حيث س ، ص ∈ ح ثم اكتب الصورة المثلثية لكل منها :

① $\frac{٨}{\sqrt{٣} + ت}$ ② $\frac{٢ - ٢\ ت}{٢\ ت}$ ③ $\frac{٥ - \sqrt{٣}\ ت}{\sqrt{٣} - ٢\ ت}$

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ع = ٣ + ٤ ت فإن : |ع| = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢) العدد ع = ٣ − ٤ ت يمثل على شكل أرجاند بالنقطة أ حيث أ = ...

(أ) (٣ ، ٤) (ب) (٣ ، −٤) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٣ ، −٤)

(٣) إذا كانت النقطة أ (√٣ ، −١) تمثل العدد المركب ع على مستوى أرجاند فإن المقياس والسعة الأساسية للعدد ع هما .....

(أ) (٢ ، $\frac{\pi}{٦}$) (ب) (٢ ، $\frac{٥\pi}{٦}$) (جـ) (٢ ، $-\frac{٥\pi}{٦}$) (د) (٢ ، $\frac{-\pi}{٦}$)

(٤) سعة العدد المركب ع = −٣ تساوى .....

(أ) صفر (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٥) إذا كان : ع = −١ + √٣ ت فإن : |$\bar{ع}$| = ...

(أ) −١ − √٣ ت (ب) √٢ (جـ) ٢ (د) −٢

(٦) العدد المركب ع = −٢ ت بالصورة المثلثية يساوى .....

(أ) ٢ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°) (ب) ٢ (جتا −٩٠° + ت جا −٩٠°)

(جـ) ٢ (جتا ٠° + ت جا ٠°) (د) ٢ (جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°)

(٧) السعة الأساسية للعدد المركب ع = ١ − ت هى .....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{-\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{-٧\pi}{٤}$ (د) $\frac{٧\pi}{٤}$

(٨) أى مما يأتى يمثل الصورة الجبرية للعدد ٢ (جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{٣}$) ؟

(أ) −√٣ + ت (ب) −١ + √٣ ت

(جـ) −√٢ + √٢ ت (د) −√٣ − √٣ ت

(٩) (دور ثان ٢٠١٧) إذا كان : ع = √٢ (جا ٣٠° + ت جتا ٣٠°) فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى .....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(١٠) إذا كان ع عددًا مركبًا سعته الأساسية θ فإن :

أولًا : سعة ($\bar{ع}$) = ...

(أ) θ (ب) −θ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ − θ (د) π − θ

ثانيًا : سعة (٢ ع) = ...

(أ) θ (ب) −θ (جـ) ٢ θ (د) −٢ θ

ثالثًا : سعة ($\frac{١}{ع}$) = ...

(أ) θ (ب) −θ (جـ) π − θ (د) −π + θ

(١١) إذا كان : ع = $\frac{١}{ع}$ فإن : |ع| = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ±١

(١٢) إذا كان : |ع| = ١٠ فإن : ع $\bar{ع}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ١ (د) −١٠٠

(١٣) إذا كان : |ع| = ٦ فإن : |−$\bar{ع}$| = ...

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $-\frac{١}{٦}$

(١٤) إذا كان : ع = ٦ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) فإن : |$\bar{ع}$| = ...

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) ٣√٣ (د) ٦√٣

(١٥) (دور أول ٢٠١٧) السعة الأساسية للعدد ٢ [جتا $\frac{\pi}{٤}$ − ت جا $\frac{\pi}{٤}$] هى .....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{-\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) $\frac{-٣\pi}{٤}$

(١٦) إذا كان : |ع| + |$\bar{ع}$| = ١٢ فإن : |ت ع| = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٢ ت (جـ) ٦ (د) −٦

(١٧) إذا كان ع عدد مركب غير صفرى فإن سعة (ع) الأساسية + سعة ($\bar{ع}$) الأساسية = ...

(أ) صفر (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) −٩٠°

(١٨) إذا كانت سعة العدد ع = ٢٨° فإن سعة العدد $\left(\frac{\text{ت}}{\text{ع}}\right)$ = ...

(أ) ٢٨° (ب) ٦٢° (جـ) ١١٨° (د) −٢٨°

(١٩) إذا كان : ع عدد مركب فأى العبارات الآتية خطأ ؟

(أ) ع $\bar{\text{ع}}$ = |ع|^{٢} (ب) ع $\bar{\text{ع}}$ = |$\bar{\text{ع}}$|^{٢}

(جـ) سعة (ع) = سعة ($\bar{\text{ع}}$) (د) $\overline{\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢}}$ = $\bar{\text{ع}}_{١} + \bar{\text{ع}}_{٢}$

(٢٠) إذا كان : ع + ٢ = ت (ع − ٢) فإن العدد المركب ع = ... (بالصورة المثلثية)

(أ) ٢ (جتا ٠° + ت جا ٠°) (ب) ٢ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°)

(جـ) ٢ (جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°) (د) ٢ (جتا −٩٠° + ت جا −٩٠°)

(٢١) (دور أول ٢٠١٨) إذا كان : ع = $\frac{٢ - \text{ت}}{٢ + \text{ت}}$ فإن : |ع| = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١ (د) ٥

(٢٢) إذا كان : س = جتا ١٧° + ت جا ١٧° ، ص = جتا ١١° + ت جا ١١°

فإن العدد المركب ع = س^{٣} ص^{٩} على الصورة المثلثية هو .....

(أ) جتا ٣٠° + ت جا ٣٠° (ب) جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°

(جـ) جتا −١٢٠° + ت جا −١٢٠° (د) جتا −٦٠° + ت جا −٦٠°

(٢٣) إذا كانت نقطة أ تمثل العدد ع على مستوى أرجاند ، ب تمثل العدد $\bar{\text{ع}}$ على مستوى أرجاند فإن ب صورة أ بالانعكاس فى .....

(أ) نقطة الأصل (ب) محور س (جـ) محور ص (د) المستقيم ص = س

(٢٤) إذا كان : ع$_{١}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ − ت ، ع$_{٢}$ = ٢ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)

فإن : $\bar{\text{ع}}_{١} - \bar{\text{ع}}_{٢}$ = ...

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ + ت (ب) $\sqrt{٣}$ − ت (جـ) $\sqrt{٣}$ + ٢ ت (د) ٣ $\sqrt{٣}$ + ٢ ت

(٢٥) إذا كانت السعة الأساسية للعدد ع$_{١}$ هى θ$_{١}$ والسعة الأساسية للعدد ع$_{٢}$ هى θ$_{٢}$ فإن السعة الأساسية للعدد ع$_{١}$ ع$_{٢}$ هى .....

(أ) θ$_{١}$ + θ$_{٢}$ (ب) θ$_{١}$ × θ$_{٢}$ (جـ) θ$_{١}$ − θ$_{٢}$ (د) θ$_{١}$ ÷ θ$_{٢}$

(٢٦) ٣ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°) × ٦ (جتا ٧٠° + ت جا ٧٠°) = ...

(أ) ١٨ (جتا ٢١٠° + ت جا ١٠٠°) (ب) ٩ (جتا ١٠٠° + ت جا ١٠٠°)

(جـ) ١٨ (جتا ١٠٠° + ت جا ١٠٠°) (د) ٩ (جتا ٤٠° + ت جا ٤٠°)

(٢٧) ٦ (جتا ٢١٠° + ت جا ٢١٠°) ÷ ٣ (جتا ٧٠° + ت جا ٧٠°) = ...

(أ) ٢ (جتا ٣° + ت جا ٣°) (ب) ٣ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)

(جـ) ٣ (جتا ١٤٠° + ت جا ١٤٠°) (د) ٢ (جتا ١٤٠° + ت جا ١٤٠°)

(٢٨) [٥ (جتا ١٠° + ت جا ١٠°)]^{٢} = ...

(أ) ٢٥ (جتا ١٠٠° + ت جا ١٠٠°) (ب) ١٠ (جتا ١٠٠° + ت جا ١٠٠°)

(جـ) ٢٥ (جتا ٢٠° + ت جا ٢٠°) (د) ١٠ (جتا ٢٠° + ت جا ٢٠°)

(٢٩) الجزء الحقيقى للعدد المركب الذى مقياسه $\sqrt{٢}$ وسعته $\frac{٧\pi}{٦}$ هو .....

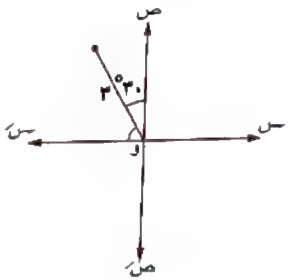
(أ) − $\sqrt{٣}$ (ب) − $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$ (جـ) − $\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ (د) − $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$

(٣٠) الصورة المثلثية للعدد (ت^{٢٥})^{٣} حيث ت^{٢} = −١ هى .....

(أ) جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$ (ب) جتا π + ت جا π

(جـ) جتا π − ت جا π (د) جتا $\frac{\pi}{٢}$ − ت جا $\frac{\pi}{٢}$

(٣١) الشكل المقابل يمثل العدد المركب .....



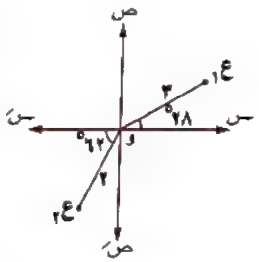
(أ) ٣ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)

(ب) ٣ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

(جـ) ٣ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)

(د) ٣ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)

(٣٢) الشكل المقابل يوضح العددين المركبين ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ فإن السعة الأساسية لـ (ع$_{١}$ ع$_{٢}$) = ...



(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) − $\frac{\pi}{٢}$

(جـ) π (د) − $\frac{\pi}{٨}$

(٣٢) إذا كان : ع عدد مركب غير حقيقي فأي الأعداد الآتية لها نفس سعة ع؟

(أ) −ع (ب) $\overline{ع}$ (جـ) $\frac{١}{ع}$ (د) $\frac{١}{\overline{ع}}$

(٣٤) إذا كان : ع = −٢ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°) فإن سعة العدد ع = ...

(أ) −١٣٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٤٥° (د) −٤٥°

(٣٥) إذا كانت السعة الأساسية للعدد $ع_١ = \frac{٤\pi}{٥}$ والسعة الأساسية للعدد $ع_٢ = \frac{٢\pi}{٣}$

فإن السعة الأساسية للعدد $\left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right)$ = ...

(أ) $\frac{٢\pi}{١٥}$ (ب) $\frac{\pi}{١٥}$ (جـ) $\frac{٢٢\pi}{١٥}$ (د) $\frac{٣\pi}{١٠}$

(٣٦) إذا كان العدد ع تخيلي بحت وكانت سعته الأساسية هي (٤ θ + ١٠°)

فإن : θ = ...

(أ) ٢٠° (ب) ٢٠° أو −٢٥° (جـ) ٩٠° أو −٩٠° (د) −٩٠°

(٣٧) إذا كان : $ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقان وكانت سعة $ع_١$ = (٣ θ − ١١٠°)

وسعة $ع_٢$ = (٢ θ + ٥٠°) فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٨}$ (جـ) $\frac{\pi}{١٢}$ (د) $\frac{\pi}{١٥}$

(٣٨) إذا كان ع عدد مركب مقياسه = ٢ وسعته $\frac{\pi}{٢}$ فإن :

أولًا : مقياس العدد المركب (ع + ٢) = ...

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{٦}$ (د) $٢\sqrt{٢}$

ثانيًا : سعة العدد المركب (ع + ٢) = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) π

(٣٩) إذا كانت النقطتان أ ، ب يمثلان في مستوى أرجاند العددين المركبين $ع_١$ ، $ع_٢$

على الترتيب فإن نقطة منتصف $\overline{أب}$ تمثل العدد المركب .....

(أ) $ع_١ + ع_٢$ (ب) $ع_١ - ع_٢$

(جـ) $\frac{١}{٢}(ع_١ + ع_٢)$ (د) $\frac{١}{٢}(ع_١ - ع_٢)$

(٤٠) إذا كانت ع عدد مركب فأي من الأعداد المركبة التالية لها نفس سعة العدد المركب ع؟

(أ) ع + ١ (ب) ع + ت (جـ) ٢ ع (د) −٢ ع

(٤١) إذا كان : $ع_١$ = ١٠ (جتا θ + ت جا θ) ، $ع_٢$ = ٥ (جتا α + ت جا α)

وكان θ − α = $\frac{٣\pi}{٤}$ فإن : $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = ...

(أ) −$\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٢}$ ت (ب) $\sqrt{٢}$ − $\sqrt{٢}$ ت

(جـ) ١ − $\sqrt{٣}$ ت (د) −١ + $\sqrt{٣}$ ت

(٤٢) إذا كان : ع = جتا θ − ت جا θ فإن : $\frac{ع^٢ - ١}{ع\ ت}$ = ...

(أ) −٢ جا θ (ب) ٢ جا θ (جـ) جا θ (د) ٢ جا θ

(٤٣) إذا كان : $ع_١$ = جتا $θ_١$ + ت جا $θ_١$ حيث ٠ < $θ_١$ < $\frac{\pi}{٢}$ ، $ع_٢$ = جتا $θ_٢$ + ت جا $θ_٢$

حيث ٠ < $θ_٢$ < $\frac{\pi}{٢}$ وكان : $ع_١^{-٢}\ ع_٢^{٢}$ = ١ فإن : $\frac{θ_١}{θ_٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٤٤) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان : $ع_١$ = جتا θ + ت جا θ ، $ع_٢$ = جتا ٢ θ + ت جا ٢ θ

فإن السعة الأساسية للعدد المركب ٣ $ع_١$ × $ع_٢$ = ...

حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٦}$[

(أ) ٩ θ (ب) θ (جـ) ٥ θ (د) ٣ θ

(٤٥) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان : ع = ك (جا $\frac{٤}{٣}\pi$ − ت جتا $\frac{٤}{٣}\pi$) حيث ك > صفر

فإن : $ع^٦$ = ...

(أ) $ك^٦$ (ب) ٦ ك (جـ) −$ك^٦$ (د) −٦ ك

٧ إذا كان : ع = ٢ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) فاكتب الصورة المثلثية لكلٍ من الأعداد :

−ع ، $\overline{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$ ، $\frac{١}{\overline{ع}}$

٨ إذا كان : ع = −$\sqrt{٣}$ + ت فاكتب الصورة المثلثية لكلٍ من الأعداد :

ع ، −ع ، $\overline{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$ ، $\frac{١}{\overline{ع}}$

٩ أوجد المقياس والسعة لكلٍ من الأعداد الآتية حيث θ زاوية حادة :

(١) −٨ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

(٢) ٤ (جتا ١٥٠° − ت جا ١٥٠°)

(٣) جا ٢٤٠° + ت جتا ٢٤٠°

(٤) −٢ (جا ٢١٠° − ت جتا ٢١٠°)

⑤ ٢ (جا $\frac{٤}{٣}\pi$ − ت جتا $\frac{٤}{٣}\pi$)
⑥ ١ + ت ظا ٢٠°
⑦ ل (جتا θ − ت جا θ)
⑧ −ل (جتا θ + ت جا θ)
⑨ ل (− جتا θ + ت جا θ)
⑩ ل (جا θ − ت جتا θ)

١٠ أوجد العدد ع على الصورة المثلثية حيث $ت^٢ = -١$ ، $\theta \in]\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[$ في كل مما يأتي

① $ع = \frac{١}{١ + ت ظا \theta}$
② $ع = \frac{١ + ت ظا \theta}{١ - ت ظا \theta}$
③ $ع = \frac{جا \theta - ت جتا \theta}{جا \frac{\theta}{٢} + ت جتا \frac{\theta}{٢}}$

١١ أوجد الصورة المثلثية لحاصل الضرب $ع_١ ع_٢$ إذا كان :

① $ع_١ = ل_١ (جتا (أ + ب) + ت جا (أ + ب))$ ، $ع_٢ = ل_٢ (جتا (أ − ب) + ت جا (أ − ب))$
② $ع_١ = ١٢ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)$ ، $ع_٢ = \frac{٣}{٤} (جتا ١٥٠° − ت جا ١٥٠°)$
③ $ع_١ = -٢ (جتا \frac{٣\pi}{٤} − ت جا \frac{٣\pi}{٤})$ ، $ع_٢ = ٨ (جا \frac{\pi}{٤} + ت جتا \frac{\pi}{٤})$
④ $ع_١ = -جا ٢٤٠° − ت جتا ٢٤٠°$ ، $ع_٢ = ٧ (جا ١٢٠° − ت جتا ١٢٠°)$
⑤ $ع_١ = \sqrt{٣} − ت$ ، $ع_٢ = ٤ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)$

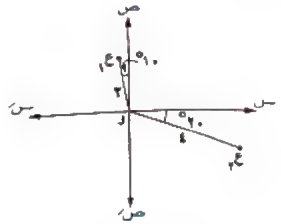
١٢ أوجد الصورة المثلثية لخارج القسمة $ع_١ \div ع_٢$ إذا كان :

① $ع_١ = ٣ (جتا ٣ \theta − ت جا ٣ \theta)$ ، $ع_٢ = ٤ (جتا ٤ \theta − ت جا ٤ \theta)$
② $ع_١ = ل (جتا \theta − ت جا \theta)^٢$ ، $ع_٢ = ل (جتا \theta + ت جا \theta)$
③ $ع_١ = ١$ ، $ع_٢ = (جتا ٢ \theta + ت جا ٢ \theta)^٢$
④ $ع_١ = ١٠ (جتا ٣٠٠° − ت جا ٣٠٠°)$ ، $ع_٢ = ٢ (جا ٣٠٠° − ت جتا ٣٠٠°)$
⑤ $ع_١ = ١٤ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)^٢$ ، $ع_٢ = ٧ (− جا ٧٥° − ت جتا ٧٥°)^٢$

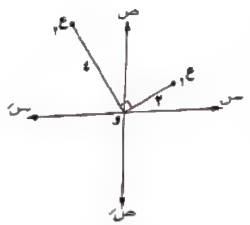
١٣ عبر عن كل مما يأتي بالصورة س + ص ت :

① $٣ (جتا \frac{٥\pi}{١٢} + ت جا \frac{٥\pi}{١٢}) \times ٤ (جتا \frac{\pi}{١٢} + ت جا \frac{\pi}{١٢})$
② $٣ (جتا \frac{\pi}{١٢} + ت جا \frac{\pi}{١٢}) \times \sqrt{٢} (جتا \frac{\pi}{٣} − ت جا \frac{\pi}{٣})$
③ $\frac{\sqrt{٢} (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})}{\frac{١}{٢} (جتا \frac{\pi}{٤} + ت جا \frac{\pi}{٤})}$

١٤ إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين ممثلين على مستوى أرجاند في كل من الشكلين الآتيين فأوجد $\frac{ع_٢}{ع_١}$ على الصورة س + ص ت :



شكل (١)



شكل (٢)

١٥ إذا كان : $ع_١ = ٢ (جتا ١٠° + ت جا ١٠°)$ ، $ع_٢ = ٣ (جتا ٤٠° + ت جا ٤٠°)$
أوجد العدد $ع_١^٤ ع_٢^٢$ على الصورة س + ص ت

١٦ إذا كان : $ع_١ = ١ − \sqrt{٣} ت$ ، $ع_٢ = ١ + ت$ أوجد كلاً مما يأتي في الصورة المثلثية :

① $ع_١ ع_٢$
② $\frac{ع_٢}{ع_١}$
③ $(ع_١)^٨$
④ $(ع_٢)^٦$

١٧ إذا كان : $ع_١ = جتا \frac{٢\pi}{٣} + ت جا \frac{٢\pi}{٣}$ ، $ع_٢ = جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦}$
فأوجد المقياس والسعة للعدد : $(\frac{ع_١}{ع_٢})^ن$ حيث $ت^٢ = -١$

١٨ إذا كان : $ع = \frac{(١ + ت)(٢ − ت)}{(١ − ت)(٣ + ت)}$ أوجد : $|ع|$

١٩ إذا كان : $ع = \frac{(أ + ب) + ت (أ − ب)}{(أ − ب) − ت (أ + ب)}$ فأوجد العدد ع في أبسط صورة ثم أوجد $|ع|$ حيث أ ، ب ∈ ح

٢٠ (دورثان ٢٠١٠) ضع كلاً من العددين : $ع_١ = جتا \frac{٤\pi}{٣} - ت جا \frac{٤\pi}{٣}$ ، $ع_٢ = \sqrt{٢}$ على الصورة المثلثية ، ثم أوجد المقياس والسعة الأساسية للعدد ع حيث $ع = ع_١ ع_٢$

٢١ (دورثان ٢٠٠٦) إذا كان : $ع = جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}$ حيث $ت^٢ = -١$

فأوجد كلًا من العددين : $ع_١ = ع - ١$ ، $ع_٢ = ع + ١$ فى الصورة المثلثية

ومن ثم برهن على أن : العدد المركب $\frac{ع_١}{ع_٢}$ يكون عددًا تخيليًا صرفًا.

٢٢ إذا كان : $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين حيث $ع_١ = -٩ + ٣\sqrt{٣}\, ت$ ، $|ع_١| = ٢$ ، سعة $ع_٢ = \frac{٧\pi}{١٢}$ أوجد كلًا من الأعداد المركبة الآتية على الصورة :

ل (جتا θ + ت جا θ) حيث $-\pi < \theta \leq \pi$

① $ع_١$ ② $ع_٢$ ③ $ع_١ ع_٢$ ④ $\frac{ع_١}{ع_٢}$

٢٣ إذا كان : $ع_١ = \frac{(١ + \sqrt{٣}\, ت)(١ - ت)}{١ + ت}$ ، $ع_٢ = \frac{(١ - \sqrt{٣}\, ت)(١ + ت)}{١ - ت}$

أوجد : $\frac{ع_١}{ع_٢}$ على الصورة المثلثية.

٢٤ إذا كان : $ع_١ = جتا ١١٤° + ت جا ٦٦°$ ، $ع_٢ = جتا ٤٢° + ت جا ١٣٨°$

، $ع_٣ = جا ٢٤° + ت جا ١١٤°$ أوجد الصورة الجبرية للعدد : $\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣}$

٢٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المعكوس الضربى للعدد المركب ع حيث $|ع| \neq ١$ هو .....

(أ) $\bar{ع}$ (ب) $\frac{\bar{ع}}{|ع|^٢}$ (جـ) $\frac{\bar{ع}}{|ع|}$ (د) $\frac{ع}{|ع|^٢}$

② العدد المركب $\left(\frac{١ + ٢ت}{١ - ت}\right)$ يقع فى مستوى أرجاند فى الربع .....

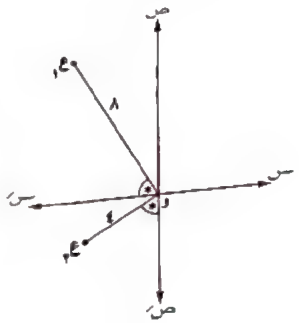
(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

③ إذا كان : $أ \neq ٠$ وكان $ع_١ = ١ + \sqrt{٣}\, ت$ ، $ع_٢ = ٢ \left(جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢}\right)$

فإن : $\left|\frac{ع_١}{ع_٢}\right| = ...$

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\sqrt{٦}$

④ فى الشكل المقابل :



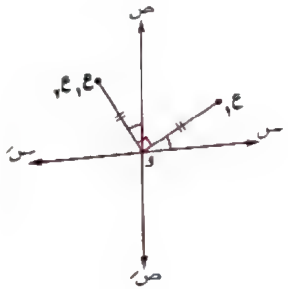
$ع_١$ ، $ع_٢$ عددان مركبان

فإن : $\frac{ع_١}{ع_٢} = ...$

(أ) −٢ (ب) ٢

(جـ) −٢ ت (د) ٢ ت

⑤ فى الشكل المقابل :



$ع_١$ ، $ع_٢$ عددان مركبان

وكان ($ع_١$ $ع_٢$) عدد مركب

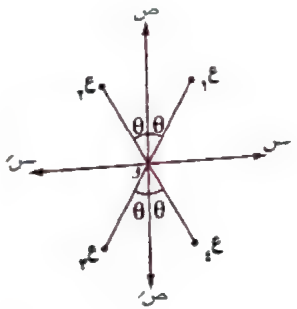
فإن : $ع_٢ = ...$

(أ) −٢ ت (ب) − ت

(جـ) ت (د) ٢ ت

⑥ إذا كانت : $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ ، $ع_٤$ أعداد مركبة

فإن سعة ($ع_١$ $ع_٢$ $ع_٣$ $ع_٤$) = ...



(أ) −٩٠° (ب) صفر°

(جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

⑦ أ ب جـ د مربع مرسوم فى مستوى أرجاند مركزه عند نقطة الأصل فإذا كانت النقطة أ تمثل العدد المركب $(1 + \sqrt{3}\,ت)$ فإن النقطة جـ تمثل العدد المركب .....

(أ) $-1 - \sqrt{3}\,ت$ (ب) $1 - \sqrt{3}\,ت$ (جـ) $-1 + \sqrt{3}\,ت$ (د) $2(1 + \sqrt{3}\,ت)$

⑧ إذا كان $ع_1$ ، $ع_2$ عددان مركبان ، سعة $(ع_1 ع_2) = \frac{5\pi}{18}$ ، سعة $\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right) = \frac{\pi}{9}$ فإن سعة $ع_1$ = ...

(أ) $\frac{5\pi}{36}$ (ب) $\frac{7\pi}{36}$ (جـ) $\frac{\pi}{3}$ (د) $\frac{\pi}{4}$

⑨ إذا كانت سعة $(ع_1 ع_2) = \frac{\pi}{6}$ ، سعة $(ع_1 ع_2) = \frac{2\pi}{9}$ ، سعة $(ع_2 ع_3) = \frac{5\pi}{18}$ فإن سعة $(ع_1 ع_2 ع_3)$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (جـ) $\frac{\pi}{5}$ (د) $\frac{\pi}{6}$

⑩ إذا كان ع عدد مركب وكان سعة $(ع - 2) = \frac{\pi}{2}$ ، سعة $(ع - 4) = \frac{2\pi}{4}$ فإن سعة ع = ...

(أ) π (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{2\pi}{4}$

⑪ إذا كانت : $ع_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,ت$ ، $ع_2 = -4 - 4\sqrt{3}\,ت$

فإن سعة $(ع_1 + ع_2)$ = ...

(أ) $60°$ (ب) $-120°$ (جـ) $180°$ (د) $-60°$

⑫ إذا كانت : $ع = 1 + \sqrt{3}\,ت$ فإن السعة الأساسية للعدد $(1 + \sqrt{3}\,ت)^8$ هى .....

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{2\pi}{3}$ (جـ) $\frac{\pi}{6}$ (د) $\frac{-2\pi}{3}$

⑬ (دور أول ٢٠١٩) إذا كان : $ع = (1 + \sqrt{3}\,ت)^7$ وكان $|ع| = 8$

فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى .....

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) $\frac{\pi}{6}$ (د) π

⑭ إذا كان $ع_1 = 2\,ت$ ، $ع_2 = -1 + 3\,ت$ حيث $ت^2 = -1$

فإن سعة $(ع_1 - ع_2)$ تساوى .....

(أ) $\frac{3\pi}{4}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) $-\frac{\pi}{4}$ (د) $-\frac{3\pi}{4}$

⑮ إذا كانت : $ع_1 = ل_1(جتا\,\theta_1 + ت\,جا\,\theta_1)$ ، $ع_2 = ل_2(جتا\,\theta_2 + ت\,جا\,\theta_2)$

وكان $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ فإن : $ع_1 ع_2$ = ...

(أ) $ل_1 ل_2$ (ب) $-ل_1 ل_2$ (جـ) $ل_1 ل_2 ت$ (د) $-ل_1 ل_2 ت$

⑯ إذا كانت سعة العدد المركب ع $\in]-\pi ، 0[$

فإن سعة $(-ع)$ − سعة $(ع)$ = ...

(أ) π (ب) $-\pi$ (جـ) $-\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{2}$

⑰ إذا كان : $ع_1$ ، $ع_2$ عددان مركبان غير صفريان وكان $|ع_1| = |ع_2|$

، سعة $(ع_1)$ + سعة $(ع_2) = \pi$ فإن : $ع_1$ = ...

(أ) $ع_2$ (ب) $\overline{ع_2}$ (جـ) $-ع_2$ (د) $-\overline{ع_2}$

⑱ إذا كان : $|ع_1| = |ع_2|$ وسعة $(ع_1)$ + سعة $(ع_2)$ = صفر فإن : .....

(أ) $\overline{ع_1} = ع_2$ (ب) $ع_1 = ع_2$

(جـ) $ع_1 + ع_2 = 0$ (د) $\overline{ع_1} = \overline{ع_2}$

⑲ إذا كان : ع عدد مركب سعته θ ، $|ع| = 1$ فإن سعة العدد المركب $\left(\frac{1 + ع}{1 + \overline{ع}}\right)$

تساوى .....

(أ) $-\theta$ (ب) $\theta - \frac{\pi}{2}$ (جـ) θ (د) $\theta - \pi$

⑳ إذا كانت : $|ع| = |ع - 2|$ فإن الجزء الحقيقى للعدد ع يساوى .....

(أ) 1 (ب) -1 (جـ) -2 (د) 2

㉑ إذا كان : ع عدد مركب وكان $|ع - 3| = |ع|$ وكانت السعة الأساسية للعدد (ع)

تساوى $\frac{-\pi}{4}$ فإن : $|ع|$ = ...

(أ) $3\sqrt{2}$ (ب) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (جـ) $2\sqrt{2}$ (د) 2

㉒ إذا كان : $ع = س + ت\,ص$ عددًا مركبًا وكان $\left|\frac{ع - 3ت}{ع + 3ت}\right| = 1$

فإن : ع فى مستوى أرجاند يقع .....

(أ) على محور السينات. (ب) على محور الصادات.

(جـ) فى الربع الأول. (د) فى الربع الثانى.

٢٣ إذا كانت : ع = $\frac{\text{ت}}{\text{جتا } ٧٥^\circ + \text{ت جا } ٧٥^\circ}$ فإن السعة الأساسية للعدد ($\bar{\text{ع}}^{٦}$) تساوى .....

(أ) $\frac{٥\pi}{٦}$ (ب) $\frac{٢\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

٢٤ إذا كانت السعة الأساسية للعدد ($\bar{\text{ع}}$) = $\frac{-\pi}{٣}$ فإن السعة الأساسية للعدد (ع + ت) تساوى ..... حيث ع عدد مركب.

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٥\pi}{١٢}$ (جـ) $\frac{٧\pi}{١٢}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

٢٥ إذا كانت السعة الأساسية للعدد ($\text{ع}^{٤}$) تزيد عن ثلاثة أمثال السعة الأساسية للعدد (٥ ع) بمقدار $\frac{\pi}{٣}$ فإن السعة الأساسية للعدد ($\bar{\text{ع}}$) تساوى .....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{-\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{-\pi}{٣٣}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣}$

٢٦ إذا كان : ع عدد مركب وكان ع = جا ٢٠° (١ + ت ظا ٢٠°) فإن :

أولًا : |ع| = ...

(أ) ١ (ب) جا ٢٠° (جـ) جتا ٢٠° (د) ظا ٢٠°

ثانيًا : السعة الأساسية للعدد (ع) تساوى .....

(أ) ٢٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٥٠° (د) ٧٠°

٢٧ مقياس العدد المركب ع = (١ + ت ظا ١٥°) يساوى .....

(أ) جا ١٥° (ب) جتا ١٥° (جـ) ظا ١٥° (د) قا ١٥°

٢٨ إذا كان : ع عدد مركب حيث ع + |ع| = ٨ + ١٢ ت

فإن : $|\text{ع}|^{٢}$ = ...

(أ) ١٢١ (ب) ١٤٤ (جـ) ١٦٩ (د) ٢٢٨

٢٩ إذا كان : $\frac{\text{جتا } \theta - \text{ت جا } \theta}{\text{جتا } ٢\theta - \text{ت جا } ٢\theta}$ = ت فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) $\frac{٥\pi}{١٢}$

٣٠ إذا كان : س + ص ت = $\frac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{أ} - \text{ب ت}}$ فإن : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$ = ...

(أ) $\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$ (ب) $\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}$ (جـ) −أب (د) ١

٣١ إذا كان : أ عددًا حقيقيًا فإن مرافق العدد $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ت}}{\text{أ}^{٢} + \text{أت} - ١}$ هو .....

(أ) أ − ت (ب) أ + ت (جـ) $\frac{\text{أ}^{٢} - \text{ت}}{\text{أ}^{٢} + \text{أت} - ١}$ (د) $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ت}}{\text{أ}^{٢} - \text{أت} - ١}$

٣٢ إذا كانت : ع = $\left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}\right)^{\text{ن}}$ حيث ن عدد صحيح موجب

وكان ع = ١ فإن أصغر قيم ن = ...

(أ) ٩ (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) ١

٣٣ سعة العدد المركب [(١ − جتا θ) + ت جا θ] تساوى ..... حيث ٠ < θ < π

(أ) $\frac{\pi}{٤} - \frac{\theta}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٢} - \frac{\theta}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢} - \theta$ (د) $\frac{\pi}{٢} - \frac{\theta}{٤}$

٣٤ إذا كان : ع = ١ + جتا ٢ θ + ت جا ٢ θ فإن : |ع| = ...

حيث θ قياس زاوية حادة.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٢ جتا θ (د) ٢ جا ٢ θ

٣٥ إذا كانت : ع = ١ + جتا ٤٠° + ت جا ٤٠° فإن سعة (ع) = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٩}$ (جـ) $\frac{\pi}{١٨}$ (د) $\frac{٢\pi}{٩}$

٣٦ إذا كان : $\text{ع}_{١}$ = جتا ٧٠° + ت جا ٧٠° ، $\text{ع}_{٢}$ = جتا ٢٠° + ت جا ٢٠° فإن :

أولًا : سعة العدد ($\text{ع}_{١}$ + $\text{ع}_{٢}$) = ...

(أ) ٩٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٤٠°

ثانيًا : مقياس العدد ($\text{ع}_{١}$ + $\text{ع}_{٢}$) = ...

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) جتا ٢٠°

(جـ) جا ٢٠° (د) $\sqrt{٢}$ (جتا ٢٠° + جا ٢٠°)

٣٧ إذا كان : $\text{ع}_{١}$ = جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\text{ع}_{٢}$ = جتا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{\pi}{٦}$

فإن : سعة العدد $\left(\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}}\right)^{٧}$ هى .....

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) π (جـ) $\frac{-١}{٢}\pi$ (د) ٢ π

(٣٨) سعة العدد المركب ع = $\frac{١ + ت\ ظا\ ١٨^\circ}{١ - ت\ ظا\ ١٨^\circ}$ هى .....

(أ) $\pi\frac{١}{٢}$ (ب) $\pi\frac{١}{٤}$ (جـ) $\pi\frac{١}{٥}$ (د) $\pi\frac{١}{١٢}$

(٣٩) إذا كان : س − $\frac{١}{س}$ = ت فإن : $س^{٣٢} + س^{-٣٢}$ = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(٤٠) إذا كان : $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين غير صفريين وكان

$|ع_١ + ع_٢| = |ع_١| + |ع_٢|$ فإن سعة $(ع_١)$ − سعة $(ع_٢)$ = ...

(أ) π (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $-\pi$ (د) صفر

(٤١) (دور ثان ٢٠١٩) إذا كان : أ = جتا θ + ت جا θ ، ب = جتا α + ت جا α

فإن قيمة المقدار : $\frac{١}{٢}\left(أ + \frac{١}{ب}\right)$ تساوى .....

(أ) جا (α + θ) (ب) جا (α − θ) (جـ) جتا (α + θ) (د) جتا (α − θ)

(٤٢) $\frac{(جتا\ θ + ت\ جا\ θ)^٤}{(جا\ θ + ت\ جتا\ θ)^٢}$ = ...

(أ) جا ٩θ − ت جتا ٩θ (ب) جتا ٩θ − ت جا ٩θ

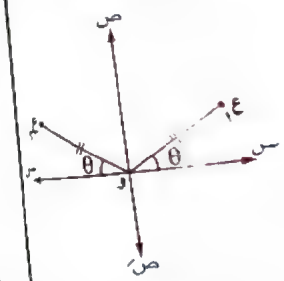
(جـ) جتا θ − ت جا θ (د) جا θ − ت جتا θ

(٤٣) إذا كانت سعة العدد المركب (ع − ١ + ت) = π وكان |ع| = ٢

فإن : ع = ...

(أ) ١ − $\sqrt{٣}$ ت (ب) −١ + $\sqrt{٣}$ ت (جـ) − $\sqrt{٣}$ − ت (د) ٣ − ت

(٤٤) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $|ع_١| = |ع_٢| = ل$

فإن : $ع_٢$ = ...

(أ) $\bar{ع}_١$ (ب) − $ع_١$

(جـ) − $\bar{ع}_١$ (د) $ع_١$ ت

(٤٥) إذا كان : $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين بحيث $\bar{ع}_١$ + ت $\bar{ع}_٢$ = صفر ، سعة $(ع_١ ع_٢) = \pi$

فإن سعة $(ع_١)$ = ...

(أ) $\frac{-٣\pi}{٤}$ (ب) $\frac{٣\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) $\frac{-٣\pi}{٢}$

(٤٦) إذا كان ع عدد مركب فإن المعادلة : |ع| = ٣ تمثل فى شكل أرجاند بـ .....

(أ) دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٣

(ب) دائرة مركزها النقطة (٠ ، ٣) ونصف قطرها ٣

(جـ) دائرة مركزها النقطة (٣ ، ٠) ونصف قطرها ٣

(د) دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٩

(٤٧) إذا كان ع عدد مركب فإن المعادلة : $|ع|^٢ + ٨\ (ع + \bar{ع}) + ع\ \bar{ع} = ٨$ تمثل معادلة

دائرة مساحة سطحها = ... وحدة مساحة.

(أ) ٩ π (ب) ١٦ π (جـ) ٢٠ π (د) ٢٥ π

(٤٨) إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ تمثل فى مستوى أرجاند الأعداد المركبة ع ، − ع

، $\bar{ع}$ على الترتيب حيث ع = ٥ (جتا θ + ت جا θ) ، θ قياس زاوية حادة حيث

جا θ = $\frac{٣}{٥}$ فإن مساحة المثلث أ ب حـ = ... وحدة مساحة.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٤ (د) ٢٥

(٤٩) إذا كان : $ع_١ = ١ - \sqrt{٣}$ ت ، $|ع_١ ع_٢| = ١$ وسعة $(ع_٢)$ − سعة $(ع_١) = \frac{\pi}{٢}$

فإن مساحة المثلث الذى رؤوسه النقط $ع_١$ ، $ع_٢$ ، و (نقطة الأصل) تساوى .....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٢

(٥٠) إذا كانت النقطة (أ) تمثل فى مستوى أرجاند العدد المركب (ع) والنقطة (ب) تمثل

العدد المركب (ت ع) فى نفس المستوى فإن : ق (∠ أ و ب) = ... حيث

(و) هى نقطة الأصل.

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

(٥١) إذا كان : أ ب حـ ء شكل رباعى وكان $ع_١$ = ٣ (جتا أ + ت جا أ)

، $ع_٢$ = ٢ (جتا ب + ت جا ب) ، $ع_٣$ = ٤ (جتا حـ + ت جا حـ) ، $ع_٤$ = جتا ء + ت جا ء

فإن : $ع_١ ع_٢ ع_٣ ع_٤$ = ...

(أ) ٤٨ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٤ ت (د) ٤٨ ت

٢٦ إذا كان : ع عدد مركب ، |ع| = ع + ٣ − ٢ ت فأوجد : ع

٢٧ إذا كان : سعة (ع + ت) = $\frac{\pi}{٤}$ ، سعة (ع − ٣) = $\frac{٣\pi}{٤}$

أوجد : ع على الصورة الجبرية حيث ع عدد مركب.

٢٨ إذا كان : سعة $ع_١$ = $\frac{\pi}{٣}$ ، وسعة $ع_٢$ = $\frac{٣\pi}{٤}$ ، وسعة $ع_٣$ = $\frac{\pi}{٦}$ أوجد :

(١) سعة $(ع_١^٢ ع_٢)$ | (٢) سعة $(٢ ع_١ ع_٣)$

(٣) سعة $\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣}$ | (٤) سعة $(ع_٣^٦)$

٢٩ إذا كان : $|ع_١| = |ع_٢| = ١$ ، سعة $(ع_١ ع_٢^٣) = ٨١°$ ، سعة $\left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right) = ٢٢°$

أوجد على صورة : س + ص ت العدد : $(ع_١^{١٠} ع_٢^{١٥})$

٣٠ إذا كان $|ع_١| = |ع_٢| = ١$ ، سعة $(ع_١ \times ع_٢^٥)$ تساوى ١٠٥° ،

سعة $(ع_١ \div ع_٢)$ تساوى ٣٣° وكان س + ص ت = $ع_١^{١٤} + ع_٢^{١٥}$

فأوجد قيمة كلاً من : س ، ص

-١ ، -١

٣١ اختصر لأبسط صورة : $\frac{\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٩} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٩}\right)^٢ \left(\text{جتا}\frac{\pi}{٦} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٦}\right)^٤}{\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٣} - \text{ت جا}\frac{\pi}{٣}\right)^٤}$

$\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

٣٢ أثبت أن : $\frac{(١ + ت)^٥ \times (\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)}{(-١ + ت)^٤} = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٤} + \theta\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{٤} + \theta\right)\right)$

٣٣ إذا كان : $ع_١$ = جتا ٧٥° + ت جا ٧٥° ، $ع_٢$ = جتا ١٥° + ت جا ١٥°

أوجد الصورة المثلثية للعدد : $ع_١ + ع_٢$

$٢\sqrt{٢}$ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

٣٤ إذا كان : ع = جتا θ + ت جا θ ، $ع_١ = \frac{١ + ع}{١ - ع}$ أثبت أن : $ع_١$ = ت ظتا $\frac{\theta}{٢}$

٣٥ إذا كانت : θ ∈]−π ، π[أوجد مقياس وسعة العدد : ع = ١ + جتا θ + ت جا θ

٣٦ إذا كان : س + $\frac{١}{س}$ = ٢ جتا θ أثبت أن : $س^ن - \frac{١}{س^ن}$ = ± ٢ ت جا (ن θ)

٣٧ إذا كان : $ع_١$ = ٤ (جتا ٢ θ + ت جا ٢ θ) ، $ع_٢$ = ١٣ (جتا θ − ت جا θ)

حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[، ظا θ = $\frac{٥}{١٢}$

فأوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لكل من : $ع_١ ع_٢$ ، $ع_٢^٢$

٣٨ إذا كان : ع = ٥ (جتا θ + ت جا θ) حيث θ ∈]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π[، جتا θ = $\frac{٣}{٥}$

فأوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لكل من : $ع^{-١}$ ، $ع^{-٢}$ ، $(\bar{ع})^{-٢}$

٣٩ أثبت أن : $\left(\frac{\text{جتا}\frac{\theta}{٢} - \text{ت جا}\frac{\theta}{٢}}{\text{جا}\frac{\theta}{٢} - \text{ت جتا}\frac{\theta}{٢}}\right)^ن$ = جتا ن $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ + ت جا ن $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

٤٠ (دورة ٢٠٠٢) بوضع ى = $\frac{\pi}{٢}$ − ٢ θ أو بأية طريقة أخرى ، حيث $ت^٢$ = −١

أثبت أن : $\left(\frac{١ + \text{جا ى} + \text{ت جتا ى}}{١ + \text{جا ى} - \text{ت جتا ى}}\right)^ن$ = جتا ن $\left(\frac{\pi}{٢} - ى\right)$ + ت جا ن $\left(\frac{\pi}{٢} - ى\right)$

٤١ أثبت أن : ت $\left((١ - ت)^ن - (١ + ت)^ن\right)$ = $٢^{\frac{ن+٢}{٢}}$ جا $\frac{ن\pi}{٤}$

٤٢ إذا كان : $ع_١$ ∈ ك ، $ع_٢$ ∈ ك

فأثبت أن : $|ع_١ + ع_٢|^٢ + |ع_١ - ع_٢|^٢ = ٢\left(|ع_١|^٢ + |ع_٢|^٢\right)$

٤٣ إذا كان س + ت ص = (أ + ب ت)^ن فأثبت أن : $س^٢ + ص^٢ = (أ^٢ + ب^٢)^ن$

٤٤ أوجد باستخدام الأعداد المركبة قيمة : $\frac{\text{جا ٥ س}}{\text{جا س}}$ بدلالة جتا س

٤٥ أوجد (١ + ت)^ن على كل من الصورتين الجبرية والمثلثية

ومن ذلك استنتج قيمتى : أ ، ب إذا كان أ + ب ت = (١ + ت)^ن

مسائل تقيس مهارات التفكير

٤٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

∴ ① إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ ثلاثة أعداد مركبة

بحيث $|ع_١| = |ع_٢| = |ع_٣| = |\frac{١}{ع_١} + \frac{١}{ع_٢} + \frac{١}{ع_٣}| = ١$

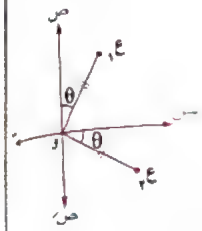
وكان $|ع_١ + ع_٢ + ع_٣| = أ$ فإن .....

(أ) أ = ١ (ب) أ < ١ (جـ) أ > ٣ (د) أ = ٣

② النقط التى تمثل الأعداد المركبة ع ، ت ع ، ع + ت ع فى مستوى أرجاند هى رؤوس Δ أ ب حـ فإن مساحة Δ أ ب حـ = ...

(أ) $|ع|$ (ب) $|ع|^٢$ (جـ) $٢|ع|^٢$ (د) $\frac{١}{٢}|ع|^٢$

③ فى الشكل المقابل :



إذا كان : $|ع_١| = |ع_٢| = \sqrt{٣}$

فإن : $|ع_١ + ع_٢| =$ .....

(أ) ٢ (ب) $٢\sqrt{٣}$

(جـ) $\sqrt{٦}$ (د) ٣

④ إذا كان : $(٢\sqrt{٢} + ت)^{٥٠} = ٣^{٤٩}(أ + ب ت)$ فإن : $أ^٢ + ب^٢ =$ .....

(أ) ٩ (ب) ٢٥ (جـ) ٤٩ (د) ٥٠

⑤ إذا كان : $ع_١ = ٤\sqrt{٣}(جتا ١٤٠° + ت جا ١٤٠°)$ ، $ع_٢ = ٤(جتا ٢٣٠° + ت جا ٢٣٠°)$

فإن : $|ع_١ - ع_٢| =$ .....

(أ) ٨ (ب) $٨\sqrt{٢}$ (جـ) ١٢ (د) $١٢\sqrt{٢}$

⑥ إذا كان : ع عدد مركب وكان $|ع - ٤| < |ع - ٢|$ فإن الجزء الحقيقى للعدد المركب يمكن أن يساوى .....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑦ إذا كان $ع_ن = جتا \frac{\pi}{٢^ن} + ت جا \frac{\pi}{٢^ن}$

فإن : $(ع_١ \times ع_٢ \times ع_٣ \times ....$ إلى ∞) تساوى .....

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ∞

الدرس 2 الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر)

تمهيد

قبل دراسة الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر) يجب أن نتعرف على بعض المتسلسلات التى يعرف كل منها بمتسلسلة ماكلورين أو مفكوك ماكلورين والتى تستخدم فى التعبير عن الدالة بصورة متسلسلة من قوى متغير هذه الدالة وفيما يلى نورد مفكوك ماكلورين لبعض الدوال التى سوف تستخدم فى دراسة العدد المركب فى صورته الأسية.

• دالة الجيب : ص = جا س : $جا س = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{(-١)^ن}{|\underline{٢ن+١}}\, س^{٢ن+١}$

أى أن : $جا س = \frac{س}{|\underline{١}} - \frac{س^٣}{|\underline{٣}} + \frac{س^٥}{|\underline{٥}} - .....$

• دالة جيب التمام : ص = جتا س : $جتا س = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{(-١)^ن}{|\underline{٢ن}}\, س^{٢ن}$

أى أن : $جتا س = ١ - \frac{س^٢}{|\underline{٢}} + \frac{س^٤}{|\underline{٤}} - .....$

• الدالة الأسية : ص = هـ^س : $هـ^س = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{س^ن}{|\underline{ن}}$

أى أن : $هـ^س = ١ + \frac{س}{|\underline{١}} + \frac{س^٢}{|\underline{٢}} + \frac{س^٣}{|\underline{٣}} + ...$

الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر)

بملاحظة أن : $هـ^{ت س} = ١ + \frac{ت س}{|\underline{١}} + \frac{ت^٢ س^٢}{|\underline{٢}} + \frac{ت^٣ س^٣}{|\underline{٣}} + \frac{ت^٤ س^٤}{|\underline{٤}} + ...$

$= ١ + \frac{ت س}{|\underline{١}} - \frac{س^٢}{|\underline{٢}} - \frac{ت س^٣}{|\underline{٣}} + \frac{س^٤}{|\underline{٤}} - .....$

$= (١ - \frac{س^٢}{|\underline{٢}} + \frac{س^٤}{|\underline{٤}} - .....) + ت(\frac{س}{|\underline{١}} - \frac{س^٣}{|\underline{٣}} + ...)$

∴ $\boxed{هـ^{ت س} = جتا س + ت جا س}$

أى أن : العدد المركب ع = س + ت ص = ل (جتا θ + ت جا θ)

يمكن كتابته على الصورة $\boxed{ع = ل\, هـ^{\theta ت}}$ وتسمى هذه الصورة بالصورة الأسية للعدد المركب ع حيث θ بالتقدير الدائرى.

مثال ①

ضع كلًّا من الأعداد المركبة الآتية على الصورة الأسية (صورة أويلر) :

① $ع_1 = 1 - \sqrt{3}\, ت$ ② $ع_2 = \frac{1}{1 + ت}$

الحل

① $ع_1 = 1 - \sqrt{3}\, ت$ ∴ س = ١ ، ص = $-\sqrt{3}$

، ∵ ل = $|ع_1| = \sqrt{س^2 + ص^2}$ ∴ ل = $\sqrt{1 + 3} = 2$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ $ع_1$ يقع فى الربع الرابع.

∴ $\theta = ظا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right) = ظا^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right)$ ∴ $\theta = -\frac{\pi}{3}$

∴ $ع_1 = 2\, هـ^{-\frac{\pi}{3} ت}$ (الصورة الأسية)

② $ع_2 = \frac{1}{1 + ت} \times \frac{1 - ت}{1 - ت} = \frac{1 - ت}{1 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} ت$ ∴ س = $\frac{1}{2}$ ، ص = $\frac{-1}{2}$

، ∵ ل = $|ع_2| = \sqrt{س^2 + ص^2}$ ∴ ل = $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ $ع_2$ يقع فى الربع الرابع.

∴ $\theta = ظا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right) = ظا^{-1}\left(\frac{-1}{2} \div \frac{1}{2}\right) = ظا^{-1}(-1)$

∴ $\theta = -\frac{\pi}{4}$

∴ $ع_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, هـ^{-\frac{\pi}{4} ت}$ (الصورة الأسية)

حل آخر :

∵ $ع_2 = \frac{1}{1 + ت}$ ويفرض أن ١ + ت = ع

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ $|ع| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

∴ ع يقع فى الربع الأول.

∴ $\theta = ظا^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

∴ $ع = \sqrt{2}\, هـ^{\frac{\pi}{4} ت}$

∴ $ع_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\, هـ^{\frac{\pi}{4} ت}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, هـ^{-\frac{\pi}{4} ت}$

تذكر أن :

$\frac{1}{أ^{ن}} = أ^{-ن}$ بشرط أ ≠ ٠ .

مثال ②

ضع على الصورة المثلثية العدد المركب $ع = \frac{2(1 + ت)}{1 - ت}$ ثم اكتب الصورة الأسية للعدد ع

الحل

$ع = \frac{2(1 + ت)}{1 - ت} \times \frac{1 + ت}{1 + ت} = \frac{2(1 + ت)^2}{1 + 1} = \frac{\cancel{2}(1 + 2ت + ت^2)}{\cancel{2}} = 2ت$

∴ $ع = 2 \times ت = 2\left(جتا \frac{\pi}{2} + ت\, جا \frac{\pi}{2}\right)$ (الصورة المثلثية)

∵ ل = $|ع| = 2$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ ∴ $ع = 2\, هـ^{\frac{\pi}{2} ت}$ (الصورة الأسية)

ملاحظة

$ت = جتا \frac{\pi}{2} + ت\, جا \frac{\pi}{2} = هـ^{\frac{\pi}{2} ت}$ ، $-ت = جتا \frac{-\pi}{2} + ت\, جا \frac{-\pi}{2} = هـ^{\frac{-\pi}{2} ت}$

، $1 = جتا\, ٠ + ت\, جا\, ٠ = هـ^{صفر ت}$ ، $-1 = جتا\, \pi + ت\, جا\, \pi = هـ^{\pi ت}$

مثال ③

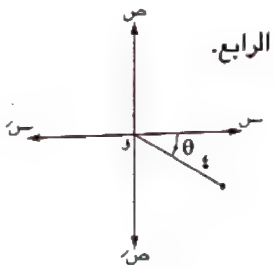
ضع على الصورة الأسية (صورة أويلر) العدد $ع = 4\left(جتا \frac{\pi}{3} - ت\, جا \frac{\pi}{3}\right)$

الحل

∵ $ع = 4\left(جتا \frac{\pi}{3} - ت\, جا \frac{\pi}{3}\right)$ ∴ $|ع| = ل = 4$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ العدد ع يقع فى الربع الرابع.

∴ $\theta = -\frac{\pi}{3}$



∴ $ع = 4\left(جتا\left(\frac{-\pi}{3}\right) + ت\, جا\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$ الصورة المثلثية.

∴ $ع = ل\, هـ^{\theta ت} = 4\, هـ^{\frac{-\pi}{3} ت}$ (الصورة الأسية)

مثال ٤

أوجد الصورة الجبرية لكل مما يأتي : ① $ع = \sqrt{3}\, هـ^{\frac{5\pi}{3} ت}$ ② $ع = هـ^{3 + \frac{\pi}{6} ت}$

الحل

① $ع = \sqrt{3}\, هـ^{\frac{5\pi}{3} ت}$ ∴ $ل = |ع| = \sqrt{3}$ ، $\theta = \frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$

∴ $ع = ل(جتا\,\theta + ت\, جا\,\theta) = \sqrt{3}\left(جتا\left(\frac{-\pi}{3}\right) + ت\, جا\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$ (الصورة المثلثية)

∴ $ع = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + ت \times \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} ت$ (الصورة الجبرية)

② $ع = هـ^{3 + \frac{\pi}{6} ت} = هـ^{3} \times هـ^{\frac{\pi}{6} ت}$ ∴ $ل = |ع| = هـ^{3}$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$

∴ $ع = ل(جتا\,\theta + ت\, جا\,\theta) = هـ^{3}\left(جتا\,\frac{\pi}{6} + ت\, جا\,\frac{\pi}{6}\right)$ (الصورة المثلثية)

∴ $ع = هـ^{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + ت \times \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} هـ^{3} + \frac{1}{2} هـ^{3} ت$ (الصورة الجبرية)

مثال ٥

أثبت أن : ① $جتا\,\theta = \frac{هـ^{ت\theta} + هـ^{-ت\theta}}{2}$ ② $جا\,\theta = \frac{هـ^{ت\theta} - هـ^{-ت\theta}}{2ت}$

③ $هـ^{3 + ت\pi} - هـ^{-ت\pi} = (1 - هـ)(1 + هـ + هـ^{2})$

الحل

∵ $هـ^{ت\theta} = جتا\,\theta + ت\, جا\,\theta$ (١)

∴ $هـ^{-ت\theta} = جتا(-\theta) + ت\, جا(-\theta)$

∴ $هـ^{-ت\theta} = جتا\,\theta - ت\, جا\,\theta$ (٢)

① بجمع (١) ، (٢) : ∴ $هـ^{ت\theta} + هـ^{-ت\theta} = 2\, جتا\,\theta$ ∴ $جتا\,\theta = \frac{هـ^{ت\theta} + هـ^{-ت\theta}}{2}$

② بطرح (٢) من (١) : ∴ $هـ^{ت\theta} - هـ^{-ت\theta} = 2ت\, جا\,\theta$ ∴ $جا\,\theta = \frac{هـ^{ت\theta} - هـ^{-ت\theta}}{2ت}$

③ ∵ $هـ^{3 + ت\pi} = هـ^{3} \times هـ^{ت\pi} = هـ^{3}(جتا\,\pi + ت\, جا\,\pi) = هـ^{3}(-1 + 0) = -هـ^{3}$

، ∵ $هـ^{-ت\pi} = جتا(-\pi) + ت\, جا(-\pi) = -1 + صفر = -1$

∴ $هـ^{3 + ت\pi} - هـ^{-ت\pi} = -هـ^{3} + 1 = 1 - هـ^{3} = (1 - هـ)(1 + هـ + هـ^{2})$

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة الأسية

① إذا كان : $ع_1 = ل_1 هـ^{\theta_1 ت}$ ، $ع_2 = ل_2 هـ^{\theta_2 ت}$ فإن :

(١) $ع_1 ع_2 = ل_1 هـ^{\theta_1 ت} \times ل_2 هـ^{\theta_2 ت} = ل_1 ل_2 هـ^{\theta_1 ت + \theta_2 ت}$

أى أن : $ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2 هـ^{(\theta_1 + \theta_2) ت}$

(٢) $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1 هـ^{\theta_1 ت}}{ل_2 هـ^{\theta_2 ت}} = \frac{ل_1}{ل_2} هـ^{\theta_1 ت - \theta_2 ت}$ أى أن : $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2} هـ^{(\theta_1 - \theta_2) ت}$

② لأى عدد $ع = ل هـ^{\theta ت}$ يكون $ع^{ن} = ل^{ن} هـ^{ن\theta ت}$ حيث $ن \in ص$

مثال ٦

إذا كان : $ع_1 = 10\,(جتا\,310° + ت\, جا\,310°)$ ، $ع_2 = 5\,(جتا\,100° + ت\, جا\,100°)$

فأوجد الصورة الأسية لكل من : ① $\frac{ع_1}{ع_2}$ ② $\frac{ع_2}{ع_1}$

الحل

① ∵ $ع_1 = 10\,(جتا\,310° + ت\, جا\,310°) = 10\,(جتا\,-50° + ت\, جا\,-50°)$

، $ع_2 = 5\,(جتا\,100° + ت\, جا\,100°)$

∴ $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{10}{5}\,[جتا\,(-50° - 100°) + ت\, جا\,(-50° - 100°)]$

$= 2\,(جتا\,(-150°) + ت\, جا\,(-150°))$

وقيمة الزاوية $-150°$ بالتقدير الدائرى $= \frac{-150°}{180°} \times \pi = \frac{-5}{6}\pi$

∴ $\frac{ع_1}{ع_2} = 2\left(جتا\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + ت\, جا\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right)$

والصورة الأسية (صورة أويلر) للمقدار المركب $\frac{ع_1}{ع_2} = 2\, هـ^{\frac{-5\pi}{6} ت}$

② الصورة الأسية (صورة أويلر) للمقدار المركب $\frac{ع_2}{ع_1} = \left(\frac{ع_1}{ع_2}\right)^{-1} = \frac{1}{2} هـ^{\frac{5\pi}{6} ت}$

مثال ٤

أوجد الصورة الجبرية لكل مما يأتى : ① $ع = \sqrt{٣}\, هـ^{\frac{٥\pi}{٣} ت}$ ② $ع = هـ^{٢ + \frac{\pi}{٦} ت}$

الحل

① $ع = \sqrt{٣}\, هـ^{\frac{٥\pi}{٣} ت}$ ∴ $ل = |ع| = \sqrt{٣}$ ، $\theta = \frac{٥\pi}{٣} - ٢\pi = \frac{-\pi}{٣}$

∴ $ع = ل(جتا\,\theta + ت\, جا\,\theta) = \sqrt{٣}\left(جتا\left(\frac{-\pi}{٣}\right) + ت\, جا\left(\frac{-\pi}{٣}\right)\right)$ (الصورة المثلثية)

∴ $ع = \sqrt{٣}\left(\frac{١}{٢} + ت \times \frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٣}{٢} ت$ (الصورة الجبرية)

② $ع = هـ^{٢ + \frac{\pi}{٦} ت} = هـ^{٢} \times هـ^{\frac{\pi}{٦} ت}$ ∴ $ل = |ع| = هـ^{٢}$ ، $\theta = \frac{\pi}{٦}$

∴ $ع = ل(جتا\,\theta + ت\, جا\,\theta) = هـ^{٢}\left(جتا\frac{\pi}{٦} + ت\, جا\frac{\pi}{٦}\right)$ (الصورة المثلثية)

∴ $ع = هـ^{٢}\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + ت \times \frac{١}{٢}\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢} هـ^{٢} + \frac{١}{٢} هـ^{٢} ت$ (الصورة الجبرية)

مثال ٥

أثبت أن : ① $جتا\,\theta = \frac{هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت}}{٢}$ ② $جا\,\theta = \frac{هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت}}{٢ ت}$

③ $هـ^{٢ + \pi ت} - هـ^{-\pi ت} = (١ - هـ)(١ + هـ + هـ^{٢})$

الحل

∵ $هـ^{\theta ت} = جتا\,\theta + ت\, جا\,\theta$

∴ $هـ^{-\theta ت} = جتا(-\theta) + ت\, جا(-\theta)$

∴ $هـ^{-\theta ت} = جتا\,\theta - ت\, جا\,\theta$

① بجمع (١) ، (٢) : ∴ $هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت} = ٢\, جتا\,\theta$ ∴ $جتا\,\theta = \frac{هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت}}{٢}$

② بطرح (٢) من (١) : ∴ $هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت} = ٢ ت\, جا\,\theta$ ∴ $جا\,\theta = \frac{هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت}}{٢ ت}$

③ ∵ $هـ^{٢ + \pi ت} = هـ^{٢} \times هـ^{\pi ت} = هـ^{٢}(جتا\,\pi + ت\, جا\,\pi) = هـ^{٢}(-١ + ٠) = -هـ^{٢}$

، ∵ $هـ^{-\pi ت} = جتا(-\pi) + ت\, جا(-\pi) = -١ + صفر = -١$

∴ $هـ^{٢ + \pi ت} - هـ^{-\pi ت} = -هـ^{٢} + ١ = ١ - هـ^{٢} = (١ - هـ)(١ + هـ + هـ^{٢})$

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة الأسية

① إذا كان : $ع_١ = ل_١ هـ^{\theta_١ ت}$ ، $ع_٢ = ل_٢ هـ^{\theta_٢ ت}$ فإن :

(١) $ع_١ ع_٢ = ل_١ هـ^{\theta_١ ت} \times ل_٢ هـ^{\theta_٢ ت} = ل_١ ل_٢ هـ^{(\theta_١ + \theta_٢) ت}$

أى أن : $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢ هـ^{(\theta_١ + \theta_٢) ت}$

(٢) $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١ هـ^{\theta_١ ت}}{ل_٢ هـ^{\theta_٢ ت}} = \frac{ل_١}{ل_٢} هـ^{(\theta_١ - \theta_٢) ت}$ أى أن : $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} هـ^{(\theta_١ - \theta_٢) ت}$

② لأى عدد $ع = ل هـ^{\theta ت}$ يكون $ع^{ن} = ل^{ن} هـ^{ن \theta ت}$ حيث $ن \in ص$

مثال ٦

إذا كان : $ع_١ = ١٠ (جتا\, ٣١٠° + ت\, جا\, ٣١٠°)$ ، $ع_٢ = ٥ (جتا\, ١٠٠° + ت\, جا\, ١٠٠°)$

أوجد الصورة الأسية لكل من : ① $\frac{ع_١}{ع_٢}$ ② $\frac{ع_٢}{ع_١}$

الحل

① ∵ $ع_١ = ١٠ (جتا\, ٣١٠° + ت\, جا\, ٣١٠°) = ١٠ (جتا\, -٥٠° + ت\, جا\, -٥٠°)$

، $ع_٢ = ٥ (جتا\, ١٠٠° + ت\, جا\, ١٠٠°)$

∴ $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{١٠}{٥} [جتا(-٥٠° - ١٠٠°) + ت\, جا(-٥٠° - ١٠٠°)]$

$= ٢ (جتا(-١٥٠°) + ت\, جا(-١٥٠°))$

وقيمة الزاوية $-١٥٠°$ بالتقدير الدائرى $= \frac{-١٥٠°}{١٨٠°} \times \pi = \frac{-٥}{٦}\pi$

∴ $\frac{ع_١}{ع_٢} = ٢ \left(جتا\left(\frac{-٥\pi}{٦}\right) + ت\, جا\left(\frac{-٥\pi}{٦}\right)\right)$

والصورة الأسية (صورة أويلر) للمقدار المركب $\frac{ع_١}{ع_٢} = ٢ هـ^{\frac{-٥\pi}{٦} ت}$

∴ الصورة الأسية (صورة أويلر) للمقدار المركب $\frac{ع_٢}{ع_١} = \left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right)^{-١} = \frac{١}{٢} هـ^{\frac{٥\pi}{٦} ت}$

مثال ٧

ضع العدد المركب ع = $(\sqrt{٣} + ت)^{٤}$ على صورة أويلر.

الحـــل

نضع $ع_{١}$ = $\sqrt{٣}$ + ت على الصورة المثلثية حيث س = $\sqrt{٣}$ ، ص = ١

∴ $|ع_{١}| = \sqrt{٣ + ١} = \sqrt{٤} = ٢$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ $ع_{١}$ يقع فى الربع الأول.

∴ $\theta_{١} = ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right) = ظا^{-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = \frac{\pi}{٦}$

∴ $\sqrt{٣} + ت = ٢\left(جتا\frac{\pi}{٦} + ت\ جا\frac{\pi}{٦}\right)$ وهى الصورة المثلثية.

∴ $(\sqrt{٣} + ت)^{٤} = ٢^{٤}\left(جتا\frac{\pi}{٦} \times ٤ + ت\ جا\frac{\pi}{٦} \times ٤\right)$

∴ $(\sqrt{٣} + ت)^{٤} = ١٦\left(جتا\frac{٢\pi}{٣} + ت\ جا\frac{٢\pi}{٣}\right) = ١٦\ هـ^{\frac{٢\pi ت}{٣}}$ «صورة أويلر»

حل آخر : نفرض أن $ع_{١}$ = $\sqrt{٣}$ + ت ∴ $|ع_{١}| = \sqrt{٣ + ١} = ٢$

، $\theta = ظا^{-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = \frac{\pi}{٦}$ ∴ $ع_{١} = ٢\left(جتا\frac{\pi}{٦} + ت\ جا\frac{\pi}{٦}\right) = ٢\ هـ^{\frac{\pi ت}{٦}}$

∴ $ع = ع_{١}^{٤} = ٢^{٤}\ هـ^{\frac{٤\pi ت}{٦}} = ١٦\ هـ^{\frac{٢\pi ت}{٣}}$

مثال ٨

ضع كلًا من العددين : $\sqrt{٢}$ ت ، ١ + ت على الصورة المثلثية

ثم أوجد الصورة الأسية وكذلك الصورة الجبرية للمقدار : $\left(\frac{\sqrt{٢}\ ت}{١ + ت}\right)^{٦}$

الحـــل

∵ ت = $\left(جتا\frac{\pi}{٢} + ت\ جا\frac{\pi}{٢}\right)$ ∴ $\sqrt{٢}$ ت = $\sqrt{٢}\left(جتا\frac{\pi}{٢} + ت\ جا\frac{\pi}{٢}\right)$

، بفرض أن ع = ١ + ت ∴ س = ١ ، ص = ١

، ل = |ع| = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ ع يقع فى الربع الأول

∴ $\theta = ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right) = ظا^{-١}(١) = \frac{\pi}{٤}$ ∴ ١ + ت = $\sqrt{٢}\left(جتا\frac{\pi}{٤} + ت\ جا\frac{\pi}{٤}\right)$

∴ $\frac{\sqrt{٢}\ ت}{١ + ت} = \frac{\sqrt{٢}\left(جتا\frac{\pi}{٢} + ت\ جا\frac{\pi}{٢}\right)}{\sqrt{٢}\left(جتا\frac{\pi}{٤} + ت\ جا\frac{\pi}{٤}\right)} = جتا\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٤}\right) + ت\ جا\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٤}\right)$

∴ $\frac{\sqrt{٢}\ ت}{١ + ت} = جتا\frac{\pi}{٤} + ت\ جا\frac{\pi}{٤}$

∴ $\left(\frac{\sqrt{٢}\ ت}{١ + ت}\right)^{٦} = جتا\frac{٣\pi}{٢} + ت\ جا\frac{٣\pi}{٢} = جتا\left(\frac{-\pi}{٢}\right) + ت\ جا\left(-\frac{\pi}{٢}\right) = هـ^{\frac{-\pi ت}{٢}}$

«الصورة الأسية»

، الصورة الجبرية للمقدار = جتا (−٩٠°) + ت جا (−٩٠°) = − ت

تمارين 7

على الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر)

اختبار تفاعلي

• فهم ○ تطبيق ❖ مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسي

١ ضع على الصورة الأسية (صورة أويلر) كلاً مما يأتي :

① $-٢ت$ ② ٧ ③ $٢\sqrt{٣} - ٢ت$

④ $\frac{٨}{\sqrt{٣} - ت}$ ⑤ $\frac{٤}{١ + \sqrt{٣}ت}$

٢ أوجد الصورة الجبرية للعدد ع في كل مما يأتي :

① $ع = ٢ هـ^{\pi ت}$ ② $ع = \sqrt{٢} هـ^{-\frac{\pi}{٢} ت}$ ③ $ع = ٨ هـ^{\frac{\pi}{٢} ت}$

٣ عبر عن كلًّا من الأعداد الآتية بالصورة الأسية :

① $\frac{١}{٢}(جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)$ ② $-٤\left(جتا \frac{٧\pi}{٦} + ت جا \frac{٧\pi}{٦}\right)$

③ $-٢\left(جا \frac{\pi}{٣} - ت جتا \frac{\pi}{٣}\right)$ ④ $\sqrt{٢}\left(-جا \frac{٣\pi}{٤} + ت جتا \frac{٣\pi}{٤}\right)$

٤ إذا كانت : $ع = \sqrt{٦} - ٣\sqrt{٢}ت$ فأوجد الصورة المثلثية والأسية لكل من :

① $ع$ ② $\bar{ع}$ ③ $-ع$

④ $-\bar{ع}$ ⑤ $\frac{١}{ع}$ ⑥ $\frac{١}{\bar{ع}}$

٥ إذا كانت : $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ فاكتب كلًّا من الأعداد المركبة الآتية بالصورة الأسية :

① $ل(جتا \theta - ت جا \theta)$ ② $-ل(جتا \theta + ت جا \theta)$

③ $٦(-جتا \theta + ت جا \theta)$ ④ $٢(-جا \theta + ت جتا \theta)$

⑤ $-ل(جا \theta + ت جتا \theta)$ ⑥ $\frac{١}{جتا \theta - ت جا \theta}$

٦ ضع العدد ع في كل مما يأتي على الصورة س + ت ص

ثم أوجد الصورة المثلثية والصورة الأسية له :

① $ع = \frac{٢ - ٢ت}{٢ت}$ ② $ع = \frac{\sqrt{٢}ت}{١ + ت}$ ③ $ع = \frac{(ت - ١)(٣ - ٤ت)}{(١ + ٢ت)^٢}$

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $هـ^{٢\pi ت} =$ ..... (على الصورة الجبرية)

(أ) $١ + ت$ (ب) $١ - ت$ (جـ) ١ (د) -١

② $٢ت =$ ..... (على الصورة الأسية)

(أ) $هـ^{-\frac{\pi}{٢} ت}$ (ب) $٢ هـ^{\frac{\pi}{٢} ت}$ (جـ) $٣ هـ^{-\frac{\pi}{٢} ت}$ (د) $٣ هـ^{\pi ت}$

③ الصورة الجبرية للعدد المركب $ع = \sqrt{٢} هـ^{\frac{\pi}{٤} ت}$ هي .....

(أ) $١ + ت$ (ب) $١ - ت$ (جـ) $-١ + ت$ (د) $-١ - ت$

④ $\left(جتا \frac{٥\pi}{٣} + ت جا \frac{٥\pi}{٣}\right)^٤ = هـ$ .....

(أ) $\frac{٢\pi}{٣} ت$ (ب) $-\frac{١}{٣}\pi ت$ (جـ) $\frac{١}{٣}\pi ت$ (د) $\frac{-٥}{٣}\pi ت$

⑤ إذا كان : $ع = جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}$ فإن : $ع + ١ =$ .....

(على الصورة الأسية)

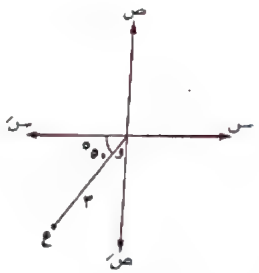
(أ) $هـ^{\frac{\pi}{٦} ت}$ (ب) $\sqrt{٣} هـ^{\frac{\pi}{٦} ت}$ (جـ) $\sqrt{٣} هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$ (د) $(\sqrt{٢} + ١) هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$

⑥ من الشكل المقابل :

العدد ع على الصورة الأسية = ...

(أ) $هـ^{\frac{١٣}{١٨}\pi ت}$ (ب) $هـ^{\frac{-١٣}{١٨}\pi ت}$

(جـ) $٣ هـ^{\frac{١٣}{١٨}\pi ت}$ (د) $٣ هـ^{\frac{-١٣}{١٨}\pi ت}$



⑦ إذا كان : $ع_١ = -١ - ت$ فإن الصورة الأسية للعدد ع = ...

(أ) $هـ^{\frac{٣\pi}{٤} ت}$ (ب) $هـ^{\frac{٥\pi}{٤} ت}$ (جـ) $\sqrt{٢} هـ^{-\frac{٣\pi}{٤} ت}$ (د) $\sqrt{٣} هـ^{٢٢٥ ت}$

٨ (دور أول ٢٠١٧) إذا كان : ع = ٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت فإن الصورة الأسية للعدد ع تساوي

(أ) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ (ب) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{٦}ت}$ (جـ) ٤ هـ$^{-\frac{\pi}{٣}ت}$ (د) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{٢}ت}$

٩ (دور ثان ٢٠١٨) جتا $\frac{\pi}{٦}$ − ت جا $\frac{\pi}{٦}$ = ...

(أ) هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ (ب) هـ$^{-\frac{\pi}{٣}ت}$ (جـ) هـ$^{\frac{٥\pi}{٦}ت}$ (د) هـ$^{\frac{\pi}{٦}ت}$

١٠ (دور أول ٢٠١٨) هـ$^{\theta ت}$ + هـ$^{-\theta ت}$ = ...

(أ) هـ$^{٢\theta ت}$ (ب) ٢ جتا θ (جـ) ٢ جا θ (د) هـ$^{-٢\theta ت}$

١١ (دور أول ٢٠١٩) القيمة العددية للمقدار : هـ$^{\pi ت}$ − هـ$^{-\pi ت}$ = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

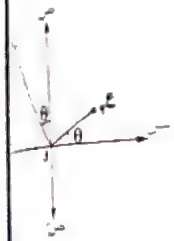
١٢ إذا كان : ع = س + ت ص فإن الجزء الحقيقي للعدد هـ^{ع} هو .....

(أ) هـ^{س} جتا ص (ب) هـ^{س} جا ص (جـ) هـ^{س} (د) جتا ص

١٣ الجزء الحقيقي في العدد المركب (هـ$^{٢+\frac{\pi}{٣}ت}$) يساوي .....

(أ) صفر (ب) هـ^{٢} (جـ) هـ$^{-٢}$ (د) −هـ^{٢}

١٤ في الشكل المقابل :



ع$_١$ ، ع$_٢$ عددان مركبان في مستوى أرجاند

، |ع$_١$| = ٢ |ع$_٢$| فإن : $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = ...

(أ) ٢ هـ$^{-\frac{\pi}{٣}ت}$ (ب) ٢ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ (د) $\frac{١}{٢}$ هـ$^{-\frac{\pi}{٣}ت}$

١٥ إذا كان ع$_١$ = جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{٧\pi}{٦}$ وكان : |ع$_١$| = ٤ ، سعة (ع$_١$ ع$_٢$) = $\frac{\pi}{٢}$

فإن : ع$_٢$ = ...

(أ) ٤ هـ$^{\frac{٧\pi}{٦}ت}$ (ب) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ (جـ) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{٦}ت}$ (د) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{١٢}ت}$

١٦ إذا كان : ع$_١$ = ل$_١$ هـ$^{\theta ت}$ ، ع$_٢$ = ل$_٢$ هـ$^{\theta ت}$ فإن : |ع$_١$ + ع$_٢$| = ...

(أ) أقل من (ل$_١$ + ل$_٢$) (ب) أكبر من (ل$_١$ + ل$_٢$)

(جـ) يساوي (ل$_١$ + ل$_٢$) (د) يساوي |ل$_١$ − ل$_٢$|

١٧ إذا كان : ع = ل هـ$^{\theta ت}$ فإن : ل هـ$^{(\frac{\pi}{٢} - \theta) ت}$ تمثل بالعدد المركب .....

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ ع (ب) ع + $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{ع}{ت}$ (د) ع ت

١٨ في الشكل المقابل :

دائرة مركزها (م) فيها ق (∠ أ حـ ب) = ٣٠°

، ق (∠ م ب أ) = θ وكانت : ع = جا ٢ θ + ت جتا ٢ θ

فإن : ع = ... على الصورة الأسية.

(أ) هـ$^{\frac{\pi}{٦}ت}$ (ب) هـ$^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$ (جـ) هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ (د) هـ$^{\frac{\pi}{٢}ت}$

١٩ (دور أول ٢٠٢١) إذا كان ع عددًا مركبًا ، ع + $\bar{ع}$ = ٢ هـ$^{\pi ت}$

فإن ع يمكن أن تساوي .....

(أ) هـ$^{\pi ت}$ (ب) ٢ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ (جـ) هـ$^{-\frac{\pi}{٣}ت}$ (د) ٢ هـ$^{\pi ت}$

٨ أثبت أن :

① هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ − هـ$^{-\frac{\pi}{٣}ت}$ = $\sqrt{٣}$ ت

② هـ$^{٤+ت\pi}$ − هـ$^{-ت\pi}$ = ١ − هـ^{٤}

③ جتا θ = $\frac{١}{٢}$ (هـ$^{\theta ت}$ + هـ$^{-\theta ت}$)

④ جا θ = $\frac{-ت}{٢}$ (هـ$^{\theta ت}$ − هـ$^{-\theta ت}$)

٩ ضع العدد المركب ع = $\frac{-٤}{١ - \sqrt{٣} ت}$ في الصورة المثلثية والأسية.

ثم أثبت أن :

① ع^{٦} عدد حقيقي. ② $\frac{١}{ع}$ = $\frac{١}{٢}$ هـ$^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$

١٠ إذا كان : ع = ٢ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) أثبت أن : $\frac{١}{ع}$ = $\frac{١}{٢}$ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$

١١ إذا كان : ع$_١$ = ٢ (جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°) ، ع$_٢$ = ٤ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)

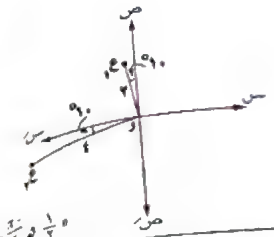
أوجد على الصورة الأسية العدد : ع$_١$ ع$_٢$ ، $\frac{ع_١}{ع_٢}$ ، ٨ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ ، $\frac{١}{٢}$ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$

١٢ إذا كان : ع$_١$ = $\frac{٢ ت}{١ + ت}$ ، ع$_٢$ = ٤ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)

أوجد : ع$_٢$ ÷ (ع$_١$)^{٢} على الصورة الأسية. ٢ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$

١٣ في الشكل المقابل :

أوجد على الصورة الأسية العدد : $\frac{ع_١}{ع_٢}$



«$\frac{١}{٢}$ هـ$^{\frac{\pi}{٢}ت}$».

١٤ إذا كان : $ع_١ = ٦ (جتا ٢٤٠° + ت جا ٢٤٠°)$ ، $ع_٢ = ٢ (جتا ٣٠٠° + ت جا ٣٠٠°)$

فأوجد على الصورة الأسية كلًا من :

① $\frac{ع_١}{ع_٢}$ ② $\frac{ع_٢}{ع_١}$ ③ $ع_١^٢$ ④ $ع_٢^٤$

«٣ هـ$^{\frac{-\pi}{٣}ت}$ ، $\frac{١}{٣}$ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ ، ٣٦ هـ$^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$ ، ١٦ هـ$^{\frac{٤\pi}{٣}ت}$».

١٥ إذا كان : $ع_١ = ٢ (جتا ١٥٠° - ت جا ١٥٠°)$ ، $ع_٢ = ٣ (جا ١٥٠° + ت جتا ١٥٠°)$

فأوجد على الصورة الأسية كلًا من : $ع_١ ع_٢$ ، $ع_١^٢$ ، $ع_٢^٤$

«٦ هـ$^{\frac{٥\pi}{٦}ت}$ ، ٤ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ ، ٨١ هـ$^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$».

١٦ ضع الناتج في كلٍّ مما يأتي على الصورة الأسية والصورة المثلثية :

① $٢ هـ^{\frac{\pi}{٦}ت} \times ٣ هـ^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$

② $٤ هـ^{\frac{٧\pi}{٤}ت} \div ٢ هـ^{\frac{-\pi}{٣}ت}$

③ $\frac{٣\sqrt{٢} هـ^{\frac{٧\pi}{١٢}ت} \times \sqrt{٢} هـ^{\frac{٤\pi}{٥}ت}}{هـ^{\frac{\pi}{٦}ت} \times ٢ هـ^{\frac{٢\pi}{٣}ت}}$

١٧ (دور أول ٢٠٠٦) إذا كان : $ع_١ = ٤ (جتا \frac{٥\pi}{٣} - ت جا \frac{٥\pi}{٣})$ ، $ع_٢ = هـ^{\frac{-\pi}{٥}ت}$ حيث $ت^٢ = -١$

فأوجد العدد : $ع = \frac{ع_٢}{ع_١}$ في الصورة المثلثية.

«$\frac{١}{٤} (جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦})$».

١٨ (دور ثان ٢٠٠٩) إذا كان : $ع_١ = ١ + \sqrt{٣} ت$ ، $ع_٢ = جتا \frac{\pi}{٦} - ت جا \frac{\pi}{٦}$

فأوجد العدد : $\frac{ع_١}{ع_٢}$ على الصورة الأسية.

«٢ هـ$^{\frac{\pi}{٢}ت}$».

١٩ (دور ثان ٢٠٠٣) إذا كان : $ع_١ = ١ - \sqrt{٣} ت$ ، $ع_٢ = ١ + ت$ حيث $ت^٢ = -١$

فأوجد العدد : $ع = \frac{ع_١}{ع_٢}$ في الصورة الأسية ثم أثبت أن : $ع^{١٢}$ عدد حقيقي. «$\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{٧\pi}{١٢}ت}$».

٢٠ (دور أول ٢٠١٠) إذا كان : $ع_١ = \sqrt{٢} (جتا \frac{\pi}{٤} - ت جا \frac{\pi}{٤})$ ، $ع_٢ = ١ + ت$

فأوجد الصورة الأسية للعدد : ع حيث $ع = \frac{ع_٢^٢}{ع_١}$

«$\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{٧\pi}{١٢}ت}$».

٢١ (دور أول ٢٠٠٧) إذا كان : $ع_١ = ٦ (جتا \frac{٤\pi}{٣} - ت جا \frac{٤\pi}{٣})^٢$ ، $ع_٢ = ٢ هـ^{\frac{٥\pi}{٣}ت}$

حيث $ت^٢ = -١$ فأوجد العدد : $ع = ع_١ ع_٢^٢$ في الصورة المثلثية.

«$٢٤ (جتا \frac{٢}{٣}\pi + ت جا \frac{٢}{٣}\pi)$».

٢٢ ضع كلًا من المقدارين : $\sqrt{٢} ت^٥$ ، $ت^٤ + ت^٥$ على الصورة المثلثية ثم

أوجد الصورة الجبرية وكذلك الصورة الأسية للمقدار : $\left(\frac{\sqrt{٢} ت^٥}{ت^٤ + ت^٥}\right)^٤$

«-١ ، هـ$^{\pi ت}$».

٢٣ ضع الناتج في كلٍّ مما يأتي على الصورة الجبرية :

① $ع = ٣ (جتا \frac{٢\pi}{٣} + ت جا \frac{٢\pi}{٣}) \times ٢ هـ^{\frac{\pi}{٢}ت}$

«$-٣\sqrt{٣} + ٣ ت$».

② $ع = -٢ (١ - ت) هـ^{\frac{\pi}{٢}ت}$

«$-٢ - ٢ ت$».

٢٤ إذا كان : $ع_١ = جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°$ ، $ع_٢ = جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}$

، $ع_٣ = جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°$

فأوجد الصورة الأسية (صورة أويلر) للمقدار : $\frac{ع_١^٦ ع_٣^٥}{ع_٢^٤}$

«هـ$^{\frac{\pi}{٢}ت}$».

٢٥ إذا كان : $ع_١ = جتا \frac{٧\pi}{٤} - ت جا \frac{٧\pi}{٤}$ ، $ع_٢ = -١ + ت$ ، $ع_٣ = جا ٦٠° + ت جتا ٦٠°$

أوجد العدد : $ع = \frac{ع_١^٤ ع_٢^٢}{ع_٣^٥}$ على الصورة الأسية والصورة الجبرية.

«٢ هـ$^{\frac{-\pi}{٣}ت}$ ، $١ - \sqrt{٣} ت$».

٢٦ إذا كان : $ع = هـ^{\theta ت}$ أوجد المقياس والسعة الأساسية للعدد : $\frac{١ + ع}{١ - ع}$ «$ظا \frac{\theta}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$».

مسائل تقيس مهارات التفكير

٢٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $ت^{٥} = ...$

(أ) $هـ^{\frac{\pi}{٢}}$ (ب) $هـ^{-\frac{\pi}{٢}}$ (جـ) -١ (د) ١

② إذا كان : $أ هـ^{٢ θ ت} + ب هـ^{-٢ θ ت} = ٤ جتا ٢ θ - ٦ ت جا ٢ θ$

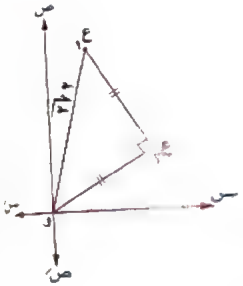
فإن : $أ \times ب = ...$ حيث أ ، ب أعداد حقيقية.

(أ) -١ (ب) ٥ (جـ) -٥ (د) ٤

③ إذا كان : $س + ت ص = هـ^{θ ت}$ فإن أقل قيمة للعدد $س ص$ هى .....

(أ) $-\frac{١}{٢}$ (ب) -١ (جـ) -٢ (د) ١

④ الشكل المقابل :



يمثل العددان المركبان $ع_١$ ، $ع_٢$ على شكل ارجاند

فإن $\left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right)^{٦} = ...$

(أ) $٨ هـ^{\frac{-\pi}{٦} ت}$ (ب) $٨ هـ^{\frac{-\pi}{٤} ت}$

(جـ) $٨ هـ^{\frac{-\pi}{٣} ت}$ (د) $٨ هـ^{\frac{-\pi}{٢} ت}$

الدرس 3 نظرية ديموافر

نظرية ديموافر

لأى عدد مركب $ع = ل (جتا θ + ت جا θ)$ حيث θ سعة العدد ع

1 نظرية ديموافر بأس صحيح موجب

إذا كان : ن عدد صحيح موجب فإن : $ع^{ن} = ل^{ن} (جتا ن θ + ت جا ن θ)$

فمثلاً : إذا كان : $ع = ٣ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)$

فإن : $ع^{٤} = ٣^{٤} (جتا (٤ \times ٣٠°) + ت جا (٤ \times ٣٠°)) = ٨١ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)$

2 نظرية ديموافر بأس نسبى موجب

إذا كان ن عدد صحيح موجب ، θ مقاسة بالتقدير الستينى فإن :

$ع^{\frac{١}{ن}} = ل^{\frac{١}{ن}} \left(جتا \left(\frac{θ + ٣٦٠° ر}{ن}\right) + ت جا \left(\frac{θ + ٣٦٠° ر}{ن}\right)\right)$ لكل $ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ..... (ن - ١)$

وإذا كانت θ مقاسة بالتقدير الدائرى نستخدم ٢ π بدلاً من ٣٦٠° والأعداد الناتجة من التعويض عن $ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... (ن - ١)$ تسمى الجذور النونية للعدد ع

فمثلاً : إذا كان : $ع = ٨ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)$ فإن :

$ع^{\frac{١}{٣}} = (٨)^{\frac{١}{٣}} (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)^{\frac{١}{٣}}$

$= ٢ \left(جتا \frac{٣٠° + ٣٦٠° ر}{٣} + ت جا \frac{٣٠° + ٣٦٠° ر}{٣}\right)$ لكل $ر = ٠ ، ١ ، ٢$

وعند $ر = ٠$ يكون $ع_١ = ٢ \left(جتا \frac{٣٠°}{٣} + ت جا \frac{٣٠°}{٣}\right) = ٢ (جتا ١٠° + ت جا ١٠°)$

وعند $ر = ١$ يكون $ع_٢ = ٢ \left(جتا \frac{٣٠° + ١ \times ٣٦٠°}{٣} + ت جا \frac{٣٠° + ١ \times ٣٦٠°}{٣}\right) = ٢ (جتا ١٣٠° + ت جا ١٣٠°)$

وعند $ر = ٢$ يكون $ع_٣ = ٢ \left(جتا \frac{٣٠° + ٢ \times ٣٦٠°}{٣} + ت جا \frac{٣٠° + ٢ \times ٣٦٠°}{٣}\right)$

$= ٢ (جتا ٢٥٠° + ت جا ٢٥٠°) = ٢ (جتا (-١١٠°) + ت جا (-١١٠°))$

أى أن :

$ع^{\frac{١}{٣}}$ له ثلاث قيم هى $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ وكل منها يسمى الجذر الثالث (التكعيبى) للعدد ع

اللهم صل وسلم
على نبينا محمد

محتويات

لاحظ أن

يمكن إيجاد $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ ، $ع_٤$ باختيار قيم للعدد ن تجعل سعة كلًّا منهم فى الفترة $]-\pi ، \pi]$ مباشرة كالآتى :

$\because \theta = ٦٠° = \frac{\pi}{٣} \in]٠ ، \pi]$

$\therefore$ نضع ن = ٠ ، −١ ، ١ ، −٢ (أربع قيم تبدأ بالسالب بعد الصفر)

عند ن = ٠ $\therefore ع_١ = \sqrt{٢}\,(جتا ١٥° + ت جا ١٥°)$

عند ن = −١ $\therefore ع_٢ = \sqrt{٢}\,(جتا (-٧٥°) + ت جا (-٧٥°))$

عند ن = ١ $\therefore ع_٣ = \sqrt{٢}\,(جتا ١٠٥° + ت جا ١٠٥°)$

عند ن = −٢ $\therefore ع_٤ = \sqrt{٢}\,(جتا (-١٦٥°) + ت جا (-١٦٥°))$

مثال ٢

أوجد الصورة المثلثية لقيم المقدار : $(\sqrt{٣} + ت)^{\frac{١}{٥}}$

الحل

بفرض أن : $ع = \sqrt{٣} + ت$ $\therefore س = \sqrt{٣}$ ، $ص = ١$

$\therefore |ع| = ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{٣ + ١} = ٢$

، $\because س > ٠$ ، $ص > ٠$ $\therefore$ ع يقع فى الربع الأول.

$\therefore \theta = ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right) = ظا^{-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = ٣٠°$

$\therefore ع = ٢\,(جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)$

، $\because ع^{\frac{١}{٥}} = (ع^٢)^{\frac{١}{٥}} = [٢\,(جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)]^{\frac{١}{٥}} = (٤\,(جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°))^{\frac{١}{٥}}$

$= ٤^{\frac{١}{٥}}\,(جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)^{\frac{١}{٥}}$

$= \sqrt[٥]{٤}\left(جتا \frac{٦٠° + ٣٦٠° ن}{٥} + ت جا \frac{٦٠° + ٣٦٠° ن}{٥}\right)$

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

عند ن = ٠ $\therefore ع_١ = \sqrt[٥]{٤}\,(جتا ١٢° + ت جا ١٢°)$

عند ن = ١ $\therefore ع_٢ = \sqrt[٥]{٤}\,(جتا ٨٤° + ت جا ٨٤°)$

عند ن = ٢ $\therefore ع_٣ = \sqrt[٥]{٤}\,(جتا ١٥٦° + ت جا ١٥٦°)$

عند ن = ٣ $\therefore ع_٤ = \sqrt[٥]{٤}\,(جتا ٢٢٨° + ت جا ٢٢٨°) = \sqrt[٥]{٤}\,[جتا (-١٣٢°) + ت جا (-١٣٢°)]$

عند ن = ٤ $\therefore ع_٥ = \sqrt[٥]{٤}\,(جتا ٣٠٠° + ت جا ٣٠٠°) = \sqrt[٥]{٤}\,[جتا (-٦٠°) + ت جا (-٦٠°)]$

$\therefore (\sqrt{٣} + ت)^{\frac{٢}{٥}}$ له خمسة قيم هى $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ ، $ع_٤$ ، $ع_٥$

مثال ٣

أوجد قيم $(-٦٤ ت)^{\frac{١}{٦}}$ ومثل هذه القيم على شكل أرجاند.

الحل

بفرض أن : $ع = -٦٤ ت$

$\therefore ع = ٦٤ \times (-ت)$

$= ٦٤\,(جتا (-٩٠°) + ت جا (-٩٠°))$

$= ٦٤\left(جتا \left(\frac{-\pi}{٢}\right) + ت جا \left(\frac{-\pi}{٢}\right)\right)$

$\therefore ع^{\frac{١}{٦}} = (٦٤)^{\frac{١}{٦}}\left(جتا \left(\frac{-\pi}{٢}\right) + ت جا \left(\frac{-\pi}{٢}\right)\right)^{\frac{١}{٦}}$

$= ٢\left(جتا \left(\frac{\frac{-\pi}{٢} + ٢\pi ن}{٦}\right) + ت جا \left(\frac{\frac{-\pi}{٢} + ٢\pi ن}{٦}\right)\right)$

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

عند ن = ٠ $\therefore ع_١ = ٢\left(جتا \left(\frac{-\pi}{١٢}\right) + ت جا \left(\frac{-\pi}{١٢}\right)\right)$

عند ن = ١ $\therefore ع_٢ = ٢\left(جتا \left(\frac{\pi}{٤}\right) + ت جا \left(\frac{\pi}{٤}\right)\right)$

عند ن = ٢ $\therefore ع_٣ = ٢\left(جتا \left(\frac{٧\pi}{١٢}\right) + ت جا \left(\frac{٧\pi}{١٢}\right)\right)$

عند ن = ٣ $\therefore ع_٤ = ٢\left(جتا \left(\frac{١١\pi}{١٢}\right) + ت جا \left(\frac{١١\pi}{١٢}\right)\right)$

عند ن = ٤ $\therefore ع_٥ = ٢\left(جتا \left(\frac{-٣\pi}{٤}\right) + ت جا \left(\frac{-٣\pi}{٤}\right)\right)$

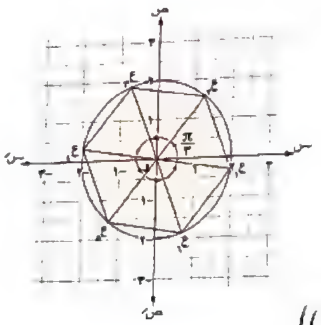
تذكر أن :

١ = جتا ٠° + ت جا ٠°

ت = جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°

−١ = جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°

−ت = جتا (−٩٠°) + ت جا (−٩٠°)



عند ن = ٥ ∴ ع$_{٥}$ = ٢ (جتا $\frac{-٥\pi}{١٢}$) + ت جا ($\frac{-٥\pi}{١٢}$))

لاحظ أن : النقط الست التى تمثل قيم العدد (−٦٤ ت)$^{\frac{١}{٦}}$ فى شكل أرجاند تقع جميعها على دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل (و) وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول وتقسم الدائرة إلى ست أقواس متساوية فى القياس.

أى أن : ق(∠ ع$_{ن}$ و ع$_{ن+١}$) = $\frac{٣٦٠°}{٦}$ = ٦٠° أى يساوى $\frac{\pi}{٣}$

الجذور النونيـة

المعادلة س^{ن} = أ حيث أ عدد مركب يكون لها ن من الجذور على الصورة س = أ$^{\frac{١}{ن}}$ الجذور جميعًا فى مستوى أرجاند على دائرة واحدة طول نصف قطرها |أ$^{\frac{١}{ن}}$| وتكون رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه ن

مثال ٤

مثل على شكل أرجاند جذور المعادلة : ع^{٥} + ٣٢ = ٠

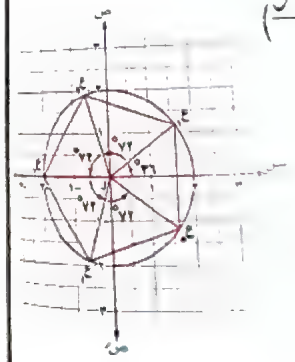
الحـل

∵ ع^{٥} + ٣٢ = ٠ ∴ ع^{٥} = −٣٢ ∴ ع = (−٣٢)$^{\frac{١}{٥}}$

∴ ع = (٣٢ × −١)$^{\frac{١}{٥}}$ ∴ ع = ٣٢$^{\frac{١}{٥}}$ (جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°)$^{\frac{١}{٥}}$

∴ ع = ٢ (جتا $\frac{١٨٠° + ٣٦٠° ن}{٥}$ + ت جا $\frac{١٨٠° + ٣٦٠° ن}{٥}$)

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤



عند ن = ٠ ∴ ع$_{١}$ = ٢ (جتا ٣٦° + ت جا ٣٦°)

عند ن = ١ ∴ ع$_{٢}$ = ٢ (جتا ١٠٨° + ت جا ١٠٨°)

عند ن = ٢ ∴ ع$_{٣}$ = ٢ (جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°)

عند ن = ٣

∴ ع$_{٤}$ = ٢ (جتا ٢٥٢° + ت جا ٢٥٢°) = ٢ (جتا (−١٠٨°) + ت جا (−١٠٨°))

عند ن = ٤ ∴ ع$_{٥}$ = ٢ (جتا ٣٢٤° + ت جا ٣٢٤°) = ٢ (جتا (−٣٦°) + ت جا (−٣٦°))

ملاحظة

جذور المعادلة تمثل فى شكل أرجاند برؤوس مضلع خماسى تقع على دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل «و» وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول بحيث ق(∠ ع$_{ن}$ و ع$_{ن+١}$) = $\frac{٣٦٠°}{٥}$ = ٧٢° ولذلك يمكن إيجاد الجذر الأول ع$_{١}$ بوضع ن = ٠ فيكون ع$_{١}$ = ٢ (جتا ٣٦° + ت جا ٣٦°) ثم إضافة ٧٢° إلى سعة ع$_{١}$ للحصول على سعة ع$_{٢}$ وتكرار ذلك للحصول على باقى الجذور.

مثال ٥

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : ع = ٢ − ٢ $\sqrt{٣}$ ت على الصورة الجبرية.

الحـل

∵ ع = ٢ − ٢ $\sqrt{٣}$ ت ∴ س = ٢ ، ص = −٢ $\sqrt{٣}$

∴ |ع| = ل = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ = $\sqrt{٤ + ١٢}$ = ٤

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ ع يقع فى الربع الرابع.

∴ θ = طا$^{-١}$ ($\frac{ص}{س}$) = طا$^{-١}$ ($\frac{-٢\sqrt{٣}}{٢}$) = طا$^{-١}$ (−$\sqrt{٣}$) = −٦٠°

∴ ع = ل (جتا θ + ت جا θ) = ٤ (جتا (−٦٠°) + ت جا (−٦٠°))

∴ ع$^{\frac{١}{٢}}$ = ٤$^{\frac{١}{٢}}$ ((جتا (−٦٠°) + ت جا (−٦٠°))$^{\frac{١}{٢}}$

= ٢ (جتا $\frac{-٦٠° + ٣٦٠° ن}{٢}$ + ت جا $\frac{-٦٠° + ٣٦٠° ن}{٢}$) حيث ن = ٠ ، ١

عند ن = ٠ ∴ ع$_{١}$ = ٢ (جتا (−٣٠°) + ت جا (−٣٠°)) = ٢ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ت × $\frac{-١}{٢}$) = $\sqrt{٣}$ − ت

عند ن = ١ ∴ ع$_{٢}$ = ٢ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°) = ٢ ($\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ + ت × $\frac{١}{٢}$) = −$\sqrt{٣}$ + ت

∴ الجذران التربيعيان للعدد ع هما ± ($\sqrt{٣}$ − ت)

حل آخر : (باستخدام الصورة الجبرية دون التحويل إلى الصورة المثلثية)

بفرض أن : ع$^{\frac{١}{٢}}$ = س + ت ص حيث س ، ص ∈ ح

ملاحظة

يمكن الحصول على الجذور النونية للعدد المركب بحيث تكون سعة كلًا منها $\frac{\theta + ٣٦٠° ر}{ن}$ ر الفترة]−π ، π] مباشرة بوضع ر = ... ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ... بحيث إذا كان:

① ن عدد فردى فإن : $\frac{١ - ن}{٢} \leq ر \leq \frac{ن - ١}{٢}$

أى أن : ر = صفر ، ١ ، −١ ، ٢ ، −٢ ، ٣ ، −٣ ، ... إلى عدد ن من القيم

② ن عدد زوجى فإن :

• $\frac{-ن}{٢} \leq ر < \frac{ن}{٢}$ لكل θ ∈ [٠ ، π[

أى أن : ر = صفر ، −١ ، ١ ، −٢ ، ٢ ، −٣ ، ... إلى عدد ن من القيم

«لاحظ أنه بعد الصفر نبدأ بالسالب»

• $\frac{-ن}{٢} < ر \leq \frac{ن}{٢}$ لكل θ ∈]−π ، ٠]

أى أن : ر = صفر ، ١ ، −١ ، ٢ ، −٢ ، ٣ ، ... إلى عدد ن من القيم

«لاحظ أنه بعد الصفر نبدأ بالموجب»

فمثلًا :

① لإيجاد الجذور التكعيبية للعدد المركب ع

نضع ر = ٠ ، ١ ، −١ (ثلاث قيم)

② لإيجاد الجذر الرابع للعدد المركب ع

• إذا كانت θ ∈ [٠ ، π[

نضع ر = ٠ ، −١ ، ١ ، −٢ (أربع قيم تبدأ بالسالب بعد الصفر)

• إذا كانت θ ∈]−π ، ٠]

نضع ر = ٠ ، ١ ، −١ ، ٢ (أربع قيم تبدأ بالموجب بعد الصفر)

مثال ①

إذا كان : ع = ٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت

فأوجد : ① ع^{٤} ② ع$^{\frac{١}{٤}}$

الحل

∵ ع = ٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت ∴ س = ٢ ، ص = ٢ $\sqrt{٣}$

∴ |ع| = ل = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ = $\sqrt{٤ + ١٢}$ = ٤

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ ع يقع فى الربع الأول.

∴ θ = طا$^{-١}$ $\left(\frac{ص}{س}\right)$ = طا$^{-١}$ $\left(\frac{٢\sqrt{٣}}{٢}\right)$ = طا$^{-١}$ $\left(\sqrt{٣}\right)$ = ٦٠°

∴ ع = ٤ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

① ع^{٤} = (٤)^{٤} [جتا (٤ × ٦٠°) + ت جا (٤ × ٦٠°)]

= ٢٥٦ (جتا ٢٤٠° + ت جا ٢٤٠°)

= ٢٥٦ [جتا (−١٢٠°) + ت جا (−١٢٠°)]

② ع$^{\frac{١}{٤}}$ = (٤)$^{\frac{١}{٤}}$ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)$^{\frac{١}{٤}}$

= $\sqrt{٢}$ $\left(\text{جتا} \frac{٦٠° + ٣٦٠° ر}{٤} + \text{ت جا} \frac{٦٠° + ٣٦٠° ر}{٤}\right)$ حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

عند ر = ٠ ∴ ع$_{١}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)

عند ر = ١ ∴ ع$_{٢}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا ١٠٥° + ت جا ١٠٥°)

عند ر = ٢ ∴ ع$_{٣}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا ١٩٥° + ت جا ١٩٥°) = $\sqrt{٢}$ (جتا (−١٦٥°) + ت جا (−١٦٥°))

عند ر = ٣ ∴ ع$_{٤}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا ٢٨٥° + ت جا ٢٨٥°) = $\sqrt{٢}$ (جتا (−٧٥°) + ت جا (−٧٥°))

أى أن : ع$^{\frac{١}{٤}}$ له أربع قيم هى ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ، ع$_{٣}$ ، ع$_{٤}$ وكل منها يسمى الجذر الرابع للعدد ع

∴ $(٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت)^{\frac{١}{٢}} = س + ت\,ص$

بتربيع الطرفين :

∴ $٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت = س^{٢} - ص^{٢} + ٢\,س\,ص\,ت$ ∴ $س^{٢} - ص^{٢} = ٢$ (١)

، $٢\,س\,ص = -٢\sqrt{٣}$ ومنها $ص = \frac{-\sqrt{٣}}{س}$ (٢)

∴ $س^{٢} - \frac{٣}{س^{٢}} = ٢$ بالضرب × $س^{٢}$

∴ $س^{٤} - ٢\,س^{٢} - ٣ = ٠$

بالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ $س^{٤} - ٣ = ٢\,س^{٢}$

∴ $(س^{٢} - ٣)(س^{٢} + ١) = ٠$

∴ $س^{٢} + ١ = ٠$ ومنها $س = \pm ت$ مرفوض لأن $\pm ت \notin ح$

أ، $س^{٢} - ٣ = ٠$ ومنها $س = \pm\sqrt{٣}$ وبالتعويض فى (٢)

∴ عند $س = \sqrt{٣}$ ∴ $ص = \frac{-\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = -١$ ∴ $ع^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٣} - ت$

، عند $س = -\sqrt{٣}$ ∴ $ص = \frac{-\sqrt{٣}}{-\sqrt{٣}} = ١$ ∴ $ع^{\frac{١}{٢}} = -\sqrt{٣} + ت$

∴ الجذران التربيعيان للعدد ع هما $\pm(\sqrt{٣} - ت)$

مثال ٦

إذا كان : $س + ت\,ص = \left(\frac{١ + ٤\sqrt{٣}\,ت}{١ - ٤\sqrt{٣}\,ت}\right)^{\frac{١}{٢}}$ **فأوجد قيم :** س ، ص الحقيقية.

الحل

بتربيع الطرفين : ∴ $(س + ت\,ص)^{٢} = \frac{١ + ٤\sqrt{٣}\,ت}{١ - ٤\sqrt{٣}\,ت}$

∴ $(س + ت\,ص)^{٢} = \frac{١ + ٤\sqrt{٣}\,ت}{١ - ٤\sqrt{٣}\,ت} \times \frac{١ + ٤\sqrt{٣}\,ت}{١ + ٤\sqrt{٣}\,ت} = \frac{(١ + ٤\sqrt{٣}\,ت)^{٢}}{١ + ٤٨}$

$= \frac{(١ + ٤\sqrt{٣}\,ت)^{٢}}{٤٩} = \left(\frac{١ + ٤\sqrt{٣}\,ت}{٧}\right)^{٢}$

∴ $س + ت\,ص = \pm\left(\frac{١ + ٤\sqrt{٣}\,ت}{٧}\right) = \pm\left(\frac{١}{٧} + \frac{٤\sqrt{٣}}{٧}\,ت\right)$

∴ $س = \pm\frac{١}{٧}$ ، $ص = \pm\frac{٤\sqrt{٣}}{٧}$

مثال ٧

إذا كان : $(س + ت\,ص)^{٢}(١ + ٢\,ت) = ١١ + ٢\,ت$ **فأوجد قيم :** س ، ص الحقيقية.

الحل

∵ $(س + ت\,ص)^{٢}(١ + ٢\,ت) = ١١ + ٢\,ت$ ∴ $(س + ت\,ص)^{٢} = \frac{١١ + ٢\,ت}{١ + ٢\,ت}$

∴ $(س + ت\,ص)^{٢} = \frac{(١١ + ٢\,ت)(١ - ٢\,ت)}{(١ + ٢\,ت)(١ - ٢\,ت)} = \frac{١٥ - ٢٠\,ت}{٥}$

∴ $(س + ت\,ص)^{٢} = ٣ - ٤\,ت$ ∴ $س^{٢} - ص^{٢} + ٢\,س\,ص\,ت = ٣ - ٤\,ت$

∴ $س^{٢} - ص^{٢} = ٣$ (١) ، $٢\,س\,ص = -٤$ (٢)

وبتربيع (١) ، (٢) والجمع : ∴ $(س^{٢} + ص^{٢})^{٢} = ٢٥$ ∴ $س^{٢} + ص^{٢} = ٥$ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : $٢\,س^{٢} = ٨$ ∴ $س^{٢} = ٤$ ∴ $س = \pm ٢$

وبطرح (١) من (٣) : ∴ $٢\,ص^{٢} = ٢$ ∴ $ص^{٢} = ١$ ∴ $ص = \mp ١$

لأن من (٢) : $س\,ص < ٠$ ∴ س ، ص مختلفتان فى الإشارة.

∴ $س = ٢$ ، $ص = -١$ أ، $س = -٢$ ، $ص = ١$

مثال ٨

إذا كانت : $س = ٨ - ٦\,ت$ **فأوجد قيم :** $س^{\frac{٣}{٢}}$

الحل

∵ $س = ٨ - ٦\,ت$ ، $س^{\frac{٣}{٢}} = س \times س^{\frac{١}{٢}}$

لذلك نفرض أن $س^{\frac{١}{٢}} = أ + ب\,ت$

وبتربيع الطرفين :

∴ $س = (أ + ب\,ت)^{٢}$ ∴ $٨ - ٦\,ت = أ^{٢} - ب^{٢} + ٢\,أ\,ب\,ت$

∴ $أ^{٢} - ب^{٢} = ٨$ (١) ، $٢\,أ\,ب = -٦$ (٢)

وبتربيع (١) ، (٢) والجمع : ∴ $(أ^{٢} + ب^{٢})^{٢} = ١٠٠$ ∴ $أ^{٢} + ب^{٢} = ١٠$ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ ٢ أ^{٢} = ١٨ ∴ أ^{٢} = ٩ ∴ أ = ± ٣

وبطرح (١) من (٣) : ∴ ٢ ب^{٢} = ٢ ∴ ب^{٢} = ١ ∴ ب = ∓ ١

لأن من (٢) : أ ب < ٠ ∴ أ ، ب مختلفتان فى الإشارة

∴ س$^{\frac{١}{٢}}$ = ± (٣ − ت) ∴ س$^{\frac{٣}{٢}}$ = س × س$^{\frac{١}{٢}}$ = ± (٨ − ٦ ت) (٣ − ت)

∴ س$^{\frac{٣}{٢}}$ = ± (١٨ − ٢٦ ت) ∴ س$^{\frac{-٣}{٢}}$ = ± $\frac{١}{١٨ - ٢٦ ت}$

∴ س$^{\frac{-٣}{٢}}$ = ± $\frac{١٨ + ٢٦ ت}{(١٨ - ٢٦ ت)(١٨ + ٢٦ ت)}$ = ± $\frac{١٨ + ٢٦ ت}{١٠٠٠}$ = ± (٠,٠١٨ + ٠,٠٢٦ ت)

مثال ٩

إذا كانت : س ∈ ك فأوجد مجموعة الحل للمعادلة :

س^{٢} − (٢ + ت) س − (١ + ٥ ت) = ٠

الحل

∵ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$ حيث أ = ١ ، ب = − (٢ + ت) ، حـ = − (١ + ٥ ت)

∴ س = $\frac{(٢ + ت) \pm \sqrt{(٢ + ت)^{٢} + ٤ (١ + ٥ ت)}}{٢}$

∴ س = $\frac{(٢ + ت) \pm \sqrt{٣ + ٤ ت + ٤ + ٢٠ ت}}{٢}$ ∴ س = $\frac{(٢ + ت) \pm \sqrt{٧ + ٢٤ ت}}{٢}$

ثم نفرض أن $\sqrt{٧ + ٢٤ ت}$ = ل + ت م وبتربيع الطرفين.

∴ ٧ + ٢٤ ت = ل^{٢} − م^{٢} + ٢ ل م ت ∴ ل^{٢} − م^{٢} = ٧ (١)

، ٢ ل م = ٢٤ (٢)

بتربيع (١) ، (٢) والجمع : ∴ (ل^{٢} + م^{٢})^{٢} = ٦٢٥

∴ ل^{٢} + م^{٢} = ٢٥ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ ٢ ل^{٢} = ٣٢ ∴ ل^{٢} = ١٦ ∴ ل = ± ٤

بطرح (١) من (٣) : ∴ ٢ م^{٢} = ١٨ ∴ م^{٢} = ٩ ∴ م = ± ٣

∴ $\sqrt{٧ + ٢٤ ت}$ = ± (٤ + ٣ ت) ∴ س = $\frac{(٢ + ت) \pm (٤ + ٣ ت)}{٢}$

∴ س = $\frac{٢ + ت + ٤ + ٣ ت}{٢}$ أ ، س = $\frac{٢ + ت - ٤ - ٣ ت}{٢}$

∴ س = $\frac{٦ + ٤ ت}{٢}$ = ٣ + ٢ ت أ ، س = $\frac{-٢ - ٢ ت}{٢}$ = −١ − ت

∴ مجموعة الحل للمعادلة = {٣ + ٢ ت ، −١ − ت}

مثال ١٠

أوجد الصورة الأسية (صورة أويلر) للعدد : ع = $\frac{(١ + \sqrt{٣} ت)(ت - \sqrt{٣})^{١١}}{٥١٢ ت^{٥}}$

ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية.

الحل

ع = $\frac{(١ + \sqrt{٣} ت)(ت - \sqrt{٣})^{١١}}{٥١٢ ت^{٥}}$ = $\frac{(١ + \sqrt{٣} ت)(ت - \sqrt{٣})^{١١}}{٥١٢ ت}$ × $\frac{ت}{ت}$

(بضرب البسط والمقام × ت)

∴ ع = $\frac{(ت - \sqrt{٣})(ت - \sqrt{٣})^{١١}}{-٥١٢}$ = $\frac{(ت - \sqrt{٣})^{١٢}}{-٥١٢}$

، بوضع ت − $\sqrt{٣}$ = − $\sqrt{٣}$ + ت على الصورة المثلثية.

∴ ل = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ = $\sqrt{٣ + ١}$ = ٢

، ∵ س = − $\sqrt{٣}$ < ٠ ، ص = ١ > ٠ ∴ − $\sqrt{٣}$ + ت يقع فى الربع الثانى.

∴ θ = ١٨٠° + ظا$^{-١}$ $\left(\frac{ص}{س}\right)$ = ١٨٠° + ظا$^{-١}$ $\left(\frac{١}{-\sqrt{٣}}\right)$ = ١٨٠° + (−٣٠°) = ١٥٠°

∴ ت − $\sqrt{٣}$ = ٢ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°) = ٢ (جتا $\frac{٥}{٦}$ π + ت جا $\frac{٥}{٦}$ π)

∴ (ت − $\sqrt{٣}$)^{١٢} = ٢^{١٢} (جتا $\frac{٥}{٦}$ π + ت جا $\frac{٥}{٦}$ π)^{١٢} = ٤٠٩٦ (جتا ١٠ π + ت جا ١٠ π)

= ٤٠٩٦ (جتا ٠ + ت جا ٠)

∴ ع = $\frac{٤٠٩٦ (جتا ٠ + ت جا ٠)}{٥١٢ (جتا π + ت جا π)}$ = ٨ (جتا − π + ت جا − π) = ٨ (جتا π + ت جا π)

∴ ع = ٨ هـ$^{π ت}$ (الصورة الأسية)

2

∴ ع$^{\frac{1}{3}}$ = ٨ (جتا $\frac{\pi + ٢\pi س}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi + ٢\pi س}{٣}$) حيث س = ٠ ، ١ ، ٢

∴ عند س = ٠ ∴ ع$_{٠}$ = ٢ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) = ٢ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$

∴ ع$_{١}$ = ٢ (جتا π + ت جا π) = ٢ هـ$^{\pi ت}$

عند س = ١

عند س = ٢

∴ ع$_{٢}$ = ٢ (جتا $\frac{٥\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٣}$) = ٢ (جتا $\frac{-\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٣}$) = ٢ هـ$^{\frac{-\pi}{٣}ت}$

∴ الجذور التكعيبية للعدد ع هي ٢ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ ، ٢ هـ$^{\pi ت}$ ، ٢ هـ$^{\frac{-\pi}{٣}ت}$

ملاحظة

من المثال السابق يمكن استخدام الصورة الأسية للعدد ع لإيجاد الجذور التكعيبية مباشرة كالآتي

∵ ع = ٨ هـ$^{\pi ت}$ ∴ ع$^{\frac{1}{3}}$ = ٨$^{\frac{1}{3}}$ هـ$^{\frac{\pi + ٢\pi س}{٣}ت}$ حيث س = ٠ ، ١ ، ٢

عند س = ٠ ∴ ع$_{١}$ = ٢ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$

عند س = ١ ∴ ع$_{٢}$ = ٢ هـ$^{\pi ت}$

عند س = ٢ ∴ ع$_{٣}$ = ٢ هـ$^{\frac{-\pi}{٣}ت}$

مثال ١١

استخدم نظرية ديموافر للتعبير عن كل من: جتا ٢θ ، جا ٢θ بدلالة جا θ ، جتا θ

الحل

∵ جتا ٢θ + ت جا ٢θ = (جتا θ + ت جا θ)^{٢}

∴ جتا ٢θ + ت جا ٢θ = جتا^{٢} θ − جا^{٢} θ + ٢ ت جا θ جتا θ

ومن خواص الأعداد المركبة ينتج أن:

جتا ٢θ = جتا^{٢} θ − جا^{٢} θ ، جا ٢θ = ٢ جا θ جتا θ

تمارين 8

على نظرية ديموافر

اختبار تفاعلي

فهم • تطبيق • مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد الصورة المثلثية وكذا الصورة الجبرية لحلول المعادلات الآتية ومثلها على شكل أرجاند حيث ع ∈ ك :

(١) ع^{٢} = ١ (٢) ع^{٤} = ١ (٣) ع^{٣} = −١

(٤) ع^{٦} = −١ (٥) ع^{٣} = ت (٦) ع^{٣} = −ت

٢ مثل على شكل أرجاند :

(١) الجذور التكعيبية للعدد ٨ (٢) الجذور الخماسية للعدد −٣٢

(٣) الجذور السداسية للعدد −٦٤ (٤) الجذور الرباعية للعدد ١٦ ت

٣ أوجد مجموعة الحل في ك لكل من المعادلات الآتية :

(١) ع^{٤} = ١٦ (٢) ع^{٣} + ٨ = ٠ (٣) ع^{٣} + ٨ ت = ٠

(٤) ع^{٥} + ٢٤٣ = ٠ (٥) ع^{٥} − ٣٢ = ٠ (٦) ع^{٥} + ٣٢ ت = ٠

٤ أوجد الصورة المثلثية لقيم كل مما يأتي :

(١) (١ + $\sqrt{٣}$ ت)$^{\frac{1}{2}}$ (٢) (−$\sqrt{٣}$ + ت)$^{\frac{2}{5}}$ (٣) (١ − ت)$^{\frac{2}{5}}$ (٤) (−٨)$^{\frac{1}{3}}$

٥ أوجد الجذور التربيعية لكل من الأعداد الآتية :

(١) ٨ ت (٢) ٧ − ٢٤ ت (٣) $\frac{٣ت - ١}{ت + ٣}$ (٤) $\frac{٨(١ - ت)}{١ + ت}$ + ١٥

٦ أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع في كل مما يأتي :

(١) (دورثان ٢٠١٤) ع = −٨ ت على الصورة الأسية.

(٢) ع = ٢ − ٢ $\sqrt{٣}$ ت على الصورة المثلثية.

(٣) (دورثان ٢٠١٥) ع = −٣ + ٤ ت دون التحويل للصورة المثلثية.

٧ أوجد بالصورة المثلثية وبالصورة الأسية جذور المعادلة الآتية فى ك :

$ع^{٤} = ٨ (١ - \sqrt{٣} ت)$ ثم اكتب مجموعة حل المعادلة.

٨ أوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية للجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة الآتية :

(١) $١ (جتا ٢٠٠° + ت جا ٢٠٠°)$

(٢) $٤ (جتا \frac{\pi}{٣} - ت جا \frac{\pi}{٣})$

(٣) $جا \frac{٥\pi}{٦} + ت جتا \frac{٥\pi}{٦}$

(٤) $٤ هـ^{\frac{٥\pi}{٣} ت}$

٩ إذا كان : $ع = ٤ + ٤ \sqrt{٣} ت$ أوجد الصورة الأسية للعدد ع ، ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع ، ومثلها على شكل أرجاند.

١٠ (دور أول ٢٠١٩) ضع العدد : $ع = \frac{٨}{١ - \sqrt{٣} ت}$ على الصورة المثلثية ثم أوجد جذريه التربيعيين على الصورة الأسية.

١١ إذا كان : $ع = جا \frac{\pi}{٩} + ت جتا \frac{\pi}{٩}$ أوجد $(\overline{ع})$ على الصورة المثلثية أوجد الجذور التكعيبية للعدد $(\overline{ع})^{٩}$

١٢ أوجد فى أبسط صورة : $ع = \frac{١ + ٤ ت + ت^{٢}}{٢ - ت - ٢ ت^{٢} - ت^{٣}}$ ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع فى الصورة المثلثية.

١٣ أوجد المقياس والسعة للعدد : $\left(\frac{١ + \sqrt{٣} ت}{١ - ت}\right)^{١٢}$ ثم أوجد الجذرين التربيعيين له على الصورة الأسية.

١٤ أوجد الصور المختلفة للعدد : $ع = \frac{-\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} - ت}$ ، ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع ، ومثل الجذرين على شكل أرجاند.

١٥ (دور أول ٢٠٠٤) إذا كان : $ع + ٢ = ت (ع - ٢)$ حيث $ت^{٢} = -١$ فأوجد العدد المركب ع على الصورة المثلثية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع فى الصورة الأسية.

١٦ (دور أول ٢٠١٢) إذا كان : $ع = (١ + جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣})^{٦}$ فضع العدد ع فى الصورة المثلثية ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع فى الصورة الأسية.

١٧ (دور أول ٢٠٠٩) إذا كانت : $ع = \left(\frac{١ + ت}{١ - ت}\right)^{٥}$ ضع العدد ع على الصورة المثلثية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع

١٨ إذا كان : $ع = ٦ - ٨ ت$ فأوجد $ع^{\frac{١}{٢}}$ على الصورة الجبرية.

١٩ إذا كان : $س + ت ص = \frac{٢}{١ - \sqrt{٣} ت}$ فأوجد قيمة كل من : س ، ص حيث س ، ص ∈ ح ثم أوجد الجذر التربيعى للمقدار : $\frac{٢}{١ - \sqrt{٣} ت}$ بالطريقة الجبرية.

٢٠ إذا كان : $\frac{٧ - ١١ ت}{٤ + ت} = أ + ب ت$ ، أوجد قيم المقدار $(\sqrt{-ب + أ ت})^{\frac{٣}{٢}}$

٢١ (دور أول ٢٠١٧) إذا كان : $ع = ١ - \sqrt{٣} ت$ (حيث $ت^{٢} = -١$) أوجد $ع^{\frac{٣}{٢}}$ فى الصورة المثلثية.

٢٢ إذا كان : $ع_{١} = \sqrt{٣} (جتا \frac{\pi}{٣} - ت جا \frac{\pi}{٣})$ ، $ع_{٢} = ٢ (جا ٣٠° + ت جتا ٣٠°)$

أوجد $ع_{١} ع_{٢}$ فى الصورة الأسية ، ثم أوجد الصورة المثلثية للعدد ع حيث $ع = (ع_{١} ع_{٢})^{\frac{١}{٤}}$

٢٣ (دور ثان ٢٠١٢) إذا كان : $ع_{١} = (جا \frac{\pi}{٩} + ت جتا \frac{\pi}{٩})^{٥}$ ، $ع_{٢} = (جتا \frac{\pi}{٩} + ت جا \frac{\pi}{٩})^{٤}$

وكان العدد المركب $ع = \frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ فأوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب ع على الصورة الأسية.

٢٤ ضع كلاً من : $ع_{١} = ٢ \sqrt{٣} + ٢ ت$ ، $ع_{٢} = ١ + \sqrt{٣} ت$ حيث $ت^{٢} = -١$ فى الصورة الأسية ومن ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد $ع_{١} ع_{٢}$

٢٥ ضع العدد : $ع_{١} = -٢ + ٢ \sqrt{٣} ت$ حيث $ت^{٢} = -١$ على الصورة الأسية

وإذا كان : $ع_{١} ع_{٢} = ١٦ هـ^{\frac{١١\pi}{٣} ت}$ فأوجد الجذرين التربيعيين للعدد $ع_{٢}$ على الصورة المثلثية.

٢٦ إذا كان : $ع_{١} = \frac{٦ + ٤ ت}{١ + ت}$ ، $ع_{٢} = \frac{٢٦}{٥ - ت}$ حيث : $ت^{٢} = -١$

فبين أن : $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ مترافقان ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد $٤ (ع_{١} - ع_{٢})$ فى الصورة المثلثية.

٢٧ إذا كان : $ع_١ = \left(\frac{\sqrt{٣} + ت}{٢}\right)^{٤}$ ، $ع_٢ = جا \frac{\pi}{٣} + ت جتا \frac{\pi}{٣}$ ، $ت^٢ = -١$

وكان $ع = \frac{ع_١}{ع_٢}$ أوجد الجذور التربيعية للعدد ع على الصورة المثلثية.

٢٨ (دور أول ٢٠٠٠) إذا كان : $س = \frac{٤}{\sqrt{٣} + ت}$ ، $ص = \frac{٢}{جتا \frac{\pi}{٦} - ت جا \frac{\pi}{٦}}$

فأثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية

حيث : $ع = س^٢ - ٢ س ص + ص^٢$

٢٩ إذا كان : $ع_١ = ١ - \sqrt{٣} ت$ ، $ع_٢ = جتا هـ + ت جا هـ$ ، $ع_٣ = \left(جتا \frac{هـ}{٢} - ت جا \frac{هـ}{٢}\right)^٢$

وكان $ع = \frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣}$ أوجد المقياس والسعة الأساسية للعدد ع ثم أوجد الجذرين التربيعيين

للعدد ع على الصورة المثلثية عند $هـ = \frac{\pi}{٦}$

٣٠ إذا كان $ع_١ = ٢ \left(جا \frac{\pi}{٣} + ت جتا \frac{\pi}{٣}\right)$ ، $ع_٢ = \sqrt{٢} \left(جا \frac{\pi}{٤} - ت جتا \frac{\pi}{٤}\right)$

، $ع_٣ = ١ + \sqrt{٣} ت$

أوجد العدد $ع = \frac{ع_٢^٢ \times ع_١^٤}{ع_٣^٥}$ على الصورة الأسية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع

على الصورة المثلثية.

٣١ إذا كانت : $ع_١ = ١ + \sqrt{٣} ت$ ، $ع_٢ = ت - \sqrt{٣}$ ، $ع_٣ = ١٢ هـ ت$ وكان $ع = \frac{ع_١ \times ع_٢^{١١}}{ع_٣}$

فأوجد : سعة ومقياس العدد ع ، ثم أوجد : $\sqrt[٣]{ع}$

٣٢ إذا كان : $\sqrt{\frac{١٨ + ت}{٢ + ٣ ت}} = س + ت ص$ حيث $ت^٢ = -١$ ، س ، ص $\in ح$

فأوجد : قيمة كلًّا من س ، ص

٣٣ أوجد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق كلاً مما يأتي :

(١) $(س + ت ص)^٢ = \frac{٣٦ - ٢ ت}{٣ + ٢ ت}$ | (٢) $(س + ت ص)^٢ (١ + ت) + ٧ - ت = ٠$

(٣) $(س + ت ص)^٢ (١ + \sqrt{٣} ت) = -١١ + ٥ \sqrt{٣} ت$

(٤) $(س + ت ص)^٢ - ١٠ (س + ت ص) + ٤١ = ٠$

٣٤ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية حيث س $\in$ ح :

(١) $س^٢ - (١ + ت) س - ٦ + ٣ ت = ٠$

(٢) $(١ - ت) س^٢ - (٦ - ٤ ت) س + ٩ - ٧ ت = ٠$

(٣) $ت س^٢ + (١ - ٢ ت) س + ٣ ت = ١$

٣٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الجذور الخماسية للواحد الصحيح تمثل على مستوى أرجاند رؤوس .....

(أ) مثلث متساوي الأضلاع. (ب) مربع.

(جـ) خماسي منتظم. (د) سداسي منتظم.

(٢) إذا كانت : $ع_٠$ ، $ع_١$ ، ... ، $ع_٥$ تمثل الجذور السداسية للواحد الصحيح على مستوى أرجاند فإن : ق (ع$_ر$ و ع$_{ر+١}$) = ... حيث $٠ \le ر \le ٥$ ، ر $\in$ ص

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٣) إذا كان : $\sqrt{٧ + ٢٤ ت} = س + ت ص$ فإن : $(س + ص)^٢ =$ .....

(أ) ٧ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٩ (د) ٥٧٦

(٤) $\sqrt{٥ + ١٢ ت} =$ .....

(أ) $\pm (٢ + ٣ ت)$ (ب) $\pm (٣ + ٢ ت)$ (جـ) $\pm (٢ - ٣ ت)$ (د) $\pm (٣ - ٢ ت)$

(٥) إذا كان : $ع_١ = ٢ \left(جتا \frac{٢\pi}{٣} + ت جا \frac{٢\pi}{٣}\right)$ وكان $ع = -٢ ت ع_١$

فإن أحد الجذور التربيعية للعدد (ع) هو .....

(أ) $\sqrt{٢} هـ^{\frac{٥\pi}{١٢} ت}$ (ب) $٢ هـ^{\frac{٥\pi}{١٢} ت}$ (جـ) $\sqrt{٢} هـ^{\frac{-٧\pi}{١٢} ت}$ (د) $٢ هـ^{\frac{٧\pi}{١٢} ت}$

(٦) إذا كانت : $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ هي الجذور التكعيبية للعدد $ع = ٦ + ٨ ت$

فإن : $\frac{٢٥ ع_١^٣ \times ٤ ع_٢^٦}{ع_٣^{١٢}} =$ .....

(أ) $٦ + ٨ ت$ (ب) $٦ - ٨ ت$ (جـ) $٣ + ٤ ت$ (د) $٣ - ٤ ت$

(٧) إذا كان : ع عدد مركب مقياسه ١٦ وكان ع$_١$ ، ع$_٢$ هما الجذران التربيعيان للعدد ع فإن طول القطعة المستقيمة التى طرفاها ع$_١$ ، ع$_٢$ يساوى ..... وحدة طول.

(أ) ٣٢ (ب) ١٦ (جـ) ٨ (د) ٤

(٨) إذا كان ع$_١$ ، ع$_٢$ ، ع$_٣$ هى جذور المعادلة ع^٣ = ٤ + ٤ $\sqrt{٣}$ ت فإن مساحة المضلع الذى رؤوسه النقط التى تمثل ع$_١$ ، ع$_٢$ ، ع$_٣$ على مستوى أرجاند تساوى ..... وحدة مربعة.

(أ) ٣ $\sqrt{٣}$ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٩ $\sqrt{٣}$ (د) ١٢ $\sqrt{٣}$

(٩) (دور أول ٢٠٢٠) حاصل ضرب جذور المعادلة س^٤ − ١ = ٠ يساوى .....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ت

(١٠) إذا كان : ع$_١$ ، ع$_٢$ ، ع$_٣$ هى جذور المعادلة : ع^٣ = أ حيث أ ≠ صفر وكانت سعة (ع$_١$) = θ فإن سعة ع$_٢$ ، ع$_٣$ هما ..... على الترتيب.

(أ) θ ، θ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ + θ ، $\frac{٢\pi}{٣}$ + θ

(جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ + θ ، $\frac{٤\pi}{٣}$ + θ (د) $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{٤\pi}{٣}$

(١١) إذا كان العدد المركب (ع) وجذوره التربيعية تقع جميعًا على دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل فأى مما يأتى يكون معلوم علمًا تامًا ؟

(أ) |ع| (ب) سعة (ع)

(جـ) الجزء الحقيقى للعدد (ع) (د) الجزء التخيلى للعدد (ع)

(١٢) إذا كانت الأعداد المركبة ع ، ع^٢ ، ع^٣ تقع على دائرة واحدة فى مستوى أرجاند مركزها نقطة الأصل فأى الجمل الآتية يكون صحيح ؟

(أ) سعة ع = سعة ع^٢ = سعة ع^٣ (ب) |ع| = ١

(جـ) |ع| = |ع^٢| = |ع^٣| ≠ ١

(د) المثلث الذى رؤوسه ع ، ع^٢ ، ع^٣ يكون قائم الزاوية.

(١٣) إذا كان ع عدد مركب على الصورة ع = ل (جتا π + ت جا π) فإن الجذران التربيعيان للعدد ع يكونان .....

(أ) حقيقيان ولهما نفس الاشارة. (ب) حقيقيان ومختلفان فى الاشارة.

(جـ) تخيليان ولهما نفس الاشارة. (د) تخيليان ومختلفان فى الاشارة.

(١٤) إذا كان ع عدد مركب فإن عدد قيم العدد ع$^{\frac{١}{٢}}$ هى .....

(أ) قيمة واحدة. (ب) قيمتان.

(جـ) ٣ قيم. (د) ٤ قيم.

(١٥) مجموع الجذرين التربيعين للعدد المركب (٣ − ٤ ت) يساوى .....

(أ) صفر (ب) ± ($\sqrt{٣}$ − ٢ ت)

(جـ) ± (٢ − ت) (د) ٦

(١٦) إذا كانت : ع$_١$ = ٤ هـ$^{\frac{٥\pi}{٦}ت}$ ، ع$_٢$ = ت فإن : $\sqrt{ع_١ ع_٢}$ = ...

(أ) ± (١ + $\sqrt{٣}$ ت) (ب) ± (١ − $\sqrt{٣}$ ت)

(جـ) ± $\sqrt{٣}$ ت (د) ٢ ± $\sqrt{٣}$ ت

(١٧) الجذران التربيعيان للعدد ت هما .....

(أ) هـ$^{\frac{\pi}{٤}ت}$ ، هـ$^{-\frac{٣}{٤}\pi ت}$ (ب) هـ$^{\frac{-\pi}{٤}ت}$ ، هـ$^{\frac{٣}{٤}\pi ت}$

(جـ) هـ$^{-\frac{\pi}{٤}ت}$ ، هـ$^{\frac{\pi}{٤}ت}$ (د) هـ$^{-\frac{٣}{٤}\pi ت}$ ، هـ$^{\frac{٣}{٤}\pi ت}$

(١٨) إذا كان : س + ت ص = ت + $\sqrt{ت}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ١ + $\sqrt{٢}$ (ب) ١ − $\sqrt{٢}$ (جـ) ١ ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) ١ ± $\sqrt{٢}$

(١٩) إذا كان : (١ − ت) س + (١ + ت) ص + ٢ ت = ٠

فإن : المقدار $\sqrt{٣س + ٤ ص ت}$ = ...

(أ) ± (٥ − ت) (ب) ± (٢ − ت) (جـ) ٣ + ت ، ١ − ت (د) ٦ ، −ت

(٢٠) إذا كانت : ع$_١$ ، ع$_٢$ ، ع$_٣$ ، ع$_٤$ هى جذور المعادلة ع^٤ = أ فإن المضلع الذى يصل بين النقط التى تمثل ع$_١$ ، ع$_٢$ ، ع$_٣$ ، ع$_٤$ على مستوى أرجاند يمثل .....

(أ) مستطيلًا. (ب) مربعًا. (جـ) متوازى أضلاع. (د) شبه منحرف.

(٢١) إذا كانت : ع$_١$ = ٢ هـ$^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$ ، ع$_١$ ع$_٢$ = ٨ هـ$^{\frac{١١\pi}{٣}ت}$

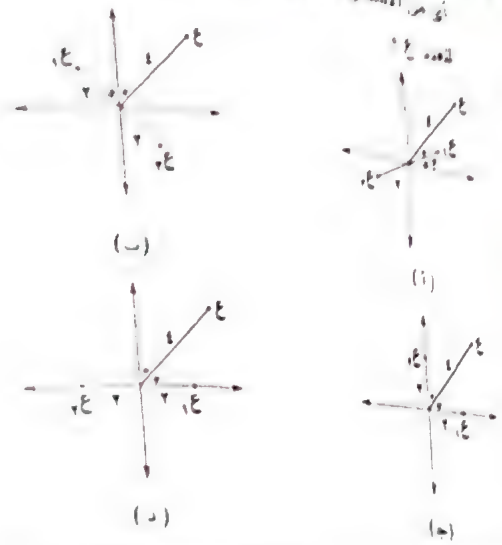
فإن حاصل ضرب الجذرين التربيعيين للعدد ع$_٢$ = ...

(أ) ٤ هـ$^{\pi ت}$ (ب) ٤ (جـ) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{٢}ت}$ (أ) ١٦

2

... إذا كان الشكل المقابل يمثل العدد المركب ع

فأي من الأشكال الآتية يمثل الجذرين التربيعيين



٣٦ استخدم نظرية ديموافر في التعبير عن :

(١) جتا ٣ θ بدلالة قوى جتا θ (٢) جا ٣ θ بدلالة قوى جا θ

٣٧ استخدم نظرية ديموافر لإثبات أن :

(١) جتا ٤ θ = ٨ جتا⁴ θ − ٨ جتا² θ + ١ ، جا ٤ θ = ٤ (جا θ جتا³ θ − جا³ θ جتا θ)

(٢) جا ٥ θ = ١٦ جا⁵ θ − ٢٠ جا³ θ + ٥ جا θ

، جتا ٥ θ = ١٦ جتا⁵ θ − ٢٠ جتا³ θ + ٥ جتا θ

٣٨ لماذا أثبت أن : جتا⁴ θ = $\frac{١}{٨}$ (جتا ٤ θ + ٤ جتا ٢ θ + ٣)

٣٩ (دولة ٢٠١٦) إذا كان : $\sqrt[٣]{\text{س} + \text{ص ت}}$ = أ + ب ت

فأثبت أن : $\frac{\text{س}}{\text{أ}} - \frac{\text{ص}}{\text{ب}}$ = ٤ (ب² − أ²)

الدرس 4 الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

علم أن الصورة المثلثية للعدد واحد هي : جتا ٠° + ت جا ٠°

وإذا كان ع = ١

فإن الجذور التكعيبية للعدد ع تنتج من العلاقة :

(ع)$^{\frac{١}{٣}}$ = (جتا ٠ + ت جا ٠)$^{\frac{١}{٣}}$ (وباستخدام نظرية ديموافر)

∴ (ع)$^{\frac{١}{٣}}$ = (جتا $\frac{٢\pi\text{ر}}{٣}$ + ت جا $\frac{٢\pi\text{ر}}{٣}$) حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢

، عند ر = ٠ ∴ ع$^{\frac{١}{٣}}$ = (جتا ٠° + ت جا ٠°) = ١

، عند ر = ١ ∴ ع$^{\frac{١}{٣}}$ = (جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{٣}$) = −$\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

، عند ر = ٢ ∴ ع$^{\frac{١}{٣}}$ = (جتا $\frac{٤\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٤\pi}{٣}$) = −$\frac{١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

∴ الجذور التكعيبية للعدد ١ هي : ١ ، −$\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، −$\frac{١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

لاحظ أن

يمكن الحصول على الجذور التكعيبية للواحد الصحيح أيضًا بحل المعادلة ع³ = ١ كالآتي :

أي ع³ − ١ = ٠ ∴ (ع − ١) (ع² + ع + ١) = ٠

وعند ع − ١ = ٠ ∴ ع = ١

وعند ع² + ع + ١ = ٠ وباستخدام القانون العام لحل معادلة الدرجة الثانية :

∴ ع = $\frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٤}}{٢}$ = $\frac{-١ \pm \sqrt{-٣}}{٢}$ = $\frac{-١ \pm \sqrt{٣}\text{ت}}{٢}$ = $\frac{-١}{٢}$ ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

∴ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هي : ١ ، $\frac{-١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\frac{-١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

الوحدة 2

ملاحظة

الجذور التكعيبية للعدد الصحيح واحد هى أعداد مركبة أحدهما حقيقى وهو العدد ١

والجذران الآخران $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت غير حقيقيين ولكنهما عددان مركبان

مترافقان مربع أحدهما يساوى الآخر أى :

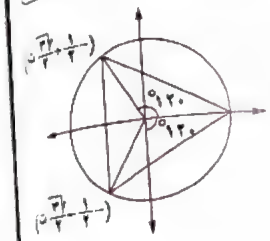
$\left(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}\right)^{٢} = -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\left(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}\right)^{٢} = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

فإذا رمزنا لأحدهما بالرمز ω (أوميجا) فإن الجذر الآخر = $\omega^{٢}$

وتكون : الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هى : ١ ، ω ، $\omega^{٢}$

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح:

إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :



① الجذور التكعيبية للواحد الصحيح يمثلها نقط فى شكل أرجاند تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ١ وتمثل رؤوس مثلث متساوى الأضلاع.

② مجموع الجذور التكعيبية الثلاثة للواحد الصحيح = صفر

أى أن : ١ + ω + $\omega^{٢}$ = صفر

إثبات :

$١ + \left(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}\right) + \left(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}\right) = ١ - \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت $- \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت = صفر

إثبات آخر :

∵ ω ، $\omega^{٢}$ هما جذرا المعادلة : $ع^{٢} + ع + ١ = ٠$ الناتجة من حل المعادلة : $ع^{٣} = ١$

∴ مجموع الجذرين : ω + $\omega^{٢}$ = $\frac{-\text{معامل ع}}{\text{معامل } ع^{٢}} = \frac{-١}{١} = -١$

∴ ١ + ω + $\omega^{٢}$ = ١ + (−١) = صفر

ملاحظة

∵ ١ + ω + $\omega^{٢}$ = ٠

∴ ω + $\omega^{٢}$ = −١ ، ١ + ω = −$\omega^{٢}$ ، ١ + $\omega^{٢}$ = −ω

③ حاصل ضرب الجذرين التكعيبيين الغير حقيقيين للواحد الصحيح = ١

أى أن : ω × $\omega^{٢}$ = ١ ∴ $\omega^{٣}$ = ١

الإثبات :

$\left(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}\right)\left(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}\right) = \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = ١$

∴ ω × $\omega^{٢}$ = ١ ∴ $\omega^{٣}$ = ١

إثبات آخر :

∵ ω ، $\omega^{٢}$ هما جذرا المعادلة : $ع^{٢} + ع + ١ = ٠$

∴ حاصل ضرب الجذرين : ω × $\omega^{٢}$ = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } ع^{٢}} = \frac{١}{١} = ١$

أى أن : $\omega^{٣}$ = ١

④ الفرق بين الجذرين التكعيبيين الغير حقيقيين للواحد الصحيح = ± $\sqrt{٣}$ ت

أى أن : ω − $\omega^{٢}$ = ± $\sqrt{٣}$ ت ، $\omega^{٢}$ − ω = ± $\sqrt{٣}$ ت

الإثبات :

∵ $(\omega - \omega^{٢})^{٢} = (\omega - \omega^{٢})^{٢} = \omega^{٤} - ٢\omega^{٣} + \omega^{٢}$

$= \omega^{٣} \times \omega - ٢ \times ١ + \omega^{٢} = \omega + \omega^{٢} - ٢ = -١ - ٢ = -٣$

∴ ω − $\omega^{٢}$ = ± $\sqrt{-٣}$ = ± $\sqrt{٣}$ ت ، $\omega^{٢}$ − ω = ± $\sqrt{-٣}$ = ± $\sqrt{٣}$ ت

ملاحظة

إذا كان : ع = أ + ب ω فإن : $\bar{ع}$ = أ + ب $\omega^{٢}$ حيث أ ∈ ح ، ب ∈ ح

القوى الصحيحة للعدد ω

∵ ω أحد جذور المعادلة $ع^{٣} = ١$ ∴ $\omega^{٣} = ١$

وبصفة عامة لكل ن ∈ ص يكون :

① $\omega^{٣ن} = ١$ أى أن : $\omega^{٣} = \omega^{٦} = \omega^{٩} = \dots\dots\dots = ١$

② $\omega^{٣ن+١} = \omega$ أى أن : $\omega^{٤} = \omega^{٧} = \omega^{١٠} = \dots\dots\dots = \omega$

③ $\omega^{٣ن+٢} = \omega^{٢}$ أى أن : $\omega^{٥} = \omega^{٨} = \omega^{١١} = \dots\dots\dots = \omega^{٢}$

مع ملاحظة أن :

• $\omega^{-١} = \frac{\omega^{٣}}{\omega} = \frac{١}{\omega}$ أى أن : $\omega^{٢} = \frac{١}{\omega}$

• $\omega^{-٢} = \frac{\omega^{٣}}{\omega^{٢}} = \frac{١}{\omega^{٢}}$ أى أن : $\omega = \frac{١}{\omega^{٢}}$

فمثلاً :

• $\omega^{١٦} = \omega^{١٥+١} = \omega$ • $\omega^{٤٧} = \omega^{٤٥+٢} = \omega^{٢}$ ، $\omega^{٨٧} = ١$

• $\omega^{-٢٥} = \frac{١}{\omega^{٢٥}} = \frac{١}{\omega^{٢٤+١}} = \frac{١}{\omega} = \omega^{٢}$ • $\omega^{-١٠١} = \frac{١}{\omega^{١٠١}} = \frac{١}{\omega^{٩٩+٢}} = \frac{١}{\omega^{٢}} = \omega$

مثال ١

إذا كان : ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت أن :

① $(١ + \omega)^{١٦} = \omega^{٢}$ ② $(١ - \omega - \omega^{٢})^{٣} = ٨$

③ $(١ - \omega)(١ - \omega^{٢}) = ٣$ ④ $(١ - ٢\omega + \omega^{٢})(١ + \omega - ٥\omega^{٢}) = ١٨$

الحل

① ∵ $١ + \omega = -\omega^{٢}$ ∴ $(١ + \omega)^{١٦} = (-\omega^{٢})^{١٦}$

∴ $(١ + \omega)^{١٦} = \omega^{٣٢} = \omega^{٣٠+٢} = \omega^{٢}$

② ∵ $١ - \omega - \omega^{٢} = ١ - (\omega + \omega^{٢}) = ١ - (-١) = ٢$

∴ $(١ - \omega - \omega^{٢})^{٣} = (٢)^{٣} = ٨$

③ $(١ - \omega)(١ - \omega^{٢}) = ١ - \omega - \omega^{٢} + \omega^{٣}$

$= ١ - (\omega + \omega^{٢}) + ١ = ١ - (-١) + ١ = ١ + ١ + ١ = ٣$

④ ∵ $١ - ٢\omega + \omega^{٢} = (١ + \omega^{٢}) - ٢\omega = -\omega - ٢\omega = -٣\omega$

، $١ + \omega - ٥\omega^{٢} = (١ + \omega) - ٥\omega^{٢} = -\omega^{٢} - ٥\omega^{٢} = -٦\omega^{٢}$

∴ $(١ - ٢\omega + \omega^{٢})(١ + \omega - ٥\omega^{٢}) = -٣\omega \times -٦\omega^{٢} = ١٨\omega^{٣} = ١٨$

مثال ٢

أثبت أن : $\left(\frac{١}{١ + ٢\omega} - \frac{١}{١ + ٢\omega^{٢}}\right)^{٢} = -\frac{٤}{٣}$

الحل

$$\frac{١}{١ + ٢\omega} - \frac{١}{١ + ٢\omega^{٢}} = \frac{(١ + ٢\omega^{٢}) - (١ + ٢\omega)}{(١ + ٢\omega)(١ + ٢\omega^{٢})}$$

$$= \frac{٢\omega^{٢} - ٢\omega}{١ + ٢\omega + ٢\omega^{٢} + ٤\omega^{٣}}$$

$$= \frac{٢(\omega^{٢} - \omega)}{١ + ٢\omega + ٢(\omega + \omega^{٢}) + ٤} = \frac{٢(\omega^{٢} - \omega)}{١ - ٢ + ٤} = \frac{٢}{٣}(\omega^{٢} - \omega)$$

∴ $\left(\frac{١}{١ + ٢\omega} - \frac{١}{١ + ٢\omega^{٢}}\right)^{٢} = \frac{٤}{٩}(\omega^{٢} - \omega)^{٢}$

$= \frac{٤}{٩} \times (\pm\sqrt{٣}\,ت)^{٢} = \frac{٤}{٩} \times -٣ = -\frac{٤}{٣}$

مثال ٣

أوجد قيمة : $\left(\frac{٢ + ٣\omega}{٢\omega^{٢} + ٣} + \frac{٥\omega^{٢} - ٣}{٥ - ٣\omega}\right)^{١٥}$

الحل

∵ $\frac{٢ + ٣\omega}{٢\omega^{٢} + ٣} = \frac{٢\omega^{٣} + ٣\omega}{٢\omega^{٢} + ٣} = \frac{\omega(٢\omega^{٢} + ٣)}{٢\omega^{٢} + ٣} = \omega$

، $\frac{٥\omega^{٢} - ٣}{٣\omega - ٥} = \frac{٥\omega^{٢} - ٣\omega^{٢}}{٣\omega - ٥} = \frac{\omega^{٢}(٥ - ٣\omega)}{٣\omega - ٥} = \omega^{٢}$

∴ المقدار $= (\omega + \omega^{٢})^{١٥} = (-١)^{١٥} = -١$

مثال ٤

إذا كانت $أ = \omega + \frac{١}{\omega}$ ، $ب = \frac{\omega^{٤} - ١}{\omega^{٢}}$ ، $حـ = \frac{٣\omega + ٢}{٣\omega^{٢} + ٢}$ ، $ء = \frac{٥\omega^{٢} - ٣}{٥ - ٣\omega}$

فأثبت أن : $أ^{٤} + ب^{٤} = ١٠ (حـ + ء)^{٢}$

الحل

$أ = \omega + \frac{١}{\omega} = \omega + \omega^{٢}$

∴ $أ = -١$ ، $ب = \frac{\omega^{٤} - ١}{\omega^{٢}} = \frac{\omega^{٤}}{\omega^{٢}} - \frac{١}{\omega^{٢}} = \omega - \omega^{٢}$ ∴ $ب = \pm \sqrt{٣}\, ت$

، ∵ $حـ = \frac{٣\omega + ٢}{٣\omega^{٢} + ٢} = \frac{٣\omega + ٣\omega^{٢}}{٣\omega^{٢} + ٢} = \frac{(٣\omega^{٢} + ٢)\,\omega}{٣\omega^{٢} + ٢}$ ∴ $حـ = \omega$

، $ء = \frac{٥\omega^{٢} - ٣}{٥ - ٣\omega} = \frac{٥\omega^{٢} - ٣\omega^{٢}}{٥ - ٣\omega} = \frac{\omega^{٢}(٥ - ٣\omega)}{٥ - ٣\omega}$ ∴ $ء = \omega^{٢}$

∴ $أ^{٤} + ب^{٤} = (-١)^{٤} + (\pm\sqrt{٣}\, ت)^{٤} = ١ + ٩ = ١٠$

، $١٠ (حـ + ء)^{٢} = ١٠ (\omega + \omega^{٢})^{٢} = ١٠ (-١)^{٢} = ١٠$ ∴ $أ^{٤} + ب^{٤} = ١٠ (حـ + ء)^{٢}$

مثال ٥

إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأوجد قيمة :

$\left(\frac{١}{\omega + ١} - \frac{١}{\omega^{٢} + ١}\right)(٣\omega - ١١\omega^{٢} - ٤)$

الحل

المقدار $= \left[\frac{\omega + ١ - \omega^{٢} - ١}{(\omega + ١)(\omega^{٢} + ١)}\right](-٣\omega^{٢} - ١١\omega^{٢} - ٤)$

$= \frac{٧(\omega - \omega^{٢})}{٧ + (\omega + \omega^{٢}) + ٤٩\omega^{٢}}(-١٤\omega^{٢} - ٧)$

المقدار $= \frac{٧(\omega - \omega^{٢}) \times -٧(٢\omega^{٢} + ١)}{٤٩ + (-١) + ٧ + ١} = \frac{-٤٩(٢\omega^{٤} + \omega^{٢} - ٢\omega^{٢} - \omega)}{٤٩ + ٧ - ١}$

$= \frac{-٤٩(\omega^{٢} + \omega - ٢)}{٤٣} = \frac{-٤٩(-١ - ٢)}{٤٣} = \frac{١٤٧}{٤٣}$

مثال ٦

كون معادلة الدرجة الثانية التى جذراها : $\frac{\omega + ٢}{\omega - ١}$ ، $\frac{\omega^{٢} + ٢}{\omega^{٢} - ١}$

الحل

مجموع الجذرين $= \frac{\omega + ٢}{\omega - ١} + \frac{\omega^{٢} + ٣}{\omega^{٢} - ١} = \frac{(\omega + ٢)(\omega^{٢} - ١) + (\omega^{٢} + ٣)(\omega - ١)}{(\omega - ١)(\omega^{٢} - ١)}$

$= \frac{\omega^{٣} + \omega^{٢} - ٢ + \omega^{٣} - \omega^{٢} + ٣\omega - ٣}{\omega^{٣} - \omega^{٢} - \omega + ١}$

$= \frac{٢\omega^{٣} + \omega^{٢} + ٣\omega - ٥}{\omega^{٣} - \omega^{٢} - \omega + ١}$

$= \frac{٢(\omega^{٣} + \omega) - ٥}{(\omega^{٣} + \omega) - ٢} = \frac{٢(-١) - ٥}{(-١) - ٢} = \frac{٣}{٣} = ١$

، حاصل ضرب الجذرين $= \frac{\omega + ٢}{\omega - ١} \times \frac{\omega^{٢} + ٢}{\omega^{٢} - ١}$

$= \frac{\omega^{٣} + ٢(\omega^{٢} + \omega) + ٤}{\omega^{٣} + (\omega^{٢} + \omega) - ١} = \frac{(-١) + ٢ + ٤}{(-١) + ١ - ١} = \frac{٣}{٣} = ١$

∴ المعادلة هى $س^{٢}$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = صفر

أى المعادلة هى : $س^{٢} - س + ١ = ٠$

مثال ٧

أوجد مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية :

(١) $س^{٢} - ٢\omega س - \omega = ٠$ (٢) $س = ١ + \omega^{س} + \omega^{٢س}$

(٣) $(٢س + ٣)^{٦} - ٩(٢س + ٣)^{٣} + ٨ = ٠$

الحل

(١) ∵ $س^{٢} - ٢\omega س - \omega = ٠$ ∴ $أ = ١$ ، $ب = -٢\omega$ ، $حـ = -\omega$

$\therefore$ س $= \dfrac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ جـ}}}{٢\,\text{أ}} = \dfrac{٢\,\omega \pm \sqrt{٤\,\omega^{٢} + ٤\,\omega}}{٢}$

$= \dfrac{٢\,\omega \pm \sqrt{٤\,(\omega + \omega^{٢})}}{٢} = \dfrac{٢\,\omega \pm ٢\sqrt{-١}}{٢} = \dfrac{٢\,\omega \pm ٢\,\text{ت}}{٢} = \omega \pm \text{ت}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{\omega + \text{ت} ، \omega - \text{ت}\}$

(٢) $\because$ س $= ١ + \omega^{\text{س}} + \omega^{٢\text{س}}$ $\qquad \therefore$ س $- ١ = \omega^{\text{س}} + \omega^{٢\text{س}}$

$\therefore (\text{س} - ١)^{٢} = (\omega^{\text{س}} + \omega^{٢\text{س}})^{٢}$

$\therefore \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ١ = \omega^{٢\text{س}} + ٢\,\omega^{٣\text{س}} + \omega^{٤\text{س}}$

$\therefore \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ١ = \omega^{٢\text{س}} + ٢ + \omega^{\text{س}}$

$\therefore \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ١ = \omega^{٢\text{س}} + \omega^{\text{س}}$

، $\because \omega^{٢\text{س}} + \omega^{\text{س}} = \text{س} - ١$ $\qquad \therefore \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ١ = \text{س} - ١$

$\therefore \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} = ٠$ $\qquad \therefore \text{س}\,(\text{س} - ٣) = ٠$

$\therefore$ س $= ٠$ (لا تحقق المعادلة) أ، س $- ٣ = ٠$ ومنها س $= ٣$ (تحقق المعادلة)

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{٣\}$

(٣) $(٢\,\text{س} + ٣)^{٦} - ٩\,(٢\,\text{س} + ٣)^{٣} + ٨ = ٠$

$\therefore \left((٢\,\text{س} + ٣)^{٣} - ١\right)\left((٢\,\text{س} + ٣)^{٣} - ٨\right) = ٠$

$\therefore (٢\,\text{س} + ٣)^{٣} = ١$ ومنها $٢\,\text{س} + ٣ = ١$ $\qquad \therefore$ س $= -١$

أ، $٢\,\text{س} + ٣ = \omega$ $\qquad \therefore$ س $= \dfrac{\omega - ٣}{٢}$

أ، $٢\,\text{س} + ٣ = \omega^{٢}$ $\qquad \therefore$ س $= \dfrac{\omega^{٢} - ٣}{٢}$

أ، $(٢\,\text{س} + ٣)^{٣} = ٨$ ومنها $٢\,\text{س} + ٣ = ٢$ $\qquad \therefore$ س $= \dfrac{-١}{٢}$

أ، $٢\,\text{س} + ٣ = ٢\,\omega$ $\qquad \therefore$ س $= \dfrac{٢\,\omega - ٣}{٢}$

أ، $٢\,\text{س} + ٣ = ٢\,\omega^{٢}$ $\qquad \therefore$ س $= \dfrac{٢\,\omega^{٢} - ٣}{٢}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \left\{-١ ، \dfrac{\omega - ٣}{٢} ، \dfrac{\omega^{٢} - ٣}{٢} ، \dfrac{-١}{٢} ، \dfrac{٢\,\omega - ٣}{٢} ، \dfrac{٢\,\omega^{٢} - ٣}{٢}\right\}$

مثال ٨

إذا كان : $(١ - \text{ت})\,(\text{س} + \text{ت ص}) = ١٩\left(\dfrac{١}{٢ - ٣\,\omega^{٢}} + \dfrac{١}{٥ + ٣\,\omega^{٢}}\right)$

فأوجد قيمة كلًا من : س ، ص

الحل

$(١ - \text{ت})\,(\text{س} + \text{ت ص}) = ١٩\left(\dfrac{٥ + ٣\,\omega^{٢} + ٢ - ٣\,\omega^{٢}}{(٢ - ٣\,\omega^{٢})\,(٥ + ٣\,\omega^{٢})}\right)$

$= ١٩\left(\dfrac{٧}{١٠ + ٦\,\omega^{٢} - ١٥\,\omega^{٢} - ٩\,\omega^{٤}}\right)$

$= ١٩\left(\dfrac{٧}{١٠ - ٩\,\omega^{٢} - ٩\,\omega}\right) = ١٩\left(\dfrac{٧}{١٠ - ٩\,(\omega + \omega^{٢})}\right)$

$= ١٩\left(\dfrac{٧}{١٠ + ٩}\right) = ٧$

$\therefore \text{س} + \text{ت ص} = \dfrac{٧}{١ - \text{ت}} \times \dfrac{١ + \text{ت}}{١ + \text{ت}} = \dfrac{٧ + ٧\,\text{ت}}{١ + ١} = \dfrac{٧}{٢} + \dfrac{٧}{٢}\,\text{ت}$

$\therefore$ س $= \dfrac{٧}{٢}$ ، ص $= \dfrac{٧}{٢}$

مثال ٩

أوجد قيمة : $\sum_{\text{ر}=١}^{٢٠} (-١)^{\text{ر}+١} \times \omega^{\text{ر}}$

الحل

$\sum_{\text{ر}=١}^{٢٠} (-١)^{\text{ر}+١} \times \omega^{\text{ر}} = (-١)^{٢}\,\omega + (-١)^{٣} \times \omega^{٢} + (-١)^{٤} \times \omega^{٣} + \dots\dots + (-١)^{٢١} \times \omega^{٢٠}$

$= \omega - \omega^{٢} + \omega^{٣} - \dots\dots - \omega^{٢٠}$

وهى تمثل مجموع متسلسلة هندسية حدها الأول $= \omega$ ، وأساسها ر $= \dfrac{-\omega^{٢}}{\omega} = -\omega$

وعدد حدودها ٢٠ حدًا.

، $\because$ حـ$_{\text{ن}} = \dfrac{\text{أ}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$ $\qquad \therefore$ حـ$_{٢٠} = \dfrac{\omega\,((-\omega)^{٢٠} - ١)}{-\omega - ١}$

$\therefore$ حـ$_{٢٠} = \dfrac{\omega\,(\omega^{٢٠} - ١)}{-(\omega + ١)} = \dfrac{\omega^{٢١} - \omega}{\omega^{٢}} = \omega^{١٩} - \dfrac{١}{\omega} = \omega^{٢} - \omega = \pm\sqrt{٣}\,\text{ت}$

$\therefore \sum_{\text{ر}=١}^{٢٠} (-١)^{\text{ر}+١} \times \omega^{\text{ر}} = \pm\sqrt{٣}\,\text{ت}$

(١٩) (دور أول ٢٠١٧) $١ + \omega + \omega^{٢} + \omega^{٣} + ... + \omega^{١٠٠} =$ .....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ω (د) $-\omega^{٢}$

(٢٠) $\left(\omega^{٢} + \frac{١}{\omega}\right)\left(١ + \frac{١}{\omega^{٢}}\right)^{٢} =$ .....

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) -٣ (د) -٥

(٢١) أى النواتج الآتية تنتمى لمجموعة الأعداد الحقيقية ؟

(أ) $\frac{\omega + ١}{\omega^{٢} + ١}$ (ب) $(\omega + ١)(\omega^{٢} + ٢)$

(جـ) $(\omega + ٣)(\omega^{٢} + ٣)$ (د) $(\omega - \omega^{٢})^{٣}$

(٢٢) إذا كان : $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ مترافقين وكان : $ع_{١} = (حـ + ء)\,\omega^{٢} + (حـ - ء)\,\omega$

، $ع_{٢} = ٧\,\omega^{٢} + ٥\,\omega$ فإن : $حـ \times ء =$ .....

(أ) ٧ (ب) -٥ (جـ) -٤ (د) -٦

(٢٣) إذا كان : $س = أ$ ، $ص = ب\,\omega$ ، $ع = حـ\,\omega^{٢}$

فإن : $\frac{س}{أ} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{ع^{٢}}{حـ^{٢}} =$ .....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ω

(٢٤) مثا $\left[(\omega^{١٠} + \omega^{٣٣})\,\pi + \frac{\pi}{٤}\right] =$ .....

(أ) $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{-\sqrt{٢}}{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٢٥) إذا كان : $ع = ٢ + ٣\,\omega^{٢}$ فإن : $ع\,\bar{ع} =$ .....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٩

(٢٦) $\left(\frac{أ}{\omega} - \frac{أ}{\omega^{٢}} + \frac{٢أ}{\omega^{٤}} - \frac{٢٣أ}{\omega^{٥}}\right)^{٢} =$ .....

(أ) $-٤٨\,أ^{٢}$ (ب) $٤٨\,أ^{٢}$ (جـ) $١٦\,أ^{٢}$ (د) $-١٦\,أ^{٢}$

(٢٧) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ،

وكانت $س = \frac{١}{١ + \omega ت}$ ، $ص = \frac{\omega + ت}{١ + \omega^{٢} ت}$ فإن : $س - ص =$ .....

(أ) $ت + ١$ (ب) $١ - ت$ (جـ) ١ (د) ت

١ إذا كان : ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) $(١ - \omega)(١ - \omega^{٢})$

(٢) $٥ + ٣\,\omega + ٣\,\omega^{٢}$

(٣) $٥ + ٥\,\omega - ٥\,\omega^{٢}$

(٤) $(٢ + ٥\,\omega + ٢\,\omega^{٢})^{٥}$

(٥) $(١ - ٢\,\omega + \omega^{٢})(١ + \omega - \omega^{٢})$

(٦) $(١ + \omega^{٢})^{١٥}$

(٧) $(١ + \omega + ٢\,\omega^{٢})^{٢} + (١ + ٢\,\omega + \omega^{٢})^{٢}$

(٨) $(١ + \omega)^{٣} + (١ - \omega - \omega^{٢})^{٣}$

(٩) $(١ - \omega)(١ - \omega^{٢})(١ + \omega^{٣})$

(١٠) $\left(١ - \frac{٢}{\omega} - \frac{٢}{\omega^{٢}}\right)(٣ - ٥\,\omega - ٥\,\omega^{٢})$

(١١) $\left(\omega + \frac{١}{\omega}\right)^{٢}\left(\omega^{٢} + \frac{١}{\omega^{٢}}\right)^{٢}$

(١٢) $\left(١ + \frac{١}{\omega} + ت\right)\left(١ + \frac{١}{\omega^{٢}} + ت\right)$

٣ (دور أول ٢٠٠٥) إذا كانت : ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، أ ، ب ، حـ ، ء أعدادًا حقيقية فأوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{أ + ب\,\omega}{أ\,\omega^{٢} + ب} + \frac{حـ\,\omega^{٢} + ء}{حـ + ء\,\omega}$ ، ١-٠

٤ إذا كانت : ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت صحة المتطابقات الآتية :

(١) $(١ + \omega^{٢})^{٨} = \omega^{٢}$

(٢) $\left(١ - \frac{٢}{\omega^{٢}} + \omega^{٢}\right)\left(١ + \omega - \frac{٥}{\omega}\right) = ١٨$

(٣) $(١ - \omega^{٢} + \omega^{٤})^{٢} + (١ + \omega^{٢} + \omega^{٤})^{٢} = ٤\,\omega$

(٤) $\left(١ + \omega + \frac{٢}{\omega}\right)^{٢} + \left(١ + ٢\,\omega + \frac{١}{\omega}\right)^{٢} + \left(٢ + \omega^{٢} + \frac{١}{\omega^{٢}}\right)^{٢} =$ صفر

(٥) $\frac{٥ - ٤\,\omega + ١١\,\omega^{٢}}{١ - ٢\,\omega + ٣\,\omega^{٢}} = ٣$

(٦) (دور أول ٢٠١١) $\left(\frac{١}{\omega^{٢}(\omega + ٣)} - \frac{١}{١ + ٣\,\omega^{٤}}\right)^{٢} = \frac{-٢٧}{٤٩}$

(٧) $\frac{١}{٤ + ٣\,\omega + ٢\,\omega^{٢}} + \frac{١}{٥ + ٣\,\omega + ٤\,\omega^{٢}} = ١$

(٨) $\left(\frac{\omega}{١ + ٢\,\omega}\right)^{٢} + \left(\frac{١ + ٢\,\omega^{٢}}{\omega^{٢}}\right)^{٢} = \frac{-١٠}{٣}\,\omega^{٢}$

(٩) $\left(\frac{١}{١ + \omega ت} - \frac{\omega + ت}{١ + \omega^{٢} ت}\right)^{٨} = ١٦$

(١٠) $\frac{\omega^{٢} (\omega - ١)(\omega^{٢} - ١)}{(٢ + \omega^{٢})(١ + \omega ٢)} = -١$

(١١) (دور أول ٢٠١٤) $\left(\frac{\omega ٧ - ٢}{٧ - \omega^{٢} ٢} - \frac{\omega^{٢} ٣ - ٥}{٣ - \omega ٥}\right)^{٤} = ٩$

(١٢) $\frac{٣ + ٥ + \omega ٣ + \omega^{٢} ٣}{\omega^{٢} ٤ - \omega ٢ - ١} + \frac{\omega ٣ + \omega ٥ + ٣}{\omega ٤ - \omega^{٢} ٢ - ١} = \frac{-٢}{١٩}$

(١٣) $\left(\frac{١ - \omega}{\omega^{٢} ٢ + \omega ٢ + ٣} + \frac{\omega ٢ + \omega^{٢} + ٤}{\omega^{٢} - ٢}\right)^{٢} = ٤$

(١٤) $\frac{٥ + \omega ٣^{٢}}{\omega - ٢} + \frac{٥ + \omega ٣}{\omega^{٢} - ٢} = \frac{٢٢}{٧}$

(١٥) $(٥ + \omega ٤)^{٣} \times (٥ + \omega^{٢} ٤)^{٢} = ٩٢٦١$

(١٦) $\left(\frac{\omega^{٢}}{\omega^{٢} ٣ + ٢} - \frac{\omega}{\omega ٣ + ٢}\right)^{٢} = \frac{-١٢}{٤٩}$

(١٧) $\left(\frac{١}{\omega^{٢} ٢ + ١} - \frac{١}{\omega ٢ + ١}\right)^{٤} = \frac{١٦}{٩}$

(١٨) $(\omega + ٥)\left(\frac{١}{\omega^{٢} ٢ + ٣} - \frac{١}{\omega ٢ + ٢}\right) = ٤$

(١٩) $\left(٥ - \frac{٥}{\omega + ١} + \frac{٣}{\omega^{٢}}\right)^{٦} = ٦٤$

(٢٠) $\left(\frac{\omega^{٢} ٣ - ١٢}{\omega ١٢ - ٣} - \frac{\omega ١٤ - ١٧}{\omega^{٢} ١٧ - ١٤}\right)^{٤} = ٣^{٢ن}$

(٢١) $\frac{س + \omega ص}{\omega^{٢} س + ص} + \frac{ع \omega^{٢} + ل}{ع + \omega ل} = -١$

(٢٢) $\left[\frac{أ + \omega ب + \omega^{٢} حـ}{\omega^{٢} أ + ب + حـ \omega} - \frac{حـ + أ \omega^{٢} + ب \omega}{\omega حـ + ب \omega^{٢} + أ}\right]^{٨} = ٨١$

(٢٣) $\left(س + \frac{ص}{\omega}\right)\left(س + \frac{ص}{\omega^{٢}}\right) = (س - ص)^{٢} + س ص$

(٢٤) (دور أول ٢٠١٥) $(أ + ب \omega + أ \omega^{٢})(أ + ب \omega^{٢} + أ \omega^{٤}) = (ب - أ)^{٢}$

٥ إذا كانت : ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت أن :

(١) $(\omega + ١)(\omega^{٢} + ١)(\omega^{٣} + ١)(\omega^{٤} + ١)(\omega^{٥} + ١) = ٢$

(٢) $(\omega - ١)(\omega^{٢} - ١)(\omega^{٤} - ١)(\omega^{٥} - ١) = ٩$

(٣) $(٢ + ٣ \omega^{٢})(٢ + \frac{٣}{\omega^{٢}})(٣ + \frac{٤}{\omega})(٣ + ٤ \omega) = ٩١$

(٤) $(١ - \omega + \omega^{٢})(١ - \omega^{٢} + \omega^{٤})(١ - \omega^{٤} + \omega^{٨})(١ - \omega^{٨} + \omega^{١٦}) = ٢^{٤}$

(٥) $(\omega - ١)(\omega^{٢} - ١)(\omega^{٤} - ١)(\omega^{٨} - ١)$ ... إلى ١٤ عاملًا = ٢١٨٧

(٦) $(\omega + ١)(\omega^{٢} + ١)(\omega^{٤} + ١)(\omega^{٨} + ١)$ ... إلى ٢ ن من العوامل = ١

(٧) $(\omega - ١)(\omega^{٢} - ١)(\omega^{٤} - ١)(\omega^{٨} - ١)$ ... إلى ٢ ن من العوامل = ٣ ن

(٨) $(٢ + ٣ \omega + ٢ \omega^{٢})(٢ + ٣ \omega^{٢} + ٢ \omega^{٤})(٢ + ٣ \omega^{٤} + ٢ \omega^{٨})$ ... إلى ٢ ن من العوامل = ١

---

٦ (دور ثان ٢٠١٩) أوجد في أبسط صورة قيمة المقدار :

$\left[ك - \frac{ك - ١}{\omega + ١} + (ك + ١) \omega^{٢}\right]^{٨}$ حيث : $ك \in ع$ «٨١»

---

٧ (دور ثان ٢٠٠٢) إذا كان : $\left(\frac{\omega^{٢}}{\omega^{٢} + ٢ + ١}\right)^{٤} + \left(\frac{\omega + ٢ + ١}{\omega}\right)^{٤} = أ \omega^{٢}$

حيث ω هي أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأوجد قيمة أ «$\frac{٨٢}{٩}$»

---

٨ إذا كان : ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

فأثبت أن : $\left(\frac{أ + ١}{أ + (٢ أ + ١) \omega + أ \omega^{٢}}\right)^{٦}$ لا يتوقف على قيمة أ

---

٩ (دور ثان ٢٠١٨) إذا كان : $\frac{١ + ١٠ \omega + ١٠ \omega^{٢}}{١ - ٣ \omega - ٣ \omega^{٢}} = (ك ت)^{٢}$

فأوجد قيمة العدد الحقيقي ك «$\pm \frac{٣}{٢}$»

---

١٠ إذا كانت : س = ٢ ω − ٣ $\omega^{٢}$ ، ص = ٣ + ٥ $\omega^{٢}$

فأوجد قيمة كلًّا من : س + ص ، س ص ثم أثبت أن : $\frac{س^{٣} + ص^{٣}}{س^{٣} + ص^{٣}} = \frac{٥٦}{٣٧}$ «١ ، ١٩»

---

١١ أثبت أن : $س^{٣} + ص^{٣}$ = (س + ص) (س + ω ص) (س + $\omega^{٢}$ ص)

حيث ω أحد الجذور التكعيبية الغير الحقيقية للواحد الصحيح.

---

١٢ إذا كانت : ω = جتا $\frac{٢ \pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٢ \pi}{٣}$ فأثبت أن : $(١ + \omega)^{ن}$ = جتا $\frac{ن \pi}{٣}$ + ت جا $\frac{ن \pi}{٣}$

مهم ○ تدريب

١٣ إذا كانت : $س = \frac{-١ + \sqrt{-٣}}{٢}$

فأثبت أن س أحد حلول المعادلة : $س^{١٠} + س^{٥} + ١ = ٠$

١٤ إذا كانت : $س = \frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$

فأثبت أن : $س^{٦} + ٦س^{٥} + ١٥س^{٤} + ٢٠س^{٣} + ١٥س^{٢} + ٦س = ٠$

١٥ أثبت أن : $\omega^{٢}$ هي أحد جذور المعادلة : $٣س^{١١} + ٢س^{٨} + ٥س^{٧} + ٥ = ٠$

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\left(٢ + \frac{٣}{\omega}\right)\left(٢ + \frac{٣}{\omega^{٢}}\right)\left(٣ - \frac{٢}{\omega}\right)\left(٣ - \frac{٢}{\omega^{٢}}\right) = \dots\dots$

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ٢٦ (د) ١٣٣

(٢) $\left(١ - \frac{١}{\omega}\right)\left(١ - \frac{١}{\omega^{٢}}\right)\left(١ - \frac{١}{\omega^{٤}}\right)\left(١ - \frac{١}{\omega^{٨}}\right) \dots$ إلى ١٠ عوامل = ...

(أ) ٢٤٣ (ب) ١٥ (جـ) ٥ (د) −٥

(٣) $\left(\frac{٥ + ٣\omega}{٥ + ٣\omega^{٢}} - \frac{٥ + ٣\omega^{٢}}{٣ + ٥\omega}\right)^{٨} = \dots\dots$

(أ) ١ (ب) ٢٧ (جـ) ٨١ (د) ٢٤٣

(٤) إذا كان : $أ = ٢\omega - ٣\omega^{٢}$ ، $ب = ٣ + ٥\omega^{٢}$ فإن : $أ^{٢} + ب^{٢} = \dots\dots$

(أ) −٣٧ (ب) −١٩ (جـ) ١ (د) ٣٨

(٥) $(أ + ب\omega + أ\omega^{٢})(أ + ب\omega^{٢} + أ\omega^{٤}) = \dots\dots$

(أ) ١ (ب) $أ - ب$ (جـ) $(أ - ب)^{٢}$ (د) $ب^{٢} - أ^{٢}$

(٦) (دور ثان ٢٠١٨) $\left(١ + ٢\omega^{٥} + \frac{١}{\omega^{٢}}\right)\left(١ + ٢\omega + \frac{١}{\omega^{٤}}\right) = \dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

(٧) (دور ثان ٢٠١٩) $\frac{أ - ع\omega}{أ\omega^{٢} - ع} - \omega^{٢} = \dots\dots$

(أ) ٣ ت (ب) $\pm\sqrt{٣}$ ت (جـ) −٣ (د) ٣

(٨) (دور أول ٢٠١٩) إذا كان : $ع = \omega^{س}$ فإن : $|ع| = \dots\dots$ حيث س عدد صحيح موجب.

(أ) ١ (ب) ω (جـ) س (د) $\omega^{٢}$

(٩) $\sum_{ر=١}^{٥} \omega^{ر} = \dots\dots$

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) $\omega^{٢}$

(١٠) $\sum_{ر=١}^{٦} (١ + \omega^{ر}) = \dots\dots$

(أ) صفر (ب) ٦ (جـ) ١ (د) $١ + \omega$

(١١) $١ + \sum_{ر=١}^{٦} \omega^{ر} = \dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ω (د) $٢ - \omega^{٢}$

(١٢) إذا كان : $ت^{١٢} = \omega^{١٢}$ فإن : .....

(أ) $ت = \omega$ (ب) $ت = \pm\omega$

(جـ) ت ، ω كلاهما أحد جذور المعادلة : $ع^{١٢} = ١$

(د) ت ، ω لا علاقة بينهما.

(١٣) (دور أول ٢٠١٨) إذا كان : $(١ + \omega)^{٧} = أ + ب\omega$ حيث أ ، ب عددان حقيقيان فإن : $(أ ، ب) = \dots\dots$

(أ) (٠ ، −١) (ب) (١ ، ١) (جـ) (٠ ، ١) (د) (١ ، −١)

(١٤) إذا كان : $(١ + \omega)^{ن} = (١ + \omega^{٢})^{ن}$ فإن أقل قيمة لـ ن الصحيحة الموجبة هي .....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٥) إذا كان : أ ، ب هما الجذران التكعيبيان غير الحقيقيين للعدد واحد فإن : $أ ب + أ^{٥} + ب^{٥} = \dots\dots$

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ٢

(١٦) إذا كان : ٣ ، ٢ + ω² جذرا لمعادلة تكعيبية ذات معاملات حقيقية فإن الجذر الثالث يساوى .....

(أ) ٢ + ω (ب) ٢ − ω (جـ) ω² − ٢ (د) ٢ − ω²

(١٧) قيمة العدد $(-١ + \sqrt{٣}\,ت)^{٤٨}$ حيث ت² = −١ تساوى .....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٢^٢٤ (د) ٢^٤٨

(١٨) $\left(\frac{-١ - \sqrt{٣}\,ت}{٢}\right)^{٣ن} + \left(\frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}\right)^{٣ن} =$ ..... حيث ن ∈ ص

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ٢

(١٩) إذا كانت : ١ ، ω ، ω² هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

فإن : $\left(\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٨} + \frac{٩}{٣٢} + \frac{٢٧}{١٢٨} + \dots\right) + ω + ω^٢ =$ .....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) −ت (د) ت

(٢٠) حاصل ضرب الجذور التكعيبية للعدد الحقيقى س يساوى .....

(أ) س (ب) ω س (جـ) ω² س (د) س²

(٢١) $\left(\frac{-١ - \sqrt{-٣}}{٢}\right)^{٢٢} + \left(\frac{-١ - \sqrt{-٣}}{٢}\right)^{١٧} =$ .....

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ω

(٢٢) إذا كان : ع₁ ، ع₂ ، ع₃ أعداد مركبة يمثلها رؤوس مثلث متساوى الأضلاع مركزه الهندسى نقطة الأصل فإن ع₁ + ع₂ + ع₃ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ω (د) ω²

(٢٣) إذا كان : س + $\frac{١}{س}$ = −١ فإن : س^٢٠٢١ + س^−٢٠٢١ = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(٢٤) مجموع جذور المعادلة (ع − ٢)³ = ١ يساوى .....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٦

(٢٥) إذا كان : ل = أ ω + ب ω² ، م = أ ω² + ب ω عددان مركبان

فإن العبارة الخاطئة فيما يلى هى .....

(أ) ل ، م كل منهما معكوس ضربى للآخر.

(ب) ل ، م مترافقان.

(جـ) ل² − م² = ± $\sqrt{٣}$ ت (أ² − ب²)

(د) ω ل + ω² م ∈ ح

(٢٦) $\frac{١٤ + ٦ω + ٢١ω^٢}{٨ω^٢ - ٧} =$ .....

(أ) −ω (ب) ω (جـ) ω² (د) −ω²

(٢٧) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ω ، $\frac{١}{٢}$ ω² هى الجذور التكعيبية للعدد .....

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ ت (د) $\frac{١}{٨}$

(٢٨) ٢ ، $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت هى الجذور التكعيبية للمعادلة .....

(أ) ع³ = ١ (ب) ع³ − ٨ = صفر

(جـ) (ع − ١)³ = ١ (د) (ع + ١)³ = ١

(٢٩) على مستوى أرجاند ، مساحة سطح الدائرة التى تمر بالنقط التى تمثل الجذور التكعيبية للواحد الصحيح يساوى ..... وحدة مربعة.

(أ) π (ب) ٢ $\sqrt{٣}$ π (جـ) $\sqrt{٣}$ π (د) ٢ π

(٣٠) على مستوى أرجاند ، مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه هى النقط التى تمثل الجذور التكعيبية للواحد الصحيح يساوى ..... وحدة مربعة.

(أ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ (ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

١٧ إذا كانت ω هى أحد الجذرين الغير حقيقيين للواحد الصحيح

فأوجد الجذرين التربيعيين لكل من العددين الآتيين :

(١) ω (٢) ١ + ω

١٨ كون المعادلة التربيعية التي جذراها :

① $١ + \omega ت$ ، $١ + \omega^٢ ت$

② $\frac{١}{\omega + ١}$ ، $\frac{١}{\omega^٢ + ١}$

③ (دورثان ٢٠١٤) $(١ + \omega - \omega^٢)^٣$ ، $(١ - \omega + \omega^٢)^٣$

④ $(٢ + ٢\omega - \omega^٢)^٣$ ، $(٢ - ٢\omega - \omega^٢)^٣$

⑤ $\frac{٣ + \omega}{٢ - \omega}$ ، $\frac{٣ + \omega^٢}{٢ - \omega^٢}$

⑥ $(١ - (\omega + ١)^{-١})^{-١}$ ، $(١ - (\omega^٢ + ١)^{-١})^{-١}$

---

١٩ (السوهاج ٢٠١٥) ضع العدد :

$$ع = ٢\omega^٤ + ٢\omega^٥ + ٣ + ت\left(٥\sqrt{٣}\,\omega^٣ + ٤\sqrt{٣}\,\omega^٢ + ٤\sqrt{٣}\,\omega\right)$$

على الصورة س + ص ت ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة الأسية.

$\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{\pi}{٦}ت}$ ، $\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٧\pi}{٦}ت}$

---

٢٠ إذا كان : $ع = ٢(\omega + ت)(\omega^٢ + ت)$ أوجد الصور المختلفة للعدد ع ، ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع في الصورة المثلثية.

---

٢١ ضع على الصورة الأسية العدد المركب : $ع = \frac{\omega + ١}{(١ - ت)^٢} + \frac{\omega - ١}{(١ + ت)^٢}$

حيث : $\omega = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$ ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة المثلثية.

---

٢٢ أوجد قيمتي : س ، ص حيث س ، ص عددان حقيقيان في كل مما يأتي :

① إذا كان : $(١ - ت)(س + ت ص) = ٩\left(\frac{١}{٣\omega^٢ + ٥} + \frac{١}{٣\omega^٢ - ٢}\right)$ $\frac{٦٣}{٢٨}$ ، $\frac{٣}{٢٨}$

② (دورأول ٢٠١٨) إذا كان : $(س + ت ص)(١ - ٣ت) = ٣٧\left(\frac{١}{٤\omega^٢ + ٧} + \frac{١}{٤\omega^٢ - ٣}\right)$ ١ ، ٢

③ إذا كان : $(س + ت ص)(٢ + ت)^٢ = \frac{١}{(\omega + ١)^٢} + \frac{١}{(\omega^٢ + ١)^٢}$ $-\frac{٣}{٢٥}$ ، $\frac{٤}{٢٥}$

١٣ حل كلًا من المعادلات الآتية حيث س ∈ ك :

① $س^٢ = ١ + \omega^٢$

② $٤س^٢ - ٤\omega س - \omega = ٠$

③ $(٢س + ١)^٦ - ٢(٢س + ١)^٣ + ١ = ٠$

④ (دورثان ٢٠١٣) $(٣س - ٢)^٦ - ٩(٣س - ٢)^٣ + ٨ = ٠$

---

١٤ أثبت أن : جذري المعادلة : $س^٢ - (٢ - ت)س - ت = ٠$ هما : $(١ + \omega ت)$ ، $(١ + \omega^٢ ت)$

---

١٥ أثبت أن : $(١ - \omega^٢)^{٢ن} = (\omega - ١)^{٣ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب فردي.

---

١٦ أوجد قيم ن التي تجعل : $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^٢)^ن = (٢ + ٢\omega + ٥\omega^٢)^ن$

«ن ∈ {... ، −٦ ، −٣ ، ٠ ، ٣ ، ٦ ، ...}»

---

١٧ أوجد : $\sum_{ر=٠}^{١٠} (١ + \omega^ر + \omega^{٢ر})$ «١٢»

---

١٨ إذا كان : $ع_١ = ب + \omega^٢ جـ$ ، $ع_٢ = ب\omega + جـ$ ، $ع_٣ = ب\omega^٢ + جـ\omega$

فأثبت أن : ① $ع_١ + ع_٢ + ع_٣ = ٠$ ② $ع_١ ع_٢ + ع_٢ ع_٣ + ع_٣ ع_١ = ٠$

---

١٩ إذا كان : $ع_١ = س + \omega ص$ ، $ع_٢ = س - \omega ص$

فأوجد قيمة : $ع_١^٣ - ٣ع_١^٢ ع_٢ + ٣ع_١ ع_٢^٢ - ع_٢^٣$ «٨ ص^٣»

مسائل تقيس مهارات التفكير

٢٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $\sqrt{س + ٢\omega + ٢\omega^٢} = س + ٢\omega + ٢\omega^٢$ فإن : س = ...

(أ) −٣ أ ، −٤ (ب) ٣ أ ، ٤ (جـ) ± ٣ (د) ± ٤

② إذا كان : $ع = \frac{\sqrt{٣} + ت}{٢}$ فإن : $ع^{٦٩}$ = ...

(أ) −ت (ب) ت (جـ) ١ (د) −١

٣) إذا كان : $(1 + س + س^2)^{ن} = أ_0 + أ_1 س + أ_2 س^2 + ... + أ_{2ن} س^{2ن}$

فإن : $أ_0 + أ_1 \omega + أ_2 \omega^2 + ... + أ_{2ن} \omega^{2ن} = ...$

(أ) صفر (ب) ω (جـ) ω^2 (د) ١

٤) إذا كان : $س^2 + س + 1 = 0$

فإن : $(س + \frac{1}{س})^2 + (س^2 + \frac{1}{س^2})^2 + (س^3 + \frac{1}{س^3})^2 + ... + (س^6 + \frac{1}{س^6})^2 = ...$

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٥٤

٥) $\sum_{ن=1}^{12} (جتا \frac{2ن\pi}{3} + ت جا \frac{2ن\pi}{3}) = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٢ (د) ٧٨

٦) إذا كانت : ١ ، ω ، ω^2 هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

فإن : $\sum_{ر=0}^{100} ق_ر (2 + \omega^2)^{100-ر} \omega^ر = ...$

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

٧) إذا كان : ع ∈ ك ، ω أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

وكان : $|\omega ع^2| - 5|ع| = 14$ فإن : $|\frac{2\bar{ع} + 49}{ع + 2}| = ...$

(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ٢١ (د) ٢٨

♣ ٣١ أوجد مجموعة حل المعادلة : $س = 1 + \omega^س + \omega^{2س}$ «{٢}»

♣ ٣٢ اكتب على الصورة الجبرية والصورة المثلثية العدد ع حيث :

$ع = (2\omega^2 + ت)^{10} - 10(3ت^2 - 2\omega)(2\omega^2 + ت)^9 + \frac{10 \times 9}{2 \times 1}(3ت^2 - 2\omega)^2(2\omega^2 + ت)^8 - ... + (3ت^2 - 2\omega)^{10}$

«٣٢ ت ، $32(جتا \frac{\pi}{2} + ت جا \frac{\pi}{2})$»

الوحدة 3

المحددات والمصفوفات

الدرس 1 المحددات.

الدرس 2 المصفوفات.

الدرس 3 حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة.

يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

الدرس 1

المحددات

تمهيد

قبل البدء فى دراسة الخواص الأساسية للمحددات سوف نستعرض بعضًا مما درسناه سابقًا عن المحددات :

• **تذكر أن :**

① **محدد الرتبة الثانية :**

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ حيث أ = $\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{pmatrix}$

فإن محدد المصفوفة : أ ويرمز له بالرمز |أ| ويسمى بمحدد الرتبة الثانية حيث :

$$|أ| = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} = أ_{١١}\,أ_{٢٢} - أ_{٢١}\,أ_{١٢}$$

فمثلًا : إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١- & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١- & ٥ \end{vmatrix} = ٢ \times ٥ - ٣ \times (-١) = ١٣$

② **محدد الرتبة الثالثة :**

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ حيث أ = $\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{pmatrix}$

فإن محدد المصفوفة : أ ويرمز له بالرمز |أ| ويسمى بمحدد الرتبة الثالثة حيث :

$$|أ| = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$

ويمكن إيجاد قيمة محدد الرتبة الثالثة بفكه عن طريق إيجاد مجموع حواصل ضرب عناصر أى صف (عمود) فى العامل المرافق المناظر لكل عنصر من عناصر هذا الصف (العمود) مع ملاحظة أن العامل المرافق لأى عنصر $أ_{ص ع}$ هو المحدد من الرتبة الثانية الناتج من حذف الصف رقم ص والعمود رقم ع من المحدد الأصلى مضروبًا × $(-١)^{ص + ع}$ لتحديد إشارة العامل المرافق.

فمثلًا : إذا كان : $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ١- & ٢ & ٢- \\ ٠ & ٣ & ١ \end{vmatrix}$ فإن :

• العوامل المرافقة المناظرة لعناصر الصف الأول على الترتيب هى :

$$(-١)^{١+١} \begin{vmatrix} ٢ & ٢- \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} \quad ، \quad (-١)^{١+٢} \begin{vmatrix} ١- & ٢- \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} \quad ، \quad (-١)^{١+٣} \begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix}$$

أى $\begin{vmatrix} ٢ & ٢- \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ ، $- \begin{vmatrix} ١- & ٢- \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix}$

• قيمة |أ| يمكن إيجادها بفك المحدد باستخدام :

العوامل المرافقة لأى صف أو أى عمود كالآتى :

• باستخدام الصف الأول :

$$|أ| = ٢ \begin{vmatrix} ٢ & ٢- \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} - ٤ \begin{vmatrix} ١- & ٢- \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٢\,(٢ \times ١ - (-٢) \times ٣) - ٤\,(-١ \times ١ - (-٢) \times ٠) + ٣\,(-١ \times ٣ - ٢ \times ٠)$$

$$= ١٦ + ٤ - ٩ = ١١$$

• باستخدام العمود الثالث :

$$|أ| = (٣) \begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} - (-٢) \begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} + (١) \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١- & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٣\,(-٣ - ٠) + ٢\,(٦ - ٠) + (٤ + ٤) = -٩ + ١٢ + ٨ = ١١$$

• طريقة أخرى لإيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة :

إيجاد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢- \\ ٣ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ **نتبع الخطوات الآتية :**

① نكتب المحدد ثم نكرر كتابة العمودين الأول والثانى على اليسار كالتالى :

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢- \\ ٣ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} \begin{matrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{matrix}$$

لاحظ أنه

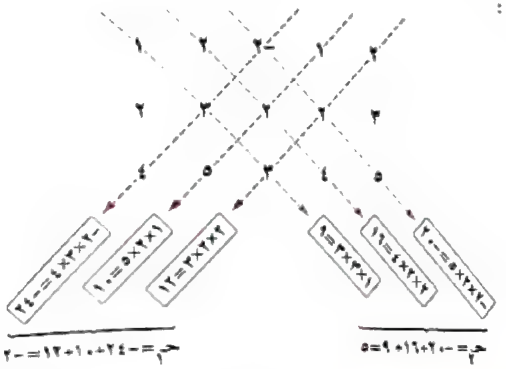
يمكن تحديد الإشارة المستخدمة فى العوامل المرافقة لأى عنصر فى محدد الدرجة الثالثة من الشكل الآتى :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

② نوجد مجموع حواصل ضرب عناصر القطر الرئيسى والأقطار الموازية له وليكن $حـ_م$

ونوجد مجموع حواصل ضرب عناصر القطر غير الرئيسى والأقطار الموازية له وليكن $حـ_م$

كالتالى :



③ نوجد $حـ_م - حـ_م$ فتكون هى قيمة المحدد أى أن : قيمة المحدد = -٢ - ٥ = -٧

الخواص الأساسية للمحددات

خاصية (١)

لا تتغير قيمة المحدد عند تبديل صفوف المحدد بأعمدته المناظرة بنفس الترتيب.

• **وبمعنى آخر :** قيمة محدد المصفوفة المربعة تساوى قيمة محدد مدور هذه المصفوفة.

أى أن : إذا كانت : أ مصفوفة مربعة فإن : $|أ| = |أ^{مد}|$

فمثلاً : $\begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٥ \\ ٤ & ٠ & ٧ \\ ٨ & ١٤ & -٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٨ \\ -٢ & ٠ & ١٤ \\ ٥ & ٧ & -٣ \end{vmatrix}$

ويمكن إثبات ذلك بإيجاد مفكوك كل من المحددين كالآتى :

$\begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٥ \\ ٤ & ٠ & ٧ \\ ٨ & ١٤ & -٣ \end{vmatrix} = ١ \times -٩٨ + ٣ \times (-٦٨) + ٥ \times ٥٦$

$= -٢٢$ (باستخدام عناصر الصف الأول)

$\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٨ \\ -٢ & ٠ & ١٤ \\ ٥ & ٧ & -٣ \end{vmatrix} = ١ \times -٩٨ - ٤ \times (-٦١) + ٨ \times (-٢١)$

$= -٢٢$ (باستخدام عناصر الصف الأول)

خاصية (٢)

قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أى صف أو أى عمود.

فمثلاً : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٠ & -٢ & ٤ \\ ٥ & ١ & -٣ \end{vmatrix}$

• المفكوك باستخدام عناصر العمود الأول :

قيمة المحدد = ٢ (٦ - ٤) - صفر + ٥ (١٢ - ٢)

= ٢ × ٢ + ٥ × ١٠ = ٤ + ٥٠ = ٥٤

• المفكوك باستخدام عناصر الصف الثالث :

قيمة المحدد = ٥ (١٢ - ٢) -١ (٨ - ٠) - ٣ (-٤ - ٠)

= ٥ × ١٠ - ١ × ٨ + ٣ × ٤ = ٥٠ - ٨ + ١٢ = ٥٤

• المفكوك باستخدام عناصر العمود الثانى :

قيمة المحدد = -٣ (٠ - ٢٠) -٢ (-٦ + ٥) -١ (٨ - ٠)

= -٣ × -٢٠ - ٢ × -١ - ١ × ٨ = ٦٠ + ٢ - ٨ = ٥٤

خاصية (٣)

قيمة المحدد تنعدم فى الحالتين الآتيتين :

① إذا كانت جميع عناصر أى صف (عمود) من المحدد تساوى صفر

فمثلاً : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٤ & -٣ & ٠ \\ -١ & ٥ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر لأن جميع عناصر العمود الثالث ($ع_٣$) أصفار

فإذا استخدمنا عناصر العمود الثالث فى فك المحدد فإن :

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٤ & -٣ & ٠ \\ -١ & ٥ & ٠ \end{vmatrix} = (٠)\begin{vmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ٥ \end{vmatrix} - (٠)\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٥ \end{vmatrix} + (٠)\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & -٣ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

② إذا تساوت العناصر المتناظرة فى أى صفين (عمودين) فى المحدد :

فمثلًا : $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٤ & -٣ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$ = صفر لتساوى العناصر المتناظرة فى الصفين الأول والثالث

، واختصارًا تكتب لأن (ص$_١$ = ص$_٣$)

وللتحقق من ذلك يمكن إيجاد قيمة المحدد بفكه عن طريق عناصر ص$_١$ مثلًا فيكون :

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٤ & -٣ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٢ \times (-١٤) - ١ \times ٢ + ٣ \times ١٠$$

$$= -٢٨ - ٢ + ٣٠ = \text{صفر}$$

خاصية (٤)

إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف (عمود) فى محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد.

فمثلًا : إذا كان $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٦ & ٢ \\ ٧ & ٥ & ٣ \end{vmatrix}$ فأخذ ٢ عامل مشترك من عناصر الصف الثانى (ص$_٢$)

$\therefore |أ| = ٢ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ٧ & ٥ & ٣ \end{vmatrix}$ وبملاحظة تساوى عناصر الصفين الأول والثانى (ص$_١$ = ص$_٢$)

$\therefore |أ| = ٢ \times$ صفر = صفر

ملاحظات

① من الخاصية (٤) نجد أن : ضرب المحدد فى عدد حقيقى ك ≠ ٠ فإننا نضرب هذا العدد فى عناصر أى صف (عمود) واحد فقط.

فمثلًا : $ك \begin{vmatrix} أ & ب & حـ \\ ء & هـ & و \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ك أ & ك ب & ك حـ \\ ء & هـ & و \\ س & ص & ع \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} أ & ك ب & حـ \\ ء & ك هـ & و \\ س & ك ص & ع \end{vmatrix} =$ ..... وهكذا

② تنعدم قيمة المحدد إذا كانت عناصر أى صف (عمود) مضاعفات لعناصر صف (عمود) آخر فى المحدد

فمثلًا : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ١ \\ -٦ & -١ & -٢ \\ ١٥ & ٦ & ٥ \end{vmatrix}$ = صفر

لأن كل عنصر فى العمود الأول ٣ أمثال نظيره من العمود الثالث واختصارًا تكتب (ع$_١$ = ٣ ع$_٣$)

خاصية (٥)

إذا بدلنا موضعى صفين (عمودين) فإن : قيمة المحدد الناتج = − قيمة المحدد الأصلى.

فمثلًا : إذا كانت $\begin{vmatrix} أ & ب & حـ \\ ء & هـ & و \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = ١٠$ فإذا بدلنا موضعى الصفين الأول والثانى (ص$_١$ ، ص$_٢$)

فإن : $\begin{vmatrix} ء & هـ & و \\ أ & ب & حـ \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = -١٠$

أى أن : $\begin{vmatrix} أ & ب & حـ \\ ء & هـ & و \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ء & هـ & و \\ أ & ب & حـ \\ س & ص & ع \end{vmatrix}$

ويمكن إثبات ذلك بإيجاد قيمة المحدد بفكه فى الحالتين.

خاصية (٦)

إذا كتبت جميع عناصر أى صف (عمود) كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلى على صورة مجموع محددين.

فمثلاً: يمكن استخدام ذلك فى كتابة المحدد $= \begin{vmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ١ & ٢ \\ ٦ & -٢ & ٤ \end{vmatrix}$ كمجموع محددين قيمة أحدهما تساوى صفر

وذلك بتقسيم عناصر أحد الصفوف (الأعمدة) إلى عنصرين أحدهما يساوى العنصر المناظر له من صف (عمود) آخر كالآتى :

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ١ & ٢ \\ ٦ & -٢ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ + ١ & ١ + ٣ & -٣ + ٧ \\ ٢ & ١ & -٣ \\ ٤ & -٢ & ٦ \end{vmatrix}$$

لاحظ تقسيم عناصر الصف الأول إلى عنصرين أحدهما يساوى العنصر المناظر له فى الصف الثانى

$$= \begin{vmatrix} -٢ & ١ & ٢ \\ -٢ & ١ & ٢ \\ ٦ & -٢ & ٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٧ & ٣ & ١ \\ -٢ & ١ & ٢ \\ ٦ & -٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

لاحظ أنه فى المحدد الأول ص$_١$ = ص$_٢$ ولذلك قيمة المحدد = صفر

$$= \text{صفر} + \begin{vmatrix} ٧ & ٣ & ١ \\ -٢ & ١ & ٢ \\ ٦ & -٢ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٧ & ٣ & ١ \\ -٢ & ١ & ٢ \\ ٦ & -٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

ملاحظة

الخاصية السابقة تحدد لنا كيفية إيجاد مجموع محددين لا يختلفان سوى فى عناصر صفين (أو عمودين) متناظرين وذلك بأن نجمع العناصر المتناظرة فى هذين الصفين (العمودين) فى المحدد الناتج وكتابة العناصر المتشابهة كما هى :

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٤ \\ -٣ & ٧ & ٧ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٤ + ٢ \\ ٢ & ٥ & ٥ + -١ \\ -٣ & ٧ & ٧ + ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ & ٥ \\ -٣ & ٧ & ٧ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٥ & -١ \\ -٣ & ٧ & ٠ \end{vmatrix}$$

خاصية (٧)

إذا أضفنا لعناصر أى صف (عمود) بمحدد مضاعفات عناصر أى صف (عمود) آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير.

بمعنى إنه إذا ضربنا عناصر أى صف (عمود) فى عدد ك ≠ ٠ وأضفناها إلى نظائرها من عناصر صف (عمود) آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير.

• وتستخدم هذه الخاصية فى تبسيط عناصر المحدد عندما تكون قيم عناصر هذا المحدد كبيرة مما يسهل إيجاد قيمته.

فمثلاً: يمكن تبسيط عناصر المحدد $\begin{vmatrix} ١٤ & -١ & ٣ \\ ٣٢ & ٢ & ٦ \\ -١٤ & ٦ & -٤ \end{vmatrix}$ بضرب ع$_١$ × (−٥) وإضافته إلى ع$_٣$

$$\begin{vmatrix} ١٤ & -١ & ٢ \\ ٣٢ & ٢ & ٦ \\ -١٤ & ٦ & -٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١٤ + (-٥) \times ٣ & -١ & ٣ \\ ٣٢ + (-٥) \times ٦ & ٢ & ٦ \\ ١٤ - (-٥) \times ٤ & ٦ & -٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٢ & ٦ \\ ٦ & ٦ & -٤ \end{vmatrix}$$

وبملاحظة أن : ع$_١$ = ع$_٣$ ∴ قيمة المحدد = صفر

• وتستخدم أيضًا فى جعل أحد الصفوف (الأعمدة) يحتوى على أكبر عدد من الأصفار ثم إيجاد المفكوك :

فمثلاً: $\begin{vmatrix} ١٤ & ١ & ٢ \\ ٣٢ & ٣ & ٦ \\ -٤ & -١ & -١ \end{vmatrix}$ (ص$_١$ × (−٣) + ص$_٣$)

$$\therefore \begin{vmatrix} ١٤ & ١ & ٢ \\ ٣٢ & ٣ & ٦ \\ -٤ & -١ & -١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١٤ & ١ & ٢ \\ -٣٢ + ١٤ \times -٣ & ٣ + ١ \times -٣ & ٦ + ٢ \times -٣ \\ -٤ & -١ & -١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١٤ & ١ & ٢ \\ -١٠ & ٠ & ٠ \\ -٤ & -١ & -١ \end{vmatrix}$$

وباستخدام عناصر ص$_٣$ يصبح من السهل إيجاد قيمة المحدد.

∴ قيمة المحدد = صفر + صفر + ١٠ (−٢ + ١) = −١٠ (باستخدام عناصر الصف الثانى)

خاصية (٨)

فى أى محدد إذا ضربنا عناصر أى صف (عمود) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة فى أى صف (عمود) آخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساويًا صفرًا.

فمثلًا: إذا كانت هـ = $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٧ \\ ٣ & -٢ & ١ \\ ١ & ٥ & ٦ \end{vmatrix}$

فإن: عناصر الصف الأول هى ٢ ، ٤ ، ٧ والعوامل المرافقة لعناصر الصف الثالث هى:

$(-١)^{١+٣} \begin{vmatrix} ٤ & ٧ \\ -٢ & ١ \end{vmatrix}$ ، $(-١)^{٢+٣} \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ ، $(-١)^{٣+٣} \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix}$

أى: ١ (٤ + ١٤) ، −١ (٢ − ٢١) ، ١ (−٤ − ١٢) أى: ١٨ ، ١٩ ، −١٦

∴ مجموع حواصل ضرب الصف الأول فى العوامل المرافقة لعناصر الصف الثالث

= ٢ × ١٨ + ٤ × ١٩ + ٧ × −١٦ = ٣٦ + ٧٦ − ١١٢ = صفر

الصورة المثلثة للمحدد

المحدد الذى جميع عناصره تحت أو فوق القطر الرئيسى أصفار يسمى محدد على الصورة المثلثة كما فى الشكلين:

وتسمى العناصر $أ_{١١}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{٣٣}$ بعناصر القطر الرئيسى.

القطر الرئيسى

$\begin{vmatrix} أ_{١١} & ٠ & ٠ \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & ٠ \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$ أو $\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ ٠ & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ ٠ & ٠ & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$

الصورة المثلثة السفلى — الصورة المثلثة العليا

خاصية (٩)

قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى.

أى أن: قيمة المحدد على الصورة المثلثة = $أ_{١١} \times أ_{٢٢} \times أ_{٣٣}$

فمثلًا: $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٤ & ٠ \\ ١ & -١ & -٢ \end{vmatrix} = ٣ \times ٤ \times -٢ = -٢٤$ ، $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٥ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{vmatrix} = -١ \times ٥ \times ٤ = -٢٠$

ملاحظة

قيمة المحدد الذى جميع عناصره تحت أو فوق القطر الغير رئيسى أصفار تساوى سالب حاصل ضرب عناصر القطر الغير رئيسى.

فمثلًا: $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٤ \\ ٠ & -٣ & ٧ \\ ٥ & ٦ & ١ \end{vmatrix} = -(٤ \times -٣ \times ٥) = ٦٠$

، $\begin{vmatrix} ٥ & -١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ٧ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = -(٤ \times ٣ \times ٧) = -٨٤$

مثال (١)

بدون فك المحدد أوجد قيمة:

(١) $\begin{vmatrix} -٣ & ٢ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -١ \\ -٤ & ٦ & ٢ \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} ١٦ & ٥ & -١ \\ ١٦ & -٨ & ١٢ \\ -٢٠ & ١٠ & -١٥ \end{vmatrix}$

(٣) $\begin{vmatrix} ٣ & ١ & -٣ \\ -٧ & ٦ & ٧ \\ ٢ & ٥ & -١ \end{vmatrix}$ (٤) $\begin{vmatrix} ١ & ٤ & -٣ \\ -١ & ٦ & ٨ \\ ٥ & -٢ & ١ \end{vmatrix}$

الحل

(١) $\Delta = \begin{vmatrix} -٣ & ٢ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -١ \\ -٤ & ٦ & ٢ \end{vmatrix}$ بضرب الصف الثانى فى ٢ وإضافته إلى الصف الثالث أى (٢ ص٢ + ص٣)

∴ $\Delta = \begin{vmatrix} -٣ & ٢ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -١ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ بملاحظة أن عناصر ص٣ كلها أصفار.

∴ Δ = صفر

② $\Delta = \begin{vmatrix} ١٦ & ٥ & -١ \\ ١٦ & -٨ & ١٢ \\ -٢٠ & ١٠ & -١٥ \end{vmatrix}$ بإخراج ٤ عامل مشترك من $ص_٢$ ، −٥ من عناصر $ص_٣$

$\therefore \Delta = ٤ \times (-٥) \begin{vmatrix} ١٦ & ٥ & -١ \\ ٤ & -٢ & ٣ \\ ٤ & -٢ & ٣ \end{vmatrix}$ بملاحظة أن عناصر الصفان الثانى والثالث متساوية أى $ص_٢ = ص_٣$

$\therefore \Delta =$ صفر

③ $\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & -٣ \\ -٧ & ٦ & ٧ \\ ٢ & ٥ & -١ \end{vmatrix}$ بإضافة $ع_١$ إلى $ع_٣$ أى $(ع_١ + ع_٣)$

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٠ \\ -٧ & ٦ & ٠ \\ ٢ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$ $ع_٣ \times (-٣) + ع_١$

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ -٢٥ & ٦ & ٠ \\ -١٣ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$ بتبديل $ع_١$ ، $ع_٣$

$\therefore \Delta = - \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٦ & -٢٥ & ٠ \\ ٥ & -١٣ & ١ \end{vmatrix}$ وبملاحظة أن المحدد على الصورة المثلثة.

$\therefore \Delta = -(١ \times (-٢٥) \times ١) = ٢٥$

④ $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٤ & -٣ \\ -١ & ٦ & ٨ \\ ٥ & -٢ & ١ \end{vmatrix}$ $(ص_١ + ص_٣)$

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٤ & -٣ \\ ٠ & ١٠ & ٥ \\ ٥ & -٢ & ١ \end{vmatrix}$ بإخراج ٥ عامل مشترك من عناصر $ص_٣$

$\therefore \Delta = ٥ \begin{vmatrix} ١ & ٤ & -٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٥ & -٢ & ١ \end{vmatrix}$ وبإخراج ٢ عامل مشترك من عناصر $ع_٣$

$\therefore \Delta = ٥ \times ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ٥ & -١ & ١ \end{vmatrix}$ $(ص_١ \times (-٥) + ص_٣)$

$\therefore \Delta = ٥ \times ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & -١١ & ١٦ \end{vmatrix}$ $(ص_٣ \times ١١ + ص_٣)$

$\therefore \Delta = ١٠ \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٢٧ \end{vmatrix}$ وبملاحظة أن المحدد على الصورة المثلثة.

$\therefore \Delta = ١٠ (١ \times ١ \times ٢٧) = ٢٧٠$

مثال ٢

بدون فك المحدد أثبت أن :

① $\begin{vmatrix} ١٣ & ٣ & ٢٣ \\ ٣٠ & ٧ & ٥٣ \\ ٣٩ & ٩ & ٧٠ \end{vmatrix} = ١$

② $\begin{vmatrix} ٧ & -٤ & ٤ \\ ٤٢ & -١٥ & ٦ \\ ٢١ & ٢ & ١٢ \end{vmatrix} = -٤٢ \begin{vmatrix} ١ & -٤ & ٢ \\ -٣ & ٥ & -١ \\ ٣ & ٢ & ٦ \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٨ & -٤ & ١٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٢ & ١ & -٣ \\ ١٢ & ٢٠ & ٢٤ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} =$ صفر

④ $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ ٢ & -١ & ٦ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ -١ & ٤ & -٤ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤ & ٥ & ٧ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ -٢ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} =$ صفر

⑤ $\begin{vmatrix} \sqrt{١٢} + \sqrt{٢} & ٢\sqrt{٣} & \sqrt{٣} \\ \sqrt{٢٦} + \sqrt{٦} & ٣ & \sqrt{٦} \\ ٢ + \sqrt{٣٩} & \sqrt{٦} & ٣ \end{vmatrix} = -٣\sqrt{٢}$

الحل

① الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} ١٣ & ٣ & ٢٣ \\ ٣٠ & ٧ & ٥٣ \\ ٣٩ & ٩ & ٧٠ \end{vmatrix}$ $(ص_١ \times (-٣) + ص_٣)$

$= \begin{vmatrix} ١٣ & ٣ & ٢٣ \\ ٣٠ & ٧ & ٥٣ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ $(ع_٣ \times (-٤) + ع_١)$

$= \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢٣ \\ ٢ & ٧ & ٥٣ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ $(ص_١ \times (-٢) + ص_٣)$

$= \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢٣ \\ ٠ & ١ & ٧ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ (∵ المحدد على الصورة المثلثية)

= ١ × ١ × ١ = ١ = الطرف الأيسر.

② الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ٧ & -٤ & ٤ \\ ٤٢ & -١٥ & ٦ \\ ٢١ & ٢ & ١٢ \end{vmatrix}$ (بإخراج ٧ عامل مشترك من $ع_١$)

= ٧ $\begin{vmatrix} ١ & -٤ & ٤ \\ ٦ & -١٥ & ٦ \\ ٣ & ٢ & ١٢ \end{vmatrix}$ (بإخراج (−٣) عامل مشترك من $ص_٣$)

= ٧ × (−٣) $\begin{vmatrix} ١ & -٤ & ٤ \\ -٢ & ٥ & -٢ \\ ٣ & ٢ & ١٢ \end{vmatrix}$ (بإخراج ٢ عامل مشترك من $ع_٣$)

= ٧ × (−٣) × ٢ $\begin{vmatrix} ١ & -٤ & ٢ \\ -٢ & ٥ & -١ \\ ٣ & ٢ & ٦ \end{vmatrix}$ = −٤٢ $\begin{vmatrix} ١ & -٤ & ٢ \\ -٢ & ٥ & -١ \\ ٣ & ٢ & ٦ \end{vmatrix}$ = الطرف الأيسر.

③ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٨ & -٤ & ١٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٢ & ١ & -٣ \\ ١٢ & ٢٠ & ٢٤ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$ (بإخراج ٤ عامل مشترك من $ص_٣$ في المحدد الثاني)

= $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٨ & -٤ & ١٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} - ٤ \begin{vmatrix} -٢ & ١ & -٣ \\ ٣ & ٥ & ٦ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$ «بتبديل $ص_١$ ، $ص_٣$ من المحدد الثاني»

= $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٨ & -٤ & ١٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} + ٤ \begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ -٢ & ١ & -٣ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$ «بضرب العدد ٤ من $ص_٣$ من المحدد الثاني»

= $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٨ & -٤ & ١٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ -٨ & ٤ & -١٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$ (بجمع المحددين مع ملاحظة تساوى $ص_١$ ، $ص_٣$ في كليهما)

= $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$

∵ عناصر $ص_٢$ جميعها أصفار. ∴ المحدد = صفر = الطرف الأيسر.

① الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ ٢ & -١ & ٦ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ -١ & ٤ & -٤ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤ & ٥ & ٧ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ -٢ & -٣ & ٢ \end{vmatrix}$ (بجمع المحدد الأول والثانى لتساوى $ص_١$ ، $ص_٣$ فى كليهما)

= $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤ & ٥ & ٧ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ -٢ & -٣ & ٢ \end{vmatrix}$ (بجمع المحددين لتساوى $ع_٢$ ، $ع_٣$ فى كليهما)

= $\begin{vmatrix} ٧ & ٥ & ٧ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ٢ & -٣ & ٢ \end{vmatrix}$ بملاحظة أن : ($ع_١$ = $ع_٣$)

∴ المحدد = صفر = الطرف الأيسر.

② الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} \sqrt{٣} & ٢\sqrt{٣} & \sqrt{٢} + \sqrt{١٣} \\ \sqrt{٦} & ٣ & \sqrt{٦} + \sqrt{٢٦} \\ ٣ & \sqrt{٦} & ٢ + \sqrt{٣٩} \end{vmatrix}$

= $\begin{vmatrix} \sqrt{٣} & ٢\sqrt{٣} & \sqrt{٢} \\ \sqrt{٦} & ٣ & \sqrt{٦} \\ ٣ & \sqrt{٦} & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sqrt{٣} & ٢\sqrt{٣} & \sqrt{١٣} \\ \sqrt{٦} & ٣ & \sqrt{٢٦} \\ ٣ & \sqrt{٦} & \sqrt{٣٩} \end{vmatrix}$

«يأخذ $\sqrt{١٣}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$ عوامل مشتركة من $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ على الترتيب» «يأخذ $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$ عوامل مشتركة من $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ على الترتيب»

= $\sqrt{١٣} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ \sqrt{٢} & \sqrt{٣} & \sqrt{٢} \\ \sqrt{٣} & \sqrt{٢} & \sqrt{٣} \end{vmatrix} + \sqrt{٢} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ \sqrt{٢} & \sqrt{٣} & \sqrt{٢} \\ \sqrt{٣} & \sqrt{٢} & \sqrt{٣} \end{vmatrix}$

«$ع_١$ = $ع_٣$» «$ع_٣$ × (−١) + $ع_١$»

= ٣ $\sqrt{١٣}$ × صفر + $\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \begin{vmatrix} -١ & ٢ & ١ \\ ٠ & \sqrt{٣} & \sqrt{٢} \\ ٠ & \sqrt{٢} & \sqrt{٣} \end{vmatrix}$

«بضرب $\sqrt{٢}$ × $ص_٣$ ، $\sqrt{٣}$ × $ص_٣$»

$$= \sqrt{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & \sqrt{6} & 0 \\ 3 & \sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ص}_{٣} \times (-١) + \text{ص}_{٢}$$

$$= \sqrt{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & \sqrt{6} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{3} \times (-١ \times \sqrt{6} \times ١) = -٣\sqrt{2} = \text{الطرف الأيسر.}$$

ملاحظة

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{ب}_{١١} & \text{ب}_{٢١} & \text{ب}_{٣١} \\ \text{ب}_{١٢} & \text{ب}_{٢٢} & \text{ب}_{٣٢} \\ \text{ب}_{١٣} & \text{ب}_{٢٣} & \text{ب}_{٣٣} \end{pmatrix}$

فإن : $\text{أ ب} =$

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١}\text{ب}_{١١} + \text{أ}_{٢١}\text{ب}_{١٢} + \text{أ}_{٣١}\text{ب}_{١٣} & \text{أ}_{١١}\text{ب}_{٢١} + \text{أ}_{٢١}\text{ب}_{٢٢} + \text{أ}_{٣١}\text{ب}_{٢٣} & \text{أ}_{١١}\text{ب}_{٣١} + \text{أ}_{٢١}\text{ب}_{٣٢} + \text{أ}_{٣١}\text{ب}_{٣٣} \\ \text{أ}_{١٢}\text{ب}_{١١} + \text{أ}_{٢٢}\text{ب}_{١٢} + \text{أ}_{٣٢}\text{ب}_{١٣} & \text{أ}_{١٢}\text{ب}_{٢١} + \text{أ}_{٢٢}\text{ب}_{٢٢} + \text{أ}_{٣٢}\text{ب}_{٢٣} & \text{أ}_{١٢}\text{ب}_{٣١} + \text{أ}_{٢٢}\text{ب}_{٣٢} + \text{أ}_{٣٢}\text{ب}_{٣٣} \\ \text{أ}_{١٣}\text{ب}_{١١} + \text{أ}_{٢٣}\text{ب}_{١٢} + \text{أ}_{٣٣}\text{ب}_{١٣} & \text{أ}_{١٣}\text{ب}_{٢١} + \text{أ}_{٢٣}\text{ب}_{٢٢} + \text{أ}_{٣٣}\text{ب}_{٢٣} & \text{أ}_{١٣}\text{ب}_{٣١} + \text{أ}_{٢٣}\text{ب}_{٣٢} + \text{أ}_{٣٣}\text{ب}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

ويكون : $|\text{أ}| \times |\text{ب}| = |\text{أ ب}|$

مثال ٢

بدون فك المحدد أوجد قيمة كل من : $\text{م}_{١} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ، $\text{م}_{٢} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix}$

ثم استنتج : محدد م قيمته تساوى $\text{م}_{١}\text{م}_{٢}$

الحل

$$\text{م}_{١} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{ص}_{١} \times (-٣) + \text{ص}_{٢} \text{ ثم } \text{ص}_{١} \times (-٦) + \text{ص}_{٣})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -10 & 7 \end{vmatrix} \quad (\text{ص}_{٢} \times (-٢) + \text{ص}_{٣}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = ١ \times -٥ \times ٩ = -٤٥$$

$$\text{، } \text{م}_{٢} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix} \quad (\text{ص}_{١} \times ٥ + \text{ص}_{٢} \text{ ثم } \text{ص}_{١} \times ٢ + \text{ص}_{٣})$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 21 & 14 \\ 0 & 11 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{بتبديل } \text{ع}_{٢} \text{ ، } \text{ع}_{٣})$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 14 & 21 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -(-١ \times ١٤ \times ١١) = ١٥٤$$

$$\because \text{م} = \text{م}_{١} \times \text{م}_{٢} \qquad \therefore \text{م} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 32 & 1 & -6 \\ 10 & 29 & 6 \end{vmatrix}$$

مثال ٣

أثبت أن : س = ٣ هى أحد جذور المعادلة $\begin{vmatrix} \text{س} & -6 & 1 \\ 3 & -2\text{س} & \text{س} - 2 \\ -2 & 3\text{س} & \text{س} + 3 \end{vmatrix} =$ صفر

الحل

الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{س} & -6 & 1 \\ 3 & -2\text{س} & \text{س} - 2 \\ -2 & 3\text{س} & \text{س} + 3 \end{vmatrix}$

وبوضع س = ٣ $\qquad \therefore$ الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ -2 & 9 & 6 \end{vmatrix}$

$\because$ العناصر المتناظرة فى الصفين الأول والثانى متساوية ($\text{ص}_{١} = \text{ص}_{٢}$)

$\therefore$ قيمة المحدد = صفر $\qquad \therefore$ س = ٣ أحد جذور المعادلة.

مثال ٤

أوجد قيمة الثابت : ك التى تجعل (س − ٢) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} \text{س} + 1 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & \text{س} - 1 \\ 1 & -4 & \text{س} + \text{ك} \end{vmatrix}$

الحل

إذا كانت : (س − ٢) عامل للمحدد فإن : س = ٢ تجعل قيمة المحدد = صفرًا وبالتعويض عن س = ٢ يكون المطلوب إيجاد قيمة ك التى تجعل المحدد الناتج ينعدم أى تجعل :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 2 + \text{ك} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

بإضافة العمود الأول إلى العمود الثالث $\qquad \therefore \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 3 + \text{ك} \end{vmatrix} =$ صفر

ويفك المحدد باستخدام عناصر العمود الثالث.

∴ −٣ (−١٢ − ١) + (٣ + ك) (١٥ − ٢) = صفر

∴ −٣ × −١٣ + (ك + ٣) × ١٣ = صفر وبقسمة الطرفين على ١٣

∴ ٣ + ك + ٣ = صفر ∴ ك = −٦

مثال ٦

أثبت أن: $\begin{vmatrix} ٠ & أ & ب \\ -أ & ٠ & حـ \\ -ب & -حـ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر مهما كانت قيم أ ، ب ، حـ

الحل

بفرض أن: $\Delta = \begin{vmatrix} ٠ & أ & ب \\ -أ & ٠ & حـ \\ -ب & -حـ & ٠ \end{vmatrix}$ وبإخراج (−١) عامل مشترك من الصفوف الثلاثة

∴ $\Delta = (-١)^{٣} \begin{vmatrix} ٠ & -أ & -ب \\ أ & ٠ & -حـ \\ ب & حـ & ٠ \end{vmatrix}$

، ∵ المحدد الناتج ما هو إلا مدور المحدد Δ وقيمته تساوى Δ

∴ Δ = −١ × Δ ∴ Δ + Δ = ٠

∴ ٢Δ = ٠ ∴ Δ = ٠

من المثال السابق نلاحظ أن:

إذا كانت المصفوفة أ شبه متماثلة أى عناصر قطرها الرئيسى يساوى أصفار وباقى العناصر تحقق العلاقة $أ_{ص ع} = -أ_{ع ص}$

فإن: |أ| = صفر

أى أن: قيمة محدد المصفوفة شبه المتماثلة يساوى صفر

$\begin{vmatrix} ٠ & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{١٢} & ٠ & أ_{٢٣} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & ٠ \end{vmatrix}$

مثال ٧

بدون فك المحدد أثبت أن: $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ & ب & حـ \\ أ^{٢} & ب^{٢} & حـ^{٢} \end{vmatrix}$ = (أ − ب) (ب − حـ) (حـ − أ)

الحل

الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ & ب & حـ \\ أ^{٢} & ب^{٢} & حـ^{٢} \end{vmatrix}$ (ع١ × (−١) + ع٢ ، ع١ × (−١) + ع٣)

= $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ أ & ب - أ & حـ - أ \\ أ^{٢} & ب^{٢} - أ^{٢} & حـ^{٢} - أ^{٢} \end{vmatrix}$

= $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ أ & ب - أ & حـ - أ \\ أ^{٢} & (ب - أ)(ب + أ) & (حـ - أ)(حـ + أ) \end{vmatrix}$ (بأخذ (ب−أ) عامل مشترك من ع٢ ، (حـ−أ) عامل مشترك من ع٣)

= (ب − أ) (حـ − أ) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ أ & ١ & ١ \\ أ^{٢} & ب + أ & حـ + أ \end{vmatrix}$ (ع٢ × (−١) + ع٣)

= (ب − أ) (حـ − أ) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ أ & ١ & ٠ \\ أ^{٢} & ب + أ & حـ - ب \end{vmatrix}$

= (ب − أ) (حـ − أ) (١ × ١ × (حـ − ب))

= (أ − ب) (ب − حـ) (حـ − أ) = الطرف الأيسر.

مثال ٨

بدون فك المحدد أثبت أن: $\begin{vmatrix} أ & ب & ب \\ ب & أ & ب \\ ب & ب & أ \end{vmatrix}$ = (أ + ٢ب) (ب − أ)^{٢}

الحل

الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$ (بإضافة ع_2 ، ع_3 إلى العمود الأول)

$= \begin{vmatrix} \text{أ}+2\text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{أ}+2\text{ب} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ}+2\text{ب} & \text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$ (بإخراج (أ + ٢ ب) عامل مشترك من ع_1)

$= (\text{أ}+2\text{ب}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & \text{ب} \\ 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ 1 & \text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix}$ ($\text{ص}_1 \times (-1) + \text{ص}_2$ ، $\text{ص}_1 \times (-1) + \text{ص}_3$)

$= (\text{أ}+2\text{ب}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & \text{ب} \\ 0 & \text{أ}-\text{ب} & 0 \\ 0 & 0 & \text{أ}-\text{ب} \end{vmatrix}$ (بملاحظة أن المحدد على الصورة المثلثة)

$= (\text{أ}+2\text{ب})(\text{أ}-\text{ب})^2 = (\text{أ}+2\text{ب})(\text{ب}-\text{أ})^2 =$ الطرف الأيسر.

مثال ٩

إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ}^2-1 & \text{ب}^2-1 & \text{حـ}^2-1 \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \end{vmatrix} =$ صفر حيث أ ≠ ب ≠ حـ

بدون فك المحدد أثبت أن : أ ب حـ = ١

الحل

بتجزئة المحدد إلى محددين = $\begin{vmatrix} \text{أ}^3 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \end{vmatrix} =$ صفر

$\therefore$ أ ب حـ $\begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \end{vmatrix} =$ صفر

بتبديل ص_1 ، ص_2 ثم ص_2 ، ص_3

$\therefore$ أ ب حـ $\begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ صفر

$\therefore \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} (\text{أ ب حـ} - 1) = 0$

$\because$ أ ≠ ب ≠ حـ $\therefore \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\therefore$ أ ب حـ − ١ = صفر $\therefore$ أ ب حـ = ١

مثال ١٠

بدون فك المحدد أثبت أن : $\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب حـ} \\ 1 & \text{ب} & \text{حـ أ} \\ 1 & \text{حـ} & \text{أ ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \end{vmatrix}$

الحل

الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب حـ} \\ 1 & \text{ب} & \text{حـ أ} \\ 1 & \text{حـ} & \text{أ ب} \end{vmatrix}$ (بإخراج أ ب حـ عامل مشترك من ع_3)

$= \text{أ ب حـ} \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \frac{1}{\text{أ}} \\ 1 & \text{ب} & \frac{1}{\text{ب}} \\ 1 & \text{حـ} & \frac{1}{\text{حـ}} \end{vmatrix}$ ($\text{ص}_1 \times \text{أ}$ ، $\text{ص}_2 \times \text{ب}$ ، $\text{ص}_3 \times \text{حـ}$)

$= \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ}^2 & 1 \\ \text{ب} & \text{ب}^2 & 1 \\ \text{حـ} & \text{حـ}^2 & 1 \end{vmatrix}$ (بتبديل ع_1 ، ع_3 ثم ع_1 ، ع_2)

$= \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{حـ} & \text{حـ}^2 \end{vmatrix}$ (بتبديل الصفوف بالأعمدة)

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \end{vmatrix} =$ الطرف الأيسر.

مثال ١١

في Δ أ ب حـ بدون فك المحدد أثبت أن :

① $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{جتا أ} & \text{جتا ب} & \text{جتا حـ} \\ \text{جا أ} & \text{جا ب} & \text{جا حـ} \end{vmatrix} = \text{صفر}$ ② $\begin{vmatrix} \text{أ جا ب} & \text{ب جا أ} & \text{جا حـ} \\ \text{طا أ} & \text{طا أ} & \text{طا حـ} \\ \text{قا أ} & \text{قا أ} & \text{قا حـ} \end{vmatrix} = ٠$

حيث أ ، ب ، حـ أطوال أضلاع Δ أ ب حـ

الحل

في Δ أ ب حـ من قانون الجيب : $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = ٢\ \text{نق}$

① من قانون الجيب :

∴ أ = ٢ نق جا أ ، ب = ٢ نق جا ب ، حـ = ٢ نق جا حـ

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{جتا أ} & \text{جتا ب} & \text{جتا حـ} \\ \text{جا أ} & \text{جا ب} & \text{جا حـ} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ٢\ \text{نق جا أ} & ٢\ \text{نق جا ب} & ٢\ \text{نق جا حـ} \\ \text{جتا أ} & \text{جتا ب} & \text{جتا حـ} \\ \text{جا أ} & \text{جا ب} & \text{جا حـ} \end{vmatrix}$ (بإخراج ٢ نق عامل مشترك من ص١)

$= ٢\ \text{نق} \begin{vmatrix} \text{جا أ} & \text{جا ب} & \text{جا حـ} \\ \text{جتا أ} & \text{جتا ب} & \text{جتا حـ} \\ \text{جا أ} & \text{جا ب} & \text{جا حـ} \end{vmatrix}$ (ص١ = ص٣)

= ٢ نق × صفر = صفر = الطرف الأيسر.

② من قانون الجيب : ∵ أ جا ب = ب جا أ

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أ جا ب} & \text{ب جا أ} & \text{جا حـ} \\ \text{طا أ} & \text{طا أ} & \text{طا حـ} \\ \text{قا أ} & \text{قا أ} & \text{قا حـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب جا أ} & \text{ب جا أ} & \text{جا حـ} \\ \text{طا أ} & \text{طا أ} & \text{طا حـ} \\ \text{قا أ} & \text{قا أ} & \text{قا حـ} \end{vmatrix}$ (ع١ = ع٢)

= صفر = الطرف الأيسر.

مثال ١٢

بدون فك المحدد حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س} & ٢\text{س} + ١ & ٣\text{س} + ٢ \\ ٢\text{س} + ١ & ٣\text{س} + ٢ & ٤\text{س} + ٣ \\ ٣\text{س} + ٣ & ٥\text{س} + ٦ & ١٠\text{س} + ٩ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

الحل

نحاول تبسيط عناصر المحدد حتى يسهل فكه باتباع الآتي :

بإضافة العمود الأول بعد ضربه في (−٢) إلى العمود الثاني

بإضافة العمود الأول بعد ضربه في (−٣) إلى العمود الثالث ينتج أن :

$\begin{vmatrix} \text{س} & ١ & ٢ \\ ٢\text{س} + ١ & -\text{س} & -٢\text{س} \\ ٣\text{س} + ٣ & -\text{س} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

بإضافة العمود الثاني بعد ضربه في (−٢) إلى العمود الثالث.

∴ $\begin{vmatrix} \text{س} & ١ & ٠ \\ ٢\text{س} + ١ & -\text{س} & ٠ \\ ٣\text{س} + ٣ & -\text{س} & ٣\text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

بضرب الصف الأول × (−١) وإضافته إلى الصف الثاني.

∴ $\begin{vmatrix} \text{س} & ١ & ٠ \\ \text{س} + ١ & -(\text{س} + ١) & ٠ \\ ٣\text{س} + ٣ & -\text{س} & ٣\text{س} \end{vmatrix} = ٠$

∴ $(\text{س} + ١) \begin{vmatrix} \text{س} & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & ٠ \\ ٣\text{س} + ٣ & -\text{س} & ٣\text{س} \end{vmatrix} = ٠$

بإضافة الصف الثاني إلى الصف الأول.

∴ $(\text{س} + ١) \begin{vmatrix} \text{س} + ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & -١ & ٠ \\ ٣\text{س} + ٣ & -\text{س} & ٣\text{س} \end{vmatrix} = ٠$

∴ $(\text{س} + ١)\left((\text{س} + ١) \times (-١) \times ٣\text{س}\right) = ٠$

∴ $(\text{س} + ١)^{٢} \times ٣\text{س} = ٠$ ∴ س + ١ = ٠ ومنها س = −١

أو ٣س = ٠ ومنها س = ٠

تمارين 10

على المحددات

مستويات عليا

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

• $\begin{vmatrix} \text{م}\text{س} & \text{م}\text{س} \\ \text{م}\text{س} & -\text{م}\text{س} \end{vmatrix} =$ .....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) م٢ س

• $\begin{vmatrix} \text{ن} & \text{ن} \\ \text{ن} & \text{ن} \end{vmatrix} =$ .....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ن (د) −ن

• إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} & ١ \\ ١ & \text{س} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٥ & ٧ \\ -٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٣٢$ فإن . س = ...

(أ) ±١ (ب) ±٢ (جـ) ±٣ (د) ±٤

• $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٣ \\ ٤ & ٨ & ٤ \\ ٧ & ٢ & ٧ \end{vmatrix} =$ .....

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٣ × ٤٨

• $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ٤ & ٠ & ٥ \\ ٥ & ٣ & ٧ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٥ \\ ١ & ٣ & ٧ \end{vmatrix} +$ .....

(أ) $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ & ٥ \\ ٤ & ٣ & ٧ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٤ & ٠ & ٥ \\ ٥ & ٣ & ٧ \end{vmatrix}$

(جـ) $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ٤ & ٠ & ٥ \\ ٢ & ٣ & ٧ \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ٥ \\ ٣ & ٣ & ٧ \end{vmatrix}$

• $\begin{vmatrix} ٤ & ٦ & ٨ \\ ٨ & ٦ & ٢ \\ ١٢ & ٢٠ & ١٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ٣ & ١٠ & ٥ \end{vmatrix} \times$ .....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

• أي من المحددات التالية لا يساوي الصفر ؟

(أ) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ٦ \\ ٣ & ٥ & ٥ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$

(جـ) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٢ & -١ \\ ٥ & -٤ & ٢ \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٢ & -١ \\ -٤ & -٦ & ٥ \end{vmatrix}$

• $\begin{vmatrix} ٢٤ & ٢٥ & ٢٦ \\ ٢٧ & ٢٨ & ٢٩ \\ ٣٠ & ٣١ & ٣٢ \end{vmatrix} =$ .....

(أ) صفر (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٥٦

• $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} & \text{ط} \end{vmatrix} = (-١) \times$ .....

(أ) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ء} & \text{ز} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ح} \\ \text{جـ} & \text{و} & \text{ط} \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} \text{أ} + \text{ء} & \text{ء} & \text{ز} \\ \text{ب} + \text{هـ} & \text{هـ} & \text{ح} \\ \text{جـ} + \text{و} & \text{و} & \text{ط} \end{vmatrix}$

(جـ) $\begin{vmatrix} \text{ء} & \text{أ} & \text{ز} \\ \text{هـ} & \text{ب} & \text{ح} \\ \text{و} & \text{جـ} & \text{ط} \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} ٢\text{أ} & \text{ء} & \text{ز} \\ ٢\text{ب} & \text{هـ} & \text{ح} \\ ٢\text{جـ} & \text{و} & \text{ط} \end{vmatrix}$

• إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = ١٢$ فإن : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ء} & \text{س} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ص} \\ \text{جـ} & \text{و} & \text{ع} \end{vmatrix} =$ .....

(أ) −١٢ (ب) ١٢ (جـ) صفر (د) ٢٤

• (أ) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = ١٥$ فإن $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix} =$

(أ) ٢٠- (ب) ١٥- (جـ) صفر (د) ١٥

• (ب) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = ١٢$ فإن $\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{و} & \text{د} & \text{هـ} \\ \text{حـ} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} =$

(أ) ١٢- (ب) ٦- (جـ) ٦ (د) ١٢

• (جـ) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{حـ} & \text{حـ} & \text{حـ} \end{vmatrix} =$

(أ) صفر (ب) أحـ (جـ) ب حـ (د) أ ب حـ

• (د) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \frac{1}{\text{حـ}} \\ \text{أحـ} & \text{حـ} & \frac{1}{\text{ب}} \\ \text{ب حـ} & \text{ب} & \frac{1}{\text{أ}} \end{vmatrix} =$

(أ) صفر (ب) أ ب حـ (جـ) ١ (د) ٢

• (هـ) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = ٢٥$ فإن $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{٤د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{٢س} & \text{٢ص} & \text{٢ع} \end{vmatrix} =$

(أ) ١٠٠ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) ١٠٠

• (و) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ب} & \text{حـ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{حـ} & \text{ب} \end{vmatrix} =$

(أ) ٤ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) صفر

• $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ع} & \text{س} & \text{ص} \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{س} & \text{ع} \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} =$

(أ) س + ص + ع (ب) ١-

(جـ) صفر (د) س ص ع

• (أ) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} \text{س} & ١ & ٢ \\ ٠ & \text{س} & ٣ \\ ٠ & ٠ & \text{س} \end{vmatrix} - ٨ = ٠$ في ح هي .....

(أ) {٢-} (ب) {٢} (جـ) {٢ ، ٢-} (د) {٨}

• (ب) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} \text{أ} & ١ & ٢ \\ ٠ & \text{أ} & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٧ \end{vmatrix} = ٢١$ في ح هي .....

(أ) {٢ ، ٢-} (ب) {٣ ، ١-} (جـ) {٢ ، ٣} (د) {٢- ، ٧}

• مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} \text{س} & ٢ & ٠ \\ ٠ & \text{س} & ٢ \\ ٠ & ٠ & \text{س} \end{vmatrix} = ١-$ في ح هي .....

(أ) {٠ ، ٢} (ب) {٢- ، ٣-}

(جـ) {٠ ، ٢ ، ٣} (د) {٠ ، ٢- ، ٣-}

• مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٠ \\ ٤ & \text{س} & ٠ \\ \text{س} & ٧ & ١٥ \end{vmatrix} =$ صفر هي .....

(أ) {٢} (ب) {٥} (جـ) {٧} (د) {١٠}

• $\begin{vmatrix} ١ & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & ١ \\ \omega^2 & ١ & \omega \end{vmatrix} =$

(أ) ω (ب) ω^2

(جـ) ث (د) صفر

(٢٣) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = ١٥$

فإن : $\begin{vmatrix} \text{أ} - ٥\text{ء} & \text{ب} - ٥\text{هـ} & \text{حـ} - ٥\text{و} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} + ٢\text{ء} & \text{ص} + ٢\text{هـ} & \text{ع} + ٢\text{و} \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١٥ (جـ) ٣٠ (د) −١٥٠

(٢٤) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ ٢ & -١ & ٨ \end{vmatrix} = ١٠$ فإن : $\begin{vmatrix} ٢\text{أ} & ٢\text{ب} & ٢\text{حـ} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ ٤ & -٢ & ١٦ \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(أ) −٤٠ (ب) −٢٠ (جـ) −١٠ (د) ٤٠

(٢٥) (دور أول ٢٠١٥) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & \text{س} + ١ & ١ \\ ١ & ١ & \text{ص} + ١ \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) س + ص (جـ) س ص (د) − س ص

(٢٦) إذا كان : $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \end{vmatrix} = \text{ك}$ فإن : $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ \text{أ} + ١ & \text{ب} + ١ & \text{حـ} + ١ \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(أ) ك (ب) ك − ١ (جـ) ك − ٦ (د) ك − ٣

(٢٧) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ٢\text{جا س} & ١ \\ ١ & \text{جا س} \end{vmatrix} = ٠$ هي ..... حيث س ∈ {٠ ، π}

(أ) {٠} (ب) $\left\{\frac{\pi}{٢}\right\}$ (جـ) $\left\{٠ ، \frac{\pi}{٢}\right\}$ (د) $\left\{\frac{\pi}{٤}\right\}$

(٢٨) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} |\text{س} - ١| & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ٧$ هي .....

(أ) {٦ ، ٤} (ب) {٤ ، −٦} (جـ) {٦ ، −٤} (د) ∅

(٢٩) إذا كان : $\begin{vmatrix} -٢ & ٣ & ٠ \\ \text{أ} & ١ & -٢ \\ ٤ & \text{ب} & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٠ \\ -٣ & ١ & -٢ \\ ٥ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$

فإن : أ × ب = ...

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ٢

(٣٠) إذا كان : $\begin{vmatrix} -١ & \text{أ} & \text{ب} \\ ٤ & ٢ & \text{حـ} \\ ٠ & ٥ & ٣ \end{vmatrix} = -٦$ فأى مما يأتى يكون صحيح ؟

(I) أ = ب = حـ = ٠ (II) ١٢ أ = ٥ حـ + ٢٠ ب

(III) ٥ حـ = ١٢ أ + ٢٠ ب

(أ) (I) فقط. (ب) (II) فقط.

(جـ) (I) ، (II) (د) (II) ، (III)

٢ بدون فك المحدد أوجد قيمة :

(١) $\begin{vmatrix} ٦١٥ & ٦١٦ \\ ٦١٧ & ٦١٨ \end{vmatrix}$ ..... −٢

(٢) $\begin{vmatrix} ١٩٨٥ & ١٩٨٤ \\ ١٩٨٧ & ١٩٨٦ \end{vmatrix}$ ٢٠

(٣) (السودان ٢٠١٤) $\begin{vmatrix} ٢ & \text{صفر} & -٢ \\ -٥ & ٣ & ٥ \\ ٦ & ٤ & -١ \end{vmatrix}$

(٤) $\begin{vmatrix} ٥ & -١ & ١٠ \\ ٤ & ٢ & ٨ \\ -٥ & ٢ & -١٠ \end{vmatrix}$

(٥) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & -٣ & -١ \\ -٤ & ٦ & ٢ \end{vmatrix}$

(٦) $\begin{vmatrix} ٧٦ & ٧٨ & ٨٠ \\ ٨٢ & ٨٨ & ٩٤ \\ ٨٦ & ٩٦ & ١٠٦ \end{vmatrix}$

٣ اكتب المحدد : $\begin{vmatrix} ٦ & ٤ & ٥ \\ ٥ & ٣ & ٢ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{vmatrix}$ على صورة مجموع محددين قيمة أحدهما صفر.

٤ ضع المحدد : $\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & ١١ & ٢ \\ ١ & ٣ & ٥ \\ ٢ & ٢ & -٢ \end{vmatrix}$ على الصورة المثلثة وأوجد قيمته. ١٠٩٠

٥ بدون فك المحدد أثبت أن :

① (الشبوه ٢٠١٥) $\begin{vmatrix} -٣ & ٢ & ٥ \\ ٤ & ٠ & -٦ \\ ٧ & ٩ & ٨ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -٣ & -٨ & ٥ \\ ٤ & ٨ & -٦ \\ ٧ & ٥ & ٨ \end{vmatrix} =$ صفر

② $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٨ & -٤ & ١٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٢ & ١ & -٣ \\ ١٢ & ٢٠ & ٢٤ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} =$ صفر

③ $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ -٥ & -١ & -٧ \\ ١ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} + \frac{١}{٤} \begin{vmatrix} ٤ & ٦ & ٢ \\ ٨ & ٦ & ١٠ \\ ٦ & ٩ & ٤ \end{vmatrix} =$ صفر

④ $\begin{vmatrix} ٧ & ٨ & ١٠ \\ ١ & ٢ & ٦ \\ ٧ & -٥ & ٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٧ & ٨ & ١٠ \\ -٤ & ٣ & ١١ \\ ٧ & -٥ & ٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٨ & ١٠ \\ ٢٠ & ٥ & ١٧ \\ -٣ & -٥ & ٤ \end{vmatrix} =$ صفر

٦ أثبت أن : (س − ١) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} س & -٣ & س + ٤ \\ س + ٤ & س + ٦ & ٢ \\ ٢ & -٦ & س + ٩ \end{vmatrix}$

٧ في كل مما يأتي أوجد قيمة ك :

① بحيث تكون س عاملاً للمحدد : $\begin{vmatrix} س + ١ & ٣ & ١ \\ ك & ٢ & ٣ \\ س & ٢ & ١ \end{vmatrix}$ «−٤»

② (دور ثان ٢٠٠٩) التي تجعل س أحد عوامل المحدد : $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ك \\ س + ٣ & ك - ٢ & س \\ ٢ & س + ١ & س + ك \end{vmatrix}$

«صفر أ، ٥»

③ (دور أول ٢٠٠١) إذا كان (س − ١) أحد عوامل المحدد : $\begin{vmatrix} س - ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & س + ١ \\ -١ & ١ & س + ك \end{vmatrix}$

«−١»

④ (دور ثان ٢٠٠٤) إذا كان (س − ٢) أحد عوامل المحدد : $\begin{vmatrix} س - ١ & س + ٣ & ٢ \\ -٣ & س + ٥ & -٦ \\ س + ٣ & ٢ & س + ك \end{vmatrix}$

«٨»

٨ باستخدام خواص المحددات حل المعادلات الآتية حيث س ∈ ح :

① (دور أول ٢٠٠٩) $\begin{vmatrix} ١ & س & س \\ س & ١ & س \\ س & س & ١ \end{vmatrix} =$ صفر

«١ أ، $-\frac{١}{٢}$»

② (دور أول ٢٠١٢) $\begin{vmatrix} ٢س & ١ & ١ \\ ١ & ٢س & ١ \\ ١ & ١ & ٢س \end{vmatrix} =$ صفر

«−١ أ، $\frac{١}{٢}$»

③ $\begin{vmatrix} س & ١ & س \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ س & ٥ & س \end{vmatrix} = ١٦$

«−٢»

④ $\begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ١ & س & ٢ \\ ١ & ٢ & س \end{vmatrix} = س - ١$

«١ أ، $\frac{-١ \pm \sqrt{٢٩}}{٢}$»

٩ إذا كانت : س ∈ ك فأوجد بدلالة ω مجموعة حل المعادلة :

$\begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ٠ & س & ٣ \\ ٠ & ٠ & س \end{vmatrix} - ٨ =$ صفر

«{٢ ، ٢ ω ، ٢ ω^2}»

١٠ باستخدام خواص المحدد أوجد قيمة :

① $\begin{vmatrix} ص + ع & س - ع & س \\ ع + س & ص - ع & ص \\ س + ص & ٠ & ع \end{vmatrix}$

«صفر»

(٤) $\begin{vmatrix} ١ & \text{جتا}^{٢}\text{أ} & \text{جا}^{٢}\text{أ} \\ ١ & \text{جتا}^{٢}\text{ب} & \text{جا}^{٢}\text{ب} \\ ١ & \text{جتا}^{٢}\text{حـ} & \text{جا}^{٢}\text{حـ} \end{vmatrix}$ = صفر

(٥) $\begin{vmatrix} \text{ل}+\text{أ}-\text{ن} & ٢\text{ل} & \text{ن}-\text{م}-٧\text{ل} \\ \text{م}+\text{ن}-٢\text{ل} & ٢\text{م} & ٢\text{ل}-\text{ن}-٥\text{م} \\ \text{ن}+\text{ل}-٢\text{م} & \text{ن} & ٢\text{م}-\text{ل}-٣\text{ن} \end{vmatrix}$ = صفر

(٦) (دور أول ٢٠٠٦) $\begin{vmatrix} ١ & \text{قاس} & \text{قاس} \\ ١ & \text{قاس} & \text{قاس} \\ ١ & \text{قاس} & -\text{قاس} \end{vmatrix}$ = ١٠

(٧) (دور ثان ٢٠١١) $\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{ص} \\ \text{س} & ١+\text{س}^{٢} & \text{س ص} \\ \text{ص} & \text{س ص} & ١+\text{ص}^{٢} \end{vmatrix}$ = ١٠

(٨) (دور ثان ٢٠٠٨) $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & ١ \\ \text{س}^{٢} & \text{ص}^{٢} & \text{س}+\text{ص} \\ \text{س}^{٢} & \text{ص}^{٢} & \text{س}^{٢}+\text{س ص}+\text{ص}^{٢} \end{vmatrix}$ = صفر

(٩) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١+\text{ت} \\ ٠ & ١ & \text{ت} \\ ١-\text{ت} & -\text{ت} & ١ \end{vmatrix}$ حيث : $\text{ت}^{٢} = -١$ = ٢٠

١١ بدون فك المحدد أثبت أن :

(١) $\begin{vmatrix} ١ & \text{ب حـ} & \text{أ}(\text{ب}+\text{حـ}) \\ ١ & \text{حـ أ} & \text{ب}(\text{أ}+\text{حـ}) \\ ١ & \text{أ ب} & \text{حـ}(\text{أ}+\text{ب}) \end{vmatrix}$ = صفر

(٢) $\begin{vmatrix} ٠ & \text{ل} & -\text{م} \\ -\text{ل} & ٠ & -\text{ن} \\ \text{م} & \text{ن} & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر

(٣) (دور ثان ٢٠١٧) $\begin{vmatrix} ٣\text{س} & ٣\text{س} & ٣\text{س} \\ ١ & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+١ & \text{ب}+١ \end{vmatrix}$ = صفر

(٤) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+\text{ب}+\text{حـ} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{حـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{صفر} \\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{أ}+\text{ب}+\text{حـ} & \text{أ}+\text{ب} \end{vmatrix}$ = صفر

(٥) (دور أول ٢٠٠٢) $\begin{vmatrix} \text{أ}-\text{أ ب} & ١ & \text{ب}-٣ \\ \text{أ ب}-\text{أ حـ} & \text{ب} & \text{حـ}-٣\text{ب} \\ \text{أ حـ}-\text{أ} & \text{حـ} & ١-٣\text{حـ} \end{vmatrix}$ = صفر

(٦) $\begin{vmatrix} (\text{س}+\text{ص})^{٢} & \text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢} & ٣\text{س ص} \\ (\text{ع}+\text{ل})^{٢} & \text{ع}^{٢}+\text{ل}^{٢} & ٣\text{ع ل} \\ (\text{م}+\text{ن})^{٢} & \text{م}^{٢}+\text{ن}^{٢} & ٣\text{م ن} \end{vmatrix}$ = صفر

(٧) (دور ثان ٢٠٠١) $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^{٢}+١ & (\text{س}+١)^{٢} \\ \text{ص} & \text{ص}^{٢}+١ & (\text{ص}+١)^{٢} \\ \text{ع} & \text{ع}^{٢}+١ & (\text{ع}+١)^{٢} \end{vmatrix}$ = صفر

(٨) $\begin{vmatrix} ١ & (\text{س}+٧) & (\text{س}+٦)(\text{س}+٧) \\ ١ & (\text{س}+٨) & (\text{س}+٧)(\text{س}+٨) \\ ١ & (\text{س}+٩) & (\text{س}+٨)(\text{س}+٩) \end{vmatrix}$ = ٢

(٩) $\begin{vmatrix} ١+\text{أ} & ١ & ١ \\ ١ & ١+\text{ب} & ١ \\ ١ & ١ & ١+\text{حـ} \end{vmatrix}$ = أ ب حـ + ب حـ + حـ أ + أ ب

١٢ إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع}+٢ \\ \text{س} & \text{ص}+٢ & \text{ع} \\ \text{س}+٢ & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = -٤$ أوجد قيمة : س + ص + ع «-١»

١٣ (دور أول ٢٠٠٧) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ك} & \text{ط} & \text{هـ} \end{vmatrix} = ٢$

فأوجد قيمة : $\begin{vmatrix} ٢\text{س} & ٢\text{ص} & ٢\text{ع} \\ ٥\text{ل}+\text{س} & ٥\text{م}+\text{ص} & ٥\text{ن}+\text{ع} \\ ٧\text{ك}-٣\text{ل} & ٧\text{ط}-٣\text{م} & ٧\text{هـ}-٣\text{ن} \end{vmatrix}$ «١٤٠»

١٤ أثبت أن : $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & ٣ \\ ٢ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٥ & ٤ \end{vmatrix}$ = صفر هى معادلة مستقيم يمر بالنقطتين (٢ ، ١) ، (−٥ ، ٥)

١٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\begin{vmatrix} ١ & \text{ما س} & \text{ما س} \\ ١ & \text{متا س} & \text{متا س} \\ ١ & \text{ما س} & \text{متا س} \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ما ٢ س (ب) ١ − ما ٢ س (جـ) ١ (د) صفر

② $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٠ & \text{ما ٣ س} & ٥ \\ ٠ & ٠ & \text{متا ٣ س} \end{vmatrix}$ = ما .....

(أ) س (ب) ٣ س (جـ) ٦ س (د) ١٢ س

③ إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$ = ٣ فإن $\begin{vmatrix} ٤\text{أ} + ٣\text{ب} + ٢\text{حـ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ ٤\text{ء} + ٣\text{هـ} + ٢\text{و} & \text{هـ} & \text{و} \\ ٤\text{س} + ٣\text{ص} + ٢\text{ع} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٧٢

④ إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$ = ١٠ فإن : $\begin{vmatrix} ٢\text{أ} & ٢\text{ب} & ٢\text{حـ} \\ ٢\text{ء} & ٢\text{هـ} & ٢\text{و} \\ ٢\text{س} & ٢\text{ص} & ٢\text{ع} \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٤٠ (د) ٨٠

⑤ إذا كان : $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ٦ & ٠ & ٤ \\ ١ & ٥ & -٧ \end{vmatrix}$ فإن العامل المرافق للعنصر $\text{أ}_{٢١}$ يساوى .....

(أ) −٤٦ (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) ٤٦

⑥ إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$ = ١٥

فإن : $\text{أ}\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix} - \text{ب}\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{حـ} \\ \text{ء} & \text{و} \end{vmatrix} + \text{حـ}\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ء} & \text{هـ} \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١٥ (جـ) −١٥ (د) ٣٠

⑦ إذا كان : ع = متا س + ت ما س ، $\bar{\text{ع}}$ هو مرافق العدد ع

فإن : $\begin{vmatrix} \text{ع} & ١ \\ ١ & \bar{\text{ع}} \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ع

⑧ إذا كان : س عددًا مركبًا فإن عدد الحلول المختلفة للمعادلة :

$\begin{vmatrix} \text{س}^٣ + ١ & \text{س} - ١ \\ \text{س} + ١ & \text{س}^٣ - ١ \end{vmatrix}$ = صفر يساوى .....

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

⑨ إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{لو}_{٣} ٣ & ٣ & ٩ \\ ٠ & \text{لو}_{٥} ٥ & ٧ \\ ٠ & ٠ & \text{لو}_{\text{س}} \text{س} \end{vmatrix}$ = ٤ فإن : س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ١٢٨

⑩ إذا كانت : $\text{ت}^٢ = -١$ فإن : $\begin{vmatrix} ١ & \text{ت} & \text{ت} + ١ \\ ٠ & ١ & \text{ت} - ١ \\ ٠ & \text{ت} & \text{ت} \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٢ ت − ١ (ب) ٢ ت + ١ (جـ) ت (د) ١

⑪ مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س} & ٢\text{س} & ٣\text{س} \\ ٣\text{س} & ٢\text{س} & \text{س} \\ \text{س} & -\text{س} & ٠ \end{vmatrix}$ = ٩٦ فى ح هى .....

(أ) {٤} (ب) {٣} (جـ) {٢} (د) {−٢}

(١٢) فى Δ أ ب حـ يكون : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ \text{ما أ} & \text{ما ب} & \text{ما حـ} \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٥ أ (ب) ٧ ب (جـ) ٨ حـ (د) صفر

(١٣) $\begin{vmatrix} \text{س} - \text{ص} & \text{ص} - \text{ع} & \text{ع} - \text{س} \\ \text{ص} - \text{ع} & \text{ع} - \text{س} & \text{س} - \text{ص} \\ \text{ع} - \text{س} & \text{س} - \text{ص} & \text{ص} - \text{ع} \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) س − ص (جـ) ص − ع (د) ع − س

(١٤) إذا كان : ن = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ ، م = $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٩ \\ ٤ & ٦ & ١٠ \\ ٥ & ٢٠ & ١٠ \end{vmatrix}$ فإن : م = ...

(أ) ن (ب) ١٠ ن (جـ) ٢٠ ن (د) ٣٠ ن

(١٥) $\begin{vmatrix} ١ & \text{ت} & \omega \\ \omega\text{ت} & -\omega & ٠ \\ \omega^{٢}\text{ت} & -\omega^{٢} & \omega \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) ت + ω (جـ) $\omega^{٢}$ + ١ (د) ٣

(١٦) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} - ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{س}^{٢} + \text{س} + ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ = ٩ فإن : $\text{س}^{٦}$ = ...

(أ) ١ (ب) ١٠ (جـ) ٢٧ (د) ١٠٠

(١٧) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ١ + \text{س} & ١ - \text{س} & ١ - \text{س} \\ ١ - \text{س} & ١ + \text{س} & ١ - \text{س} \\ ١ - \text{س} & ١ - \text{س} & ١ + \text{س} \end{vmatrix}$ = ٠ فى ح هى .....

(أ) {٠ ، ١} (ب) {٠ ، −١ ، ١}

(جـ) {١ ، −١ ، ٣} (د) {٠ ، ٣}

(١٨) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix}$ = ١٠ وكان $\begin{vmatrix} \text{أ س} & \text{ب س} & \text{حـ س} \\ \text{س}^{٢} & \text{ص س} & \text{ع س} \\ \text{ء س} & \text{هـ س} & \text{و س} \end{vmatrix}$ = ٥١٢٠

فإن : $\sqrt[٣]{\text{أ س}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٥١٢ (د) $\sqrt[٣]{٢}$

(١٩) إذا كان : Δ = $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix}$ فإن : ٢ Δ ≠ .....

(أ) $\begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ١٠ & ١٤ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١٠ & ٧ \end{vmatrix}$ (جـ) $\begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٥ & ١٤ \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١٠ & ١٤ \end{vmatrix}$

(٢٠) إذا كان : $\begin{vmatrix} \omega & \text{ت} & \omega^{٢} \\ \text{ت} & \omega^{٢} & \omega \\ \omega^{٢} & \omega & \text{ت} \end{vmatrix}$ = س + ت ص فإن : س + ص = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −٢

(٢١) (دورثان ٢٠١٥) إذا كان : ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، ن ∈ ص⁺ فإن : Δ = $\begin{vmatrix} ١ & \omega^{\text{ن}} & \omega^{٢\text{ن}} \\ \omega^{\text{ن}} & \omega^{٢\text{ن}} & ١ \\ \omega^{٢\text{ن}} & ١ & \omega^{\text{ن}} \end{vmatrix}$ يساوى .....

(أ) ١ (ب) ω (جـ) $\omega^{٢}$ (د) صفر

(٢٢) إذا كان : ٩٠° ≤ س ≤ ١٨٠° ، وكان : $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٦ & ٢ \text{ جتا س} - ١ & ٠ \\ ٨ & \text{م} & ١ + \text{جتا } ٢ \text{ س} \end{vmatrix}$ = صفر

فإن : ق (د س) = ...°

(أ) ٣٠° أ ، ١٥٠° (ب) ٩٠° أ ، ١٥٠° (جـ) ٣٠° أ ، ٩٠° (د) ٣٠° أ ، ٢٧٠°

(٢٣) أ ب حـ مثلث حيث : $\begin{vmatrix} \text{ب حـ} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{أ حـ} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{أ ب} \end{vmatrix}$ = ٣٢ سم³ ، فإذا كانت مساحة Δ أ ب حـ = ٤ سم² فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $٢\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٢٤) $\begin{vmatrix} \text{جا أ} & \text{جتا أ} & \text{جا}(\text{أ}+\theta) \\ \text{جا ب} & \text{جتا ب} & \text{جا}(\text{ب}+\theta) \\ \text{جا حـ} & \text{جتا حـ} & \text{جا}(\text{حـ}+\theta) \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) $\text{جا}^2\text{أ} + \text{جتا}^2\text{ب} + \text{جا}^2\text{حـ}$

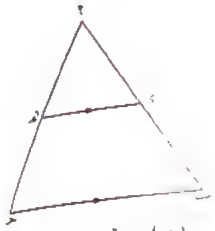
(جـ) $\text{جتا } 2\text{أ} + \text{جتا } 2\text{ب} + \text{جتا } 2\text{حـ}$ (د) $\text{جا}^2(\text{أ}+\text{ب}+\text{حـ}+\theta)$

(٢٥) إذا كانت : س = −٩ أحد جذرى المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س} & ٦ & ٧ \\ ٢ & \text{س} & ٢ \\ ٧ & ٣ & \text{س} \end{vmatrix} = ٠$

فإن الجذرين الآخرين هما .....

(أ) ٢ ، ٦ (ب) ٣ ، ٦ (جـ) ٢ ، ٧ (د) ٣ ، ٧

(٢٦) فى الشكل المقابل :

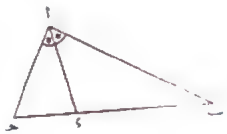


إذا كانت : $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

فإن : $\begin{vmatrix} \text{ءهـ} & \text{أء} & \text{أهـ} \\ \text{ب حـ} & \text{أب} & \text{أحـ} \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(أ) ٧ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) صفر

(٢٧) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ

فإن : $\begin{vmatrix} \text{أب} & \text{أحـ} & \text{أب}+\text{أحـ} \\ \text{ب ء} & \text{ء حـ} & \text{ب حـ} \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ٦ (جـ) ٢١ (د) ٢ ب حـ

(٢٨) إذا كان : أ ب حـ مثلث فإن : $\begin{vmatrix} \text{ب}^2+\text{حـ}^2 & \text{ب حـ جتا أ} & \text{أ}^2 \\ \text{حـ}^2+\text{أ}^2 & \text{حـ أ جتا ب} & \text{ب}^2 \\ \text{أ}^2+\text{ب}^2 & \text{أ ب جتا حـ} & \text{حـ}^2 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) $\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2$

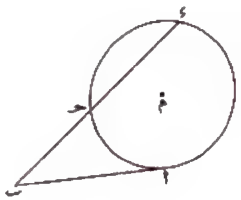
(جـ) جتا أ + جتا ب + جتا حـ (د) ٦

(٢٩) إذا كان : ح_1 ، ح_2 ، ح_3 ، ... ، ح_9 هى حدود متتابعة حسابية أساسها (ء)

فإن : $\begin{vmatrix} \text{ح}_1 & \text{ح}_2 & \text{ح}_3 \\ \text{ح}_4 & \text{ح}_5 & \text{ح}_6 \\ \text{ح}_7 & \text{ح}_8 & \text{ح}_9 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) الأساس (ء) (جـ) ١ (د) $(\text{ح}_5)^2$

(٣٠) (دور أول ٢٠٢١) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة م عند أ ، $\overline{\text{ءحـ}}$ وتر فى الدائرة

حيث $\overleftrightarrow{\text{ءحـ}} \cap \overleftrightarrow{\text{أب}} = \{\text{ب}\}$

إذا كان : $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & \text{حـ ء} \\ -١ & \text{أب} & \text{ب حـ} \\ ٠ & -\text{ب حـ} & \text{أب} \end{vmatrix} = ٣٢$

فإن : أب = ... وحدة طول.

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٦

(١١) بدون فك المحدد أثبت أن :

(١) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١+\text{ص} & ١ \end{vmatrix} = \text{ص}^2$

(٢) (دور ثان ٢٠٠٢) $\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ} \\ ١ & \text{ب} & \text{أ} \\ ١ & \text{أ} & -\text{ب} \end{vmatrix} = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$

(٣) (دور أول ٢٠٠٠) $\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{س} & \text{أ}+\text{ص} & \text{ع} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{أ}+\text{ع} \end{vmatrix} = \text{أ}^2(\text{أ}+\text{س}+\text{ص}+\text{ع})$

(٤) $\begin{vmatrix} \text{س}+١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & \text{س}+٣ & ١ \\ ٢ & ١ & \text{س}+٢ \end{vmatrix} = (\text{س}+٦)(\text{س}^2-٣)$

⑤ $\begin{vmatrix} \text{ب}-\text{ء} & \text{ب}-\text{حـ} & \text{حـ} \\ \text{ب}-\text{ء} & \text{حـ} & \text{ب}-\text{حـ} \\ -\text{ء} & \text{ب}-\text{حـ} & \text{ب}+\text{حـ} \end{vmatrix} = \text{ب}(٢\text{ب}-\text{ء})(٢\text{حـ}-\text{ب})$

⑥ $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} \\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ}+\text{ب} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} = -٢(\text{أ}^٢+\text{ب}^٢)$

⑦ $\begin{vmatrix} ٢\text{أ}-\text{حـ} & \text{أ}-٢\text{ب} & ٣\text{ب} \\ ٢\text{أ}-\text{حـ} & ٣\text{ب} & ٢\text{أ}-٣\text{ب} \\ -\text{حـ} & ٢\text{أ}-٣\text{ب} & ٢\text{أ}+٣\text{ب} \end{vmatrix} = ٢\text{أ}(٣\text{أ}-\text{حـ})(٩\text{ب}-٢\text{أ})$

⑧ (دور أول ٢٠١٨) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{أ}^٢ & \text{ب}^٢ & \text{حـ}^٢ \end{vmatrix} = (\text{ب}-\text{أ})(\text{حـ}-\text{أ})(\text{حـ}-\text{ب})$

⑨ $\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & \text{ص} \end{vmatrix} = (\text{ص}+٢\text{س})(\text{س}-\text{ص})^٢$

⑩ (دور ثان ٢٠٠٧) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ}-\text{حـ} & ٢\text{أ} \\ \text{ب} & \text{أ}-\text{حـ} & ٢\text{ب} \\ \text{حـ} & \text{أ} & \text{ب}+\text{حـ} \end{vmatrix} = (\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}-\text{حـ})(\text{ب}-\text{حـ})$

⑪ (دور ثان ٢٠١٨) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{حـ} \\ \text{ب} & \text{حـ} & \text{أ} \end{vmatrix} = (\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}-\text{حـ})(\text{أ}+\text{ب}+\text{حـ})$

⑫ (دور أول ٢٠٠٧) $\begin{vmatrix} \text{س}+\text{أ} & \text{س}+\text{أ} & ٢\text{أ} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ ٠ & \text{أ}-\text{س} & \text{س}-\text{أ} \end{vmatrix} = (\text{س}+٢\text{أ})(\text{س}-\text{أ})^٢$

⑬ $\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{س} & \text{س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{ب}+\text{س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & \text{حـ}+\text{س} \end{vmatrix} = \text{أ ب حـ} + \text{س}(\text{أ ب} + \text{ب حـ} + \text{أ حـ})$

⑭ $\begin{vmatrix} \text{أ}-\text{ب}-\text{حـ} & ٢\text{أ} & ٢\text{أ} \\ ٢\text{ب} & \text{ب}-\text{حـ}-\text{أ} & ٢\text{ب} \\ ٢\text{حـ} & ٢\text{حـ} & \text{حـ}-\text{أ}-\text{ب} \end{vmatrix} = (\text{أ}+\text{ب}+\text{حـ})^٣$

⑮ $\begin{vmatrix} \text{أ ل} & \text{أ م} & \text{أ ن} \\ \text{أ م} & \text{ب م} & \text{ب ن} \\ \text{أ ن} & \text{ب ن} & \text{حـ ن} \end{vmatrix} = \text{أ ن}(\text{ب ل}-\text{أ م})(\text{م حـ}-\text{ب ن})$

⑯ $\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب}+\text{حـ} & -\text{حـ} & -\text{ب} \\ -\text{حـ} & \text{أ}+\text{ب}+\text{حـ} & -\text{أ} \\ -\text{ب} & -\text{أ} & \text{أ}+\text{ب}+\text{حـ} \end{vmatrix} = ٢(\text{أ}+\text{ب})(\text{ب}+\text{حـ})(\text{حـ}+\text{أ})$

⑰ (دور ثان ٢٠٠٣) $\begin{vmatrix} \text{س}+\text{ص}+٢ & \text{س} & \text{ص} \\ ١ & ٢\text{س}+\text{ص}+١ & \text{ص} \\ ١ & \text{س} & \text{س}+٢\text{ص}+١ \end{vmatrix}$

$= ٢(\text{س}+\text{ص}+١)^٣$

⑱ $\begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{س} \\ -٢\text{س}+٢\text{س}^٢ & ١+٢\text{س}^٢ & ٢\text{س}^٢ \\ -٣+٢\text{س}^٢ & ٣\text{س}^٢ & ١+٣\text{س}^٢ \end{vmatrix} = ١+٥\text{س}+\text{س}^٣$

⑲ $\begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{ب}^٢+\text{حـ}^٢ & \text{ب حـ} \\ \text{ب}^٢ & \text{حـ}^٢+\text{أ}^٢ & \text{حـ أ} \\ \text{حـ}^٢ & \text{أ}^٢+\text{ب}^٢ & \text{أ ب} \end{vmatrix}$

$= (\text{أ}^٢+\text{ب}^٢+\text{حـ}^٢)(\text{أ}-\text{حـ})(\text{أ}-\text{ب})(\text{ب}-\text{حـ})(\text{أ}+\text{ب}+\text{حـ})$

⑳ (دور أول ٢٠٠٦) $\begin{vmatrix} ١ & -٢\text{حـ}+٢\text{حـ}^٢ & -٣\text{حـ}+٣\text{حـ}^٢ \\ ١ & ١+٢\text{حـ}^٢ & ٣\text{حـ}^٢ \\ \text{حـ} & ٢\text{حـ}^٢ & ١+٣\text{حـ}^٢ \end{vmatrix} = ١+٢\text{حـ}+٣\text{حـ}^٢$

㉑ (دور أول ٢٠١٣) $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^٢ & \text{س}^٣ \\ \text{ص} & \text{ص}^٢ & \text{ص}^٣ \\ \text{ع} & \text{ع}^٢ & \text{ع}^٣ \end{vmatrix} = \text{س ص ع}(\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})(\text{ع}-\text{س})$

(٢٢) $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^2 & \text{س}^3+1 \\ \text{ص} & \text{ص}^2 & \text{ص}^3+1 \\ \text{ع} & \text{ع}^2 & \text{ع}^3+1 \end{vmatrix} = (\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})(\text{ع}-\text{س})(\text{س ص ع}+1)$

(٢٣) (دور ثان ٢٠١٢) $\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{س}+\text{ص} \\ \text{ص}+3 & 3 & \text{ص} \\ 3 & \text{س}+3 & \text{س} \end{vmatrix} = 12\,\text{س ص}$

(٢٤) $\begin{vmatrix} \text{س} & -\text{ص} & -\text{ع} \\ \text{ص} & 1 & 0 \\ \text{ع}^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{س}+\text{ص}^2+\text{ع}^3$

(٢٥) $\begin{vmatrix} \text{أ}^2+1 & \text{أب} & \text{أحـ} \\ \text{أب} & \text{ب}^2+1 & \text{بحـ} \\ \text{أحـ} & \text{بحـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix} = \text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2+1$

(٢٦) $\begin{vmatrix} 1+\text{أ} & 1 & 1 \\ 1 & 1+\text{ب} & 1 \\ 1 & 1 & 1+\text{حـ} \end{vmatrix} = \text{أبحـ}\left(\frac{1}{\text{أ}}+\frac{1}{\text{ب}}+\frac{1}{\text{حـ}}+1\right)$

١٧ بدون فك المحدد أثبت أن :

(١) $\begin{vmatrix} \text{س}+\text{ص} & 2\text{ص} & \text{ع} \\ \text{ص}+\text{ع} & 2\text{ع} & \text{س} \\ \text{ع}+\text{س} & 2\text{س} & \text{ص} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع} & \text{س} \\ \text{ع} & \text{س} & \text{ص} \end{vmatrix}$

(٢) $\begin{vmatrix} \text{ل}+\text{م} & \text{م}+\text{ن} & \text{ن}+\text{ل} \\ \text{م}+\text{ن} & \text{ن}+\text{ل} & \text{ل}+\text{م} \\ \text{ن}+\text{ل} & \text{ل}+\text{م} & \text{م}+\text{ن} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{م} & \text{ن} & \text{ل} \\ \text{ن} & \text{ل} & \text{م} \end{vmatrix}$

(٣) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{بحـ} & \text{حـأ} & \text{أب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ}^3 & \text{ب}^3 & \text{حـ}^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(٤) $\begin{vmatrix} \text{بحـ} & \text{حـ}^2 & \text{ب}^2 \\ \text{حـ}^2 & \text{حـأ} & \text{أ}^2 \\ \text{ب}^2 & \text{أ}^2 & \text{أب} \end{vmatrix} = \text{أبحـ} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{حـ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{حـ} \end{vmatrix}$

(٥) $\begin{vmatrix} \text{بحـ} & \text{أ}^2 & \text{أ}^2 \\ \text{ب}^2 & \text{حـأ} & \text{ب}^2 \\ \text{حـ}^2 & \text{حـ}^2 & \text{أب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{بحـ} & \text{أب} & \text{حـأ} \\ \text{أب} & \text{حـأ} & \text{بحـ} \\ \text{أحـ} & \text{بحـ} & \text{أب} \end{vmatrix}$

(٦) $\begin{vmatrix} \text{أ}_1+\text{ب}_1\text{س} & \text{أ}_1-\text{ب}_1\text{س} & \text{حـ}_1 \\ \text{أ}_2+\text{ب}_2\text{س} & \text{أ}_2-\text{ب}_2\text{س} & \text{حـ}_2 \\ \text{أ}_3+\text{ب}_3\text{س} & \text{أ}_3-\text{ب}_3\text{س} & \text{حـ}_3 \end{vmatrix} = -2\text{س} \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{حـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{حـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{حـ}_3 \end{vmatrix}$

(٧) (دور أول ٢٠١٤) $\begin{vmatrix} \text{أ}_1+\text{ب}_1\text{س} & \text{أ}_1\text{س}+\text{ب}_1 & \text{حـ}_1 \\ \text{أ}_2+\text{ب}_2\text{س} & \text{أ}_2\text{س}+\text{ب}_2 & \text{حـ}_2 \\ \text{أ}_3+\text{ب}_3\text{س} & \text{أ}_3\text{س}+\text{ب}_3 & \text{حـ}_3 \end{vmatrix} = (1-\text{س}^2) \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{حـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{حـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{حـ}_3 \end{vmatrix}$

(٨) (دور أول ٢٠١١) $\begin{vmatrix} \text{ص}+\text{ع} & \text{س} & \text{س} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & 0 \\ 0 & \text{ع} & \text{ص} \\ \text{ع} & 0 & \text{س} \end{vmatrix}$

(٩) $\begin{vmatrix} \text{بحـ} & \text{أب} & \text{أ} \\ \text{أحـ} & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{حـ} & 1 \end{vmatrix} = (\text{أ}+\text{ب}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & 1 \\ \text{أ} & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{حـ}^2 & \text{حـ} \end{vmatrix}$

١٨ إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ}^3-1 & \text{أ}^2 & \text{أ} \\ \text{ب}^3-1 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ \text{حـ}^3-1 & \text{حـ}^2 & \text{حـ} \end{vmatrix}$ = صفر حيث أ ≠ ب ≠ حـ

أثبت أن : أبحـ = ١

١٩ أوجد قيمة س في كل مما يأتي حيث س ∈ ح :

(١) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & \text{س} \\ \text{س} & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10$

«٨ أو -٢»

② $\begin{vmatrix} ١ & -س & ٠ \\ س & ١ & س \\ ١ & -١ & س+١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -س^{٢} & ١ \\ -س & س \end{vmatrix}$ ، ١٠

③ $\begin{vmatrix} ٢ & -س & ١ \\ ١ & -١ & ٠ \\ س+١ & ١ & س \end{vmatrix} = ٢س + ١$ ، $\frac{٢ \pm \sqrt{٢}}{٢}$

---

⑳ أثبت أن : $\begin{vmatrix} س & أ & ب \\ أ & س & ب \\ أ & ب & س \end{vmatrix} = (س - أ)(س - ب)(س + أ + ب)$

ثم استخدم ذلك فى حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ٢\,جا\,هـ & ١ & -١ \\ ١ & ٢\,جا\,هـ & -١ \\ ١ & -١ & ٢\,جا\,هـ \end{vmatrix} =$ صفر

حيث $٠° \le هـ \le ١٨٠°$ ، ٠° ، ٣٠° ، ١٥٠° ، ١٨٠°

مسائل تقيس مهارات التفكير

㉑ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا ضربت جميع عناصر محدد من الدرجة الثالثة قيمته م فى العدد ٢ فإن قيمة المحدد الناتج تساوى .....

(أ) م (ب) ٢ م (جـ) ٤ م (د) ٨ م

② $\begin{vmatrix} -٤ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} ١٠ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ \\ ١ \end{vmatrix}$ .....

(أ) ٣٢ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٩ (د) ٢٧

③ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} ٢٠١٩ & ٢٠٢٠ \\ ٢٠٢١ & ٢٠٢٢ \end{vmatrix} =$ .....

(أ) ٢٠١٩ (ب) −٢٠١٩ (جـ) −٤٠٣٨ (د) ٤٠٣٨

④ إذا كان : حـ ، ب هما جذرا المعادلة : $س^{٢} - ١١س + ٢٧ =$ صفر

فإن : $\begin{vmatrix} لو_{٣}\,حـ & لو_{٣}\,ب \\ -١ & ١ \end{vmatrix} =$ .....

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) −١ (د) −٣

⑤ إذا كانت : $د(س) = \begin{vmatrix} جا\,س & ٠ & ٠ \\ ٠ & جا\,٢س & ٠ \\ ٠ & ٠ & جا\,٣س \end{vmatrix}$

فإن : $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{د(س)}{س^{٢}} =$ .....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

⑥ $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ن\,ق_{١} & ن+١\,ق_{١} & ن+٢\,ق_{١} \\ ن\,ق_{٢} & ن+١\,ق_{٢} & ن+٢\,ق_{٢} \end{vmatrix} =$ .....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) ن

㉒ بدون فك المحدد أثبت أن :

① (دورثان ٢٠١٢) $\begin{vmatrix} ص+ع & س & س \\ ص & ع+س & ص \\ ع & ع & س+ص \end{vmatrix} = ٤\,س\,ص\,ع$

② (دورثان ٢٠١٥) $\begin{vmatrix} \sqrt{١٣}+\sqrt{٣} & ٢\sqrt{٥} & \sqrt{٥} \\ \sqrt{٢٦}+\sqrt{١٥} & ٥ & \sqrt{١٠} \\ \sqrt{٦٥}+٣ & \sqrt{١٥} & ٥ \end{vmatrix} = ٥\sqrt{٣}\,(\sqrt{٦} - ٥)$

㉓ (دور أول ٢٠١٠) ضع م على الصورة المثلثة ومن ثم أوجد قيمته إذا علمت أن :

$م = \begin{vmatrix} ٠ & ٤ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ١ & ٨ & ١١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٠ & ٤ & ٤ \\ -٣ & ٥ & ٠ \\ ١ & ٤ & ٧ \end{vmatrix} + ٤ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٧ & ٤ \\ ٠ & ٤ & ٧ \end{vmatrix}$ ، ١٠٨

الدرس 2

المصفوفـات

قبل البدء فى استكمال دراستنا لموضوع المصفوفات سوف نتذكر بعضًا مما درسناه سابقًا فى هذا الموضوع.

تذكر أن :

• **المصفوفة :**

• هى تنظيم أو ترتيب لعدد من العناصر (المتغيرات أو الأعداد) فى صورة صفوف أفقية وأعمدة رأسية بين قوسين على الصورة ( )

• المصفوفة المكونة من م صفًا ، ن عمودًا تكون على النظم م × ن

• **بعض المصفوفات الخاصة :**

① المصفوفة المربعة :

هى مصفوفة عدد صفوفها = عدد أعمدتها مثل $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & -١ \\ ٢ & ٤ & -٢ \\ -١ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

② المصفوفة الصفرية : هى مصفوفة جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز [ ] مثل :

$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

③ المصفوفة القطرية : هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار عدا عناصر القطر الرئيسى يكون أحدهم على الأقل لا يساوى صفر مثل : $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

④ مصفوفة الوحدة I : هى مصفوفة قطرية كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسى يساوى واحد

مثل $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

• **مدور المصفوفة :**

إذا كانت : أ مصفوفة على النظم م × ن واستبدلنا الصفوف بالأعمدة بنفس الترتيب فإن المصفوفة الناتجة تكون على النظم ن × م ويرمز لها بالرمز $أ^{مد}$

فمثلًا : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & -١ \\ -٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ & -٣ \\ ٢ & ٤ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$ ويكون $\boxed{(أ^{مد})^{مد} = أ}$

• **المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة :** إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإن :

① أ مصفوفة متماثلة إذا كان : $أ = أ^{مد}$

فمثلًا : إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$

فإن : $أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix} = أ$ (مصفوفة متماثلة)

② أ مصفوفة شبه متماثلة إذا كان : $أ = -أ^{مد}$

فمثلًا : إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٠ & -١ & ٣ \\ ١ & ٠ & ٤ \\ -٣ & -٤ & ٠ \end{pmatrix}$

فإن : $أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ & -٣ \\ -١ & ٠ & -٤ \\ ٣ & ٤ & ٠ \end{pmatrix} = -أ$ (مصفوفة شبه متماثلة)

مع ملاحظة أن المصفوفة شبه المتماثلة يجب أن يكون جميع عناصر قطرها الرئيسى أصفار

• **العمليات على المصفوفات :**

① لضرب عدد حقيقى لا يساوى الصفر × مصفوفة :

نضرب هذا العدد فى كل عنصر من عناصر المصفوفة.

② لجمع مصفوفتين يجب أن تكون المصفوفتان على نفس النظم : نجمع كل عنصر مع نظيره.

③ لطرح مصفوفتين يجب أن تكون المصفوفتان على نفس النظم وتستخدم القاعدة :

$أ - ب = أ + (-ب)$

فمثلًا : $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٠ & ٤ & -٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -١ & ٥ & -٤ \\ ٣ & -٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٠ & ٤ & -٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٥ & ٤ \\ -٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٣ \\ -١ & ٦ & -٣ \end{pmatrix}$

④ لضرب مصفوفتين يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية لكى تكون عملية الضرب معرفة (ممكنة)

فمثلًا : إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٠ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٤- & ٢ \end{pmatrix}$ فإن :

• $أ \times ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٠ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٤- & ٢ \end{pmatrix}$

٣×٢ ، ٢×٢ متساويان

$= \begin{pmatrix} (٢)(١) + (١-)(٤-) & (٢)(٠) + (١-)(٢) \\ (٣)(١) + (٠)(٤-) & (٣)(٠) + (٠)(٢) \\ (٤)(١) + (٥)(٤-) & (٤)(٠) + (٥)(٢) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٢- \\ ٣ & ٠ \\ ١٦- & ١٠ \end{pmatrix}$

• $ب \times أ$ = (غير معرفة) لأن عدد أعمدة $ب \neq$ عدد صفوف $أ$

٢×٢ ، ٣×٢ غير متساويين

ملاحظات

① لأى ثلاث مصفوفات $أ$ ، $ب$ ، $ج$ على نفس النظم يكون :

• $أ + ب = ب + أ$
• $(أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)$
• $أ + \square = أ$
• $أ + (-أ) = \square$
• $(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$

② لأى ثلاث مصفوفات $أ$ ، $ب$ ، $ج$ إذا كانت عمليات الضرب معرفة فإن :

• $أب \neq ب أ$
• $(أب) ج = أ (ب ج)$
• $أ I = I أ = أ$
• $أ (ب + ج) = أب + أج$ ، $(ب + ج) أ = ب أ + ج أ$
• $(أب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$ وبصفة عامة $(أب ج .. هـ)^{مد} = هـ^{مد} ... ج^{مد} ب^{مد} أ^{مد}$
• $|أب| = |أ| \times |ب|$

• المعكوس الضربى للمصفوفة ٢ × ٢ :

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة $أ$ الذى يرمز له بالرمز $أ^{-١}$ يكون معرفًا (موجودًا) عندما يكون (محدد $أ$) (أى Δ) $\neq ٠$ ويكون :

$$أ^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -حـ & أ \end{pmatrix}$$ حيث $أ أ^{-١} = أ^{-١} أ = I$

مثلًا :

① إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٢- \\ ٣ & ٤- \end{pmatrix}$

فإن : $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٢- \\ ٣ & ٤- \end{vmatrix} = (٢-)(٤-) - (٣)(٢) = ٢ \neq ٠$

∴ للمصفوفة $أ$ معكوس ضربى.

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٤- & ٢- \\ ٣- & ٢- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢- & ١- \\ \frac{٣-}{٢} & ١- \end{pmatrix}$

② إذا كانت : $ب = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٣ & ١٢ \end{pmatrix}$

فإن : $|ب| = \begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٣ & ١٢ \end{vmatrix} = \left(\frac{١}{٢}\right)(١٢) - (٢)(٣) = ٠$

∴ $ب^{-١}$ غير معرف (ليس له وجود)

والآن سوف نستكمل دراستنا لموضوع المصفوفات بدراسة المعكوس الضربى للمصفوفة باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة كما يلى :

المعكوس الضربى للمصفوفة

تعريف

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم م × م وكان أ$^{-1}$ هو المعكوس الضربى للمصفوفة أ فيجب أن تتحقق العلاقة أ أ$^{-1}$ = أ$^{-1}$ أ = I بشرط أن يكون محدد المصفوفة أ لا يساوى صفر أى Δ ≠ ٠ ، حيث Δ = |أ|

ملاحظات

التعريف السابق يوضح لنا أن الشرط الأساسى لوجود المعكوس الضربى لأى مصفوفة مربعة هو أن يكون محدد هذه المصفوفة لا يساوى الصفر ولذلك فإن المصفوفات المربعة التى محددها يساوى صفر ليس لها معكوس ضربى وتعرف باسم المصفوفة المنفردة (الشاذة) ومن ذلك يمكن استنتاج أن :

① المصفوفة المنفردة (الشاذة) : هى المصفوفة التى محددها يساوى صفر وبالتالى لا يكون لها معكوس ضربى.

② المصفوفة غير المنفردة (غير الشاذة) : هى المصفوفة التى محددها لا يساوى صفر وبالتالى يكون لها معكوس ضربى.

مثال ١

بين أى من المصفوفتين الآتيتين منفردة وأيهما غير منفردة :

① أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ② ب = $\begin{pmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٤ & -٢ \\ ٣ & ٣ & ١ \end{pmatrix}$

الحل

① ∵ Δ = |أ| = $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٣ × ٤ − ٢ × ٥ = ٢ ≠ ٠

∴ المصفوفة أ غير منفردة أى لها معكوس ضربى.

② ∵ Δ = |ب| = $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٤ & -٢ \\ ٣ & ٣ & ١ \end{vmatrix}$

وبضرب ص$_١$ × (−١) والجمع إلى ص$_٢$ ثم بضرب ص$_٢$ × (−١) والجمع إلى ص$_٣$

= $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٤ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر

∴ المصفوفة ب مصفوفة منفردة أى ليس لها معكوس ضربى.

مثال ٢

أوجد قيمة س التى تجعل كلًا من المصفوفات الآتية منفردة (أى ليس لها معكوس ضربى) :

① أ = $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ② ب = $\begin{pmatrix} س - ٢ & ٧ \\ ٥ & س \end{pmatrix}$ ③ ج = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ س & ٣ \\ ١ & س & ٤ \\ ١ & ١ + س & ٣ \end{pmatrix}$

الحل

① بوضع |أ| = ٠

∴ $\begin{vmatrix} س & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٠

∴ ٤ س − ٤ = ٠

∴ س = ١

∴ عند س = ١ تكون المصفوفة أ منفردة أى ليس لها معكوس ضربى.

② بوضع |ب| = ٠

∴ $\begin{vmatrix} س - ٢ & ٧ \\ ٥ & س \end{vmatrix}$ = ٠

∴ س (س − ٢) − ٣٥ = ٠

∴ س^٢ − ٢ س − ٣٥ = ٠

∴ (س − ٧) (س + ٥) = ٠

∴ س = ٧ أو س = −٥

∴ عند س = ٧ أو س = −٥ تكون المصفوفة ب منفردة.

③ بوضع |ج| = ٠

$$\therefore \begin{vmatrix} ١ & ٢\text{س} & ٣ \\ ١ & \text{س} & ٤ \\ ١ & ١+\text{س} & ٣ \end{vmatrix} = ٠$$

، $\text{ص}_{١} \times (-١) + \text{ص}_{٣}$ ثم $\text{ص}_{١} \times (-١) + \text{ص}_{٢}$

$$\therefore \begin{vmatrix} ١ & ٢\text{س} & ٣ \\ ٠ & -\text{س} & ١ \\ ٠ & ١-\text{س} & ٠ \end{vmatrix} = ٠$$

، بتبديل $\text{ع}_{٢}$ ، $\text{ع}_{٣}$

$$\therefore - \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢\text{س} \\ ٠ & ١ & -\text{س} \\ ٠ & ٠ & ١-\text{س} \end{vmatrix} = ٠$$

$\therefore -(١ \times ١ \times (١ - \text{س})) = ٠$ $\therefore$ س − ١ = ٠

$\therefore$ س = ١ $\therefore$ عند س = ١ تكون المصفوفة ج منفردة.

العوامل المرافقة

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٣١} \end{pmatrix}$ فإن :

العامل المرافق للعنصر $\text{أ}_{\text{ص ع}}$ والذى يرمز له بالرمز $\overline{\text{أ}}_{\text{ص ع}}$ يعرف كحاصل ضرب $(-١)^{\text{ص+ع}}$ فى المحدد الناتج من حذف الصف ص والعمود ع وعلى ذلك تكون مصفوفة المرافقات للمصفوفة أ هى :

$$\text{م} = \begin{pmatrix} (-١)^{١+١}\begin{vmatrix} \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٢٣} \\ \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} & (-١)^{٢+١}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١٣} \\ \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} & (-١)^{٣+١}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١٣} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix} \\ (-١)^{١+٢}\begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٢٣} \\ \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} & (-١)^{٢+٢}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{١٣} \\ \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} & (-١)^{٣+٢}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{١٣} \\ \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix} \\ (-١)^{١+٣}\begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٣٢} \end{vmatrix} & (-١)^{٢+٣}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٣٢} \end{vmatrix} & (-١)^{٣+٣}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

لاحظ أنه

يمكن تحديد إشارة العامل المرافق لكل عنصر باستخدام قاعدة الإشارات التالية دون الحاجة إلى الضرب × $(-١)^{\text{ص+ع}}$ قاعدة الإشارات : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

ملاحظة

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \end{pmatrix}$ فإن :

، $\overline{\text{أ}}_{١١} = (-١)^{١+١}\,|\text{أ}_{٢٢}|$ ، $\overline{\text{أ}}_{٢١} = (-١)^{١+٢}\,|\text{أ}_{١٢}| = -\text{أ}_{١٢}$

، $\overline{\text{أ}}_{١٢} = (-١)^{٢+١}\,|\text{أ}_{٢١}| = -\text{أ}_{٢١}$ ، $\overline{\text{أ}}_{٢٢} = (-١)^{٢+٢}\,|\text{أ}_{١١}| = \text{أ}_{١١}$

وتكون مصفوفة المرافقات للمصفوفة أ هى م = $\begin{pmatrix} \text{أ}_{٢٢} & -\text{أ}_{١٢} \\ -\text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \end{pmatrix}$

مثال ②

أوجد مصفوفة المرافقات لكل من المصفوفتين الآتيتين :

① أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ ② ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٣ \\ ٠ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ٦ & ٧ \end{pmatrix}$

الحل

① ، $\overline{\text{أ}}_{١١} = (-١)^{١+١}\,|٤| = ٤$

، $\overline{\text{أ}}_{٢١} = (-١)^{٢+١}\,|١| = -١$

، $\overline{\text{أ}}_{١٢} = (-١)^{١+٢}\,|-٢| = ٢$

، $\overline{\text{أ}}_{٢٢} = (-١)^{٢+٢}\,|٣| = ٣$

$\therefore$ مصفوفة المرافقات للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

تذكر أنه :

إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ١ × ١

وكانت أ = (ك)

فإن : |أ| = ك

② $\overline{\text{ب}}_{١١} = (-١)^{١+١} \begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٦ & ٧ \end{vmatrix} = -٢$ ، $\overline{\text{ب}}_{٢١} = (-١)^{١+٢} \begin{vmatrix} ٠ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix} = ١٥$

، $\overline{\text{ب}}_{١٢} = (-١)^{٢+١} \begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} = -١٢$ ، $\overline{\text{ب}}_{٢٢} = (-١)^{٢+٢} \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} = -٢٥$

، $\overline{\text{ب}}_{١٣} = (-١)^{١+٢} \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix} = ٢٣$ ، $\overline{\text{ب}}_{٢٣} = (-١)^{٢+٢} \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} = -٩$

، $\overline{\text{ب}}_{٣١} = (-١)^{١+٣} \begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ١٧$ ، $\overline{\text{ب}}_{٣٢} = (-١)^{٢+٣} \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٠ & ٥ \end{vmatrix} = -١٠$

، $\overline{\text{ب}}_{٣٣} = (-١)^{٣+٣} \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix} = ٨$

∴ مصفوفة المرافقات للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix} -٢ & ١٥ & -١٢ \\ -٢٥ & ٢٣ & -٩ \\ ١٧ & -١٠ & ٨ \end{pmatrix}$

المصفوفة الملحقة

المصفوفة الملحقة للمصفوفة أ هى المصفوفة الناتجة من إيجاد مدور مصفوفة العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة أ ويرمز لها بالرمز $(\text{أ})^{\text{مل}}$

أى أن :

- إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{pmatrix}$ فإن : $(\text{أ})^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} \overline{\text{أ}}_{١١} & \overline{\text{أ}}_{١٢} & \overline{\text{أ}}_{١٣} \\ \overline{\text{أ}}_{٢١} & \overline{\text{أ}}_{٢٢} & \overline{\text{أ}}_{٢٣} \\ \overline{\text{أ}}_{٣١} & \overline{\text{أ}}_{٣٢} & \overline{\text{أ}}_{٣٣} \end{pmatrix}$

- إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{pmatrix}$ فإن : $(\text{أ})^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} \overline{\text{أ}}_{١١} & \overline{\text{أ}}_{١٢} \\ \overline{\text{أ}}_{٢١} & \overline{\text{أ}}_{٢٢} \end{pmatrix}$

مثال ٤

إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ فأوجد : $(\text{أ})^{\text{مل}}$ ثم أوجد : أ أ^{مل} ، أ^{مل} أ واذكر ماذا تلاحظ ؟

الحل

$\overline{\text{أ}}_{١١} = (-١)^{١+١} |١| = ١$ ، $\overline{\text{أ}}_{٢١} = (-١)^{٢+١} |٤| = -٤$

، $\overline{\text{أ}}_{١٢} = (-١)^{١+٢} |-٣| = ٣$ ، $\overline{\text{أ}}_{٢٢} = (-١)^{٢+٢} |٢| = ٢$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ هى م = $\begin{pmatrix} ١ & -٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

∴ $(\text{أ})^{\text{مل}} = (\text{م})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$

∴ أ أ^{مل} = $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٤ & ٠ \\ ٠ & ١٤ \end{pmatrix} = ١٤\,\text{I}$

، أ^{مل} أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٤ & ٠ \\ ٠ & ١٤ \end{pmatrix} = ١٤\,\text{I}$

لاحظ أنه

المصفوفة الملحقة للمصفوفة أ$_{٢ \times ٢}$ تنتج من تبديل عنصرى القطر الرئيسى مع تغيير إشارة كل من عنصرى القطر الآخر

لاحظ أن : أ أ^{مل} = أ^{مل} أ = ١٤ I

، ∵ |أ| = $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix}$ = ٢ + ١٢ = ١٤ ∴ أ أ^{مل} = أ^{مل} أ = |أ| I

ملاحظات

- إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ ولتكن أ = $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{pmatrix}$

فإن : أ^{مل} = $\begin{pmatrix} \text{ء} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{pmatrix}$ أى أن المصفوفة الملحقة لمصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ تنتج من تبديل عنصرى القطر الرئيسى مع تغيير إشارتى عنصرى القطر غير الرئيسى

نمثلًا : $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -٧ & -٦ \\ ٢ & ٨ \end{pmatrix}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} ٨ & ٦ \\ -٢ & -٧ \end{pmatrix}$

- لأى مصفوفة مربعة غير منفردة : أ أ^{مل} = أ^{مل} أ = Δ I حيث Δ = |أ|
- فى مصفوفة الوحدة I تكون العوامل المرافقة لعناصر القطر الرئيسى كل منها = ١ والعوامل المرافقة لباقى العناصر أصفارًا وعلى ذلك فإن : $\boxed{\text{I}^{\text{مل}} = \text{I}}$

أى أن : المصفوفة الملحقة لمصفوفة الوحدة هى نفس مصفوفة الوحدة.

مثال ٥

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & -٢ \\ ٠ & ٢ & ٤ \\ ١ & -١ & ٢ \end{pmatrix}$ فأوجد : $(أ)^{مل}$

الحل

∵ مصفوفات المرافقات للمصفوفة أ هى :

$$م = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -٢ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -٢ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٤ & -٣ \\ ٢ & ٤ & ١ \\ ٦ & -٤ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$\therefore (أ)^{مل} = (م)^{مد} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٢ & ٦ \\ ٤ & ٤ & -٤ \\ -٣ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

ملاحظة

إذا كان : أ مصفوفة على النظم م × م فإن :

① $|ك أ| = ك^{م} |أ|$ ② $|أ^{-١}| = \frac{١}{|أ|}$ ③ $|أ^{مل}| = |أ|^{م-١}$

فمثلاً : $|٥ I| = ٥^{٢} \times |I| = ٢٥$ [حيث I على النظم ٢ × ٢]

، $|٥ I| = ٥^{٣} \times |I| = ١٢٥$ [حيث I على النظم ٣ × ٣]

، $|٤ أ| = ٤^{٢} \times |أ| = ١٦ \times |أ|$ [حيث أ على النظم ٢ × ٢]

إيجاد المعكوس الضربى لمصفوفة غير منفردة بطريقة العوامل المرافقة

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة غير منفردة

وكانت $أ^{-١}$ هى المعكوس الضربى لها فإن : $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} أ^{مل}$

ولإيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة أ نتبع الخطوات الآتية :

① نوجد محدد المصفوفة أ مع ملاحظة أن $|أ| \neq$.

② نوجد مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ

③ نوجد المصفوفة الملحقة للمصفوفة أ وهى $(أ^{مل})$ بإيجاد مدور مصفوفة العوامل المرافقة.

④ نوجد المعكوس الضربى للمصفوفة أ من العلاقة : $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مل}$

مثال ٦

أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة : $أ = \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ -٥ & -١ \end{pmatrix}$

الحل

① ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ -٥ & -١ \end{vmatrix} = ٤ \times (-١) - ١ \times (-٥) = -٤ + ٥ = ١ \neq$ صفر

∵ أ مصفوفة غير منفردة. ∴ لها معكوس ضربى هو $أ^{-١}$

② العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة أ هى :

$\overline{أ}_{١١} = (-١)^{١+١} \times -١ = -١$ ، $\overline{أ}_{٢١} = (-١)^{١+٢} \times -٥ = ٥$

، $\overline{أ}_{١٢} = (-١)^{٢+١} \times ١ = -١$ ، $\overline{أ}_{٢٢} = (-١)^{٢+٢} \times ٤ = ٤$

③ $أ^{مل} = \begin{pmatrix} \overline{أ}_{١١} & \overline{أ}_{٢١} \\ \overline{أ}_{١٢} & \overline{أ}_{٢٢} \end{pmatrix}^{مد} = \begin{pmatrix} -١ & ٥ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}^{مد} = \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

④ $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} أ^{مل}$ ∴ $أ^{-١} = \frac{١}{١} \times \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

ملاحظة

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|}\begin{pmatrix} ء & -ب \\ -حـ & أ \end{pmatrix}$

في المثال السابق : يمكن إيجاد $أ^{-1}$ دون الحاجة إلى اتباع خطوات الحل مباشرة كالتالي :

$\because |أ| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$\therefore أ^{-1} = \frac{1}{|أ|}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

مثال ٧

أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة : $أ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

الحل

• إيجاد قيمة محدد المصفوفة :

$\therefore |أ| = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$

$\therefore |أ| = 2(3 - 0) - 1(-1 - 20) - 2(0 - 12)$

$\therefore |أ| = 6 + 21 + 24 = 51 \neq$ صفر

• إيجاد مصفوفة العوامل المرافقة :

$\overline{أ}_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$ ، $\overline{أ}_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 21$ ، $\overline{أ}_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12$

، $\overline{أ}_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ ، $\overline{أ}_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 10$ ، $\overline{أ}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$

، $\overline{أ}_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 11$ ، $\overline{أ}_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -8$ ، $\overline{أ}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7$

• إيجاد المصفوفة الملحقة :

$\because$ مصفوفة العوامل المرافقة : $م = \begin{pmatrix} 3 & 21 & -12 \\ -1 & 10 & 4 \\ 11 & -8 & 7 \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{مل} = \begin{pmatrix} 3 & 21 & -12 \\ -1 & 10 & 4 \\ 11 & -8 & 7 \end{pmatrix}^{مد}$ $\therefore أ^{مل} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 11 \\ 21 & 10 & -8 \\ -12 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

• إيجاد $أ^{-1}$:

$\because أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} أ^{مل}$ $\therefore أ^{-1} = \frac{1}{51}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 11 \\ 21 & 10 & -8 \\ -12 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{-1}{51} & \frac{11}{51} \\ \frac{7}{17} & \frac{10}{51} & \frac{-8}{51} \\ \frac{-4}{17} & \frac{4}{51} & \frac{7}{51} \end{pmatrix}$

بعض خواص المعكوس الضربي للمصفوفة .

إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين غير منفردتين فإن :

① $(أب)^{-1} = ب^{-1} أ^{-1}$ ② $(أ^{-1})^{-1} = أ$ ③ $(أ^{ن})^{-1} = (أ^{-1})^{ن}$

④ $(أ^{-1})^{2} = (أ^{2})^{-1}$ ⑤ $(I)^{-1} = I$

مثال ٨

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ فأثبت أن :

① $(أ^{-1})^{-1} = أ$ ② $(أب)^{-1} = ب^{-1} أ^{-1}$ ③ $(أ^{ن})^{-1} = (أ^{-1})^{ن}$

الحل

① $\because |أ| = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 16 = -2$

$\therefore أ^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

، $|أ^{-1}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -٤ & ١ \end{vmatrix} = \frac{٣}{٢} \times ١ - -٣ \times -٤ = -\frac{١}{٢}$

$\therefore (أ^{-1})^{-1} = \frac{١}{-\frac{١}{٢}} \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٤ & \frac{٣}{٢} \end{pmatrix} = -٢ \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٤ & \frac{٣}{٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & -٢ \\ -٨ & ٣ \end{pmatrix} \therefore (أ^{-1})^{-1} = أ$

(٢) $\because |ب| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = -٢ - ٣ = -٥$

$\therefore ب^{-1} = \frac{١}{-٥} \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix} \therefore ب^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \\ \frac{-٢}{٥} & \frac{٣}{٥} \end{pmatrix}$

$\therefore ب^{-1} أ^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \\ \frac{-٢}{٥} & \frac{٣}{٥} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & \frac{٣}{٢} \\ -٣ & -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{-٢}{٥} \\ \frac{٥}{٢} & \frac{٩}{٥} \end{pmatrix}$ (١)

، $أب = \begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ -٨ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٨ & ٤ \\ -٢٥ & -٥ \end{pmatrix}$

$\therefore |أب| = \begin{vmatrix} ١٨ & ٤ \\ -٢٥ & -٥ \end{vmatrix} = -٩٠ + ١٠٠ = ١٠$

$\therefore (أب)^{-1} = \frac{١}{١٠} \begin{pmatrix} -٥ & -٤ \\ ٢٥ & ١٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{-٢}{٥} \\ \frac{٥}{٢} & \frac{٩}{٥} \end{pmatrix}$ (٢)

$\therefore$ من (١) ، (٢) نجد أن : $(أب)^{-1} = ب^{-1} أ^{-1}$

(٣) $أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٦ & -٨ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix} \therefore (أ^{مد})^{-1} = \frac{١}{-٣} \begin{pmatrix} -٣ & ٨ \\ -٢ & ٦ \end{pmatrix}$

$\therefore (أ^{مد})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & -٤ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ (١)

، $أ^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & ٢ \\ -٤ & -٣ \end{pmatrix} \therefore (أ^{-1})^{مد} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & -٤ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore (أ^{مد})^{-1} = (أ^{-1})^{مد}$

مثال ٩

أوجد المعكوس الضربي لكل من المصفوفتين :

(١) $أ = \begin{pmatrix} س & ٠ & ٠ \\ ٠ & س & ٠ \\ ٠ & ٠ & س \end{pmatrix}$ (٢) $ب = \begin{pmatrix} س & ٠ & ٠ \\ ٠ & ص & ٠ \\ ٠ & ٠ & ع \end{pmatrix}$

الحل

(١) $أ = س \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ $\therefore أ = س I$ $\therefore أ^{-1} = (س I)^{-1}$

$\therefore أ^{-1} = س^{-1} I^{-1}$ $\therefore أ^{-1} = \frac{١}{س} I$

$\therefore أ^{-1} = \frac{١}{س} \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ $\therefore أ^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{١}{س} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{س} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{س} \end{pmatrix}$

(٢) $|ب| = \begin{vmatrix} س & ٠ & ٠ \\ ٠ & ص & ٠ \\ ٠ & ٠ & ع \end{vmatrix} = س ص ع$

، $\overline{ب_{١١}} = ص ع$ ، $\overline{ب_{٢٢}} = س ع$ ، $\overline{ب_{٣٣}} = س ص$

أما $\overline{ب_{٢١}} = \overline{ب_{٣١}} = \overline{ب_{١٢}} = \overline{ب_{٣٢}} = \overline{ب_{١٣}} = \overline{ب_{٢٣}} =$ صفر

$\therefore ب^{مل} = \begin{pmatrix} ص ع & ٠ & ٠ \\ ٠ & س ع & ٠ \\ ٠ & ٠ & س ص \end{pmatrix}^{مد}$ $\therefore ب^{مل} = \begin{pmatrix} ص ع & ٠ & ٠ \\ ٠ & س ع & ٠ \\ ٠ & ٠ & س ص \end{pmatrix}$

، $\because ب^{-1} = \frac{١}{|ب|} ب^{مل}$ $\therefore ب^{-1} = \frac{١}{س ص ع} \begin{pmatrix} ص ع & ٠ & ٠ \\ ٠ & س ع & ٠ \\ ٠ & ٠ & س ص \end{pmatrix}$

$\therefore ب^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{١}{س} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{ص} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{ع} \end{pmatrix}$

مثال ١٠

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $أ^{٢} - ٢أ = ٣I$ ومن ذلك أوجد : $أ^{-١}$

الحل

$أ^{٢} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٩ & ٠ \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{٢} - ٢أ = \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٩ & ٠ \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٩ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٦ & ٠ \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{٢} - ٢أ = \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix} = ٣\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} = ٣I$

(المطلوب أولاً)

$\therefore أ^{٢} - ٢أ = ٣I$ $\qquad \therefore أ(أ - ٢I) = ٣I$

$\therefore أ(\frac{١}{٣}أ - \frac{٢}{٣}I) = I$ وحيث أن $أ أ^{-١} = I$

$\therefore أ^{-١} = \frac{١}{٣}أ - \frac{٢}{٣}I$ $\qquad \therefore أ^{-١} = \frac{١}{٣}\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix} - \frac{٢}{٣}\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{٢}{٣} & -\frac{١}{٣} \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠ & \frac{٢}{٣} \\ \frac{٢}{٣} & ٠ \end{pmatrix}$ $\qquad \therefore أ^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{٢}{٣} & -١ \\ \frac{١}{٣} & ٠ \end{pmatrix}$

(المطلوب ثانيًا)

مثال ١١

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ -١ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

وكان : $أس + ب = ج$ فأثبت أن : $س = أ^{-١}(ج - ب)$

ومن ذلك أثبت أن المصفوفة : $س = ٢\begin{pmatrix} -٤ & -٧ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

الحل

$\therefore أس + ب = ج$ $\qquad \therefore أس = ج - ب$

وبضرب كل من الطرفين من اليمين فى $أ^{-١}$ $\qquad \therefore أ^{-١}أس = أ^{-١}(ج - ب)$

$\therefore Iس = أ^{-١}(ج - ب)$ $\qquad \therefore س = أ^{-١}(ج - ب)$ (المطلوب أولاً)

ولكن $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|}أ_{مل}$ $\qquad \therefore أ^{-١} = \frac{١}{١}\begin{pmatrix} -٢ & -٧ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{-١} = \begin{pmatrix} -٢ & -٧ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ج - ب = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

$\therefore ج - ب = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ $\qquad \therefore س = \begin{pmatrix} -٢ & -٧ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

$\therefore س = \begin{pmatrix} -٨ & -١٤ \\ ٤ & ٦ \end{pmatrix}$ $\qquad \therefore س = ٢\begin{pmatrix} -٤ & -٧ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ (المطلوب ثانيًا)

مثال ١٢

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة : $أسب = ٢I$

الحل

$\because أسب = ٢I$ $\qquad \therefore أ^{-١}أسب = أ^{-١} \times ٢I$

$\therefore Iسب = ٢أ^{-١}$ $\qquad \therefore سب = ٢أ^{-١}$

$\therefore سبب^{-١} = ٢أ^{-١}ب^{-١}$ $\qquad \therefore سI = ٢أ^{-١}ب^{-١}$

$\therefore س = ٢أ^{-١}ب^{-١}$ ولكن $أ^{-١} = \frac{١}{٩}\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ ، $ب^{-١} = \frac{١}{١٦}\begin{pmatrix} -١ & ٥ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

$\therefore س = ٢ \times \frac{١}{٩} \times \frac{١}{١٦}\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ & ٥ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ $\qquad \therefore س = \frac{١}{٧٢}\begin{pmatrix} -١ & ٢١ \\ ٧ & -٣ \end{pmatrix}$

حل آخر : $\because س = ٢أ^{-١}ب^{-١}$ $\qquad \therefore س = ٢(بأ)^{-١}$

ولكن $بأ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٣ & ٢١ \end{pmatrix}$ $\qquad \therefore (بأ)^{-١} = \frac{١}{١٤٤}\begin{pmatrix} -١ & ٢١ \\ -٣ & ٧ \end{pmatrix}$

$\therefore س = ٢ \times \frac{١}{١٤٤}\begin{pmatrix} -١ & ٢١ \\ -٣ & ٧ \end{pmatrix} = \frac{١}{٧٢}\begin{pmatrix} -١ & ٢١ \\ -٣ & ٧ \end{pmatrix}$

مثال ١٣

حل المعادلة المصفوفية : $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٤ & -٣ & ٣ \\ ١ & ٣ & ١ \end{pmatrix} \times س = \begin{pmatrix} ٣ & ٩ & ٧ \\ ١ & ١١ & ٧ \\ ٧ & ٥ & ٧ \end{pmatrix}$

الحـــل

نفرض أن : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٤ & -٣ & ٣ \\ ١ & ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٩ & ٧ \\ ١ & ١١ & ٧ \\ ٧ & ٥ & ٧ \end{pmatrix}$

∴ المعادلة المصفوفية هى : أ × س = ب وبضرب الطرفين من اليمين × $أ^{-١}$

∴ $أ^{-١}$ أ × س = $أ^{-١}$ ب ∴ س = $أ^{-١}$ ب

، ∵ $\Delta = |أ| = \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٤ & -٣ & ٣ \\ ١ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} -٣ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} - (-١) \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ٤ & -٣ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$

$= ٣ \times (-١٢) + ١ \times ١ + ٢ \times ١٥ = -٥ \neq ٠$

، ∵ مصفوفة المرافقات للمصفوفة أ هى (م) = $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -٣ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٤ & -٣ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -١٢ & -١ & ١٥ \\ ٧ & ١ & -١٠ \\ ٣ & -١ & -٥ \end{pmatrix}$

∴ $(أ)^{ط} = \begin{pmatrix} -١٢ & ٧ & ٣ \\ -١ & ١ & -١ \\ ١٥ & -١٠ & -٥ \end{pmatrix}$

، ∵ $أ^{-١} = \frac{١}{\Delta} \times (أ)^{ط}$ ∴ $(أ)^{-١} = \frac{١}{-٥} \begin{pmatrix} -١٢ & ٧ & ٣ \\ -١ & ١ & -١ \\ ١٥ & -١٠ & -٥ \end{pmatrix}$

∴ س = $\frac{-١}{٥} \begin{pmatrix} -١٢ & ٧ & ٣ \\ -١ & ١ & -١ \\ ١٥ & -١٠ & -٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٩ & ٧ \\ ١ & ١١ & ٧ \\ ٧ & ٥ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٨}{٥} & \frac{١٦}{٥} & \frac{١٤}{٥} \\ \frac{٩}{٥} & \frac{٣}{٥} & \frac{٧}{٥} \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

تمارين 11 على المصفوفات

اختبار تفاعلى

• فهم ○ تطبيق ∴ مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسى

١ أثبت أن كلًا من المصفوفات الآتية غير منفردة :

① $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٤ & ٢ & -٣ \end{pmatrix}$

٢ أوجد قيمة س التى تجعل المصفوفات الآتية منفردة :

① $\begin{pmatrix} -٢ & س \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} س - ١ & ٣ \\ ٤ & س + ٣ \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} س + ٣ & ٢ \\ س + ٢ & س + ٢ \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ ٢س & ٣س & س + ١ \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ س + ١ & س + ٢ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ⑥ $\begin{pmatrix} جا س & جتا س & ٠ \\ ١ & \sqrt{٣} & ٠ \\ ظا س & قا س & ١ \end{pmatrix}$

٣ أوجد مصفوفة المرافقات لكل من المصفوفات الآتية :

① $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٣ \\ ٠ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ٦ & ٧ \end{pmatrix}$

٤ أوجد المصفوفة الملحقة للمصفوفة ب فى كل مما يأتى ثم أوجد ب $ب^{ط}$ ، $ب^{ط}$ ب :

① $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ ② $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$

٥ أوجد المعكوس الضربي لكل من المصفوفات الآتية إن وجد :

(١) $\begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$

(٣) $\begin{pmatrix} \text{قتا}\,\theta & ١ \\ ١ & \text{قتا}\,\theta \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} \text{جا}\,\theta & -\text{جتا}\,\theta \\ \text{جتا}\,\theta & \text{جا}\,\theta \end{pmatrix}$

(٥) $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

(٦) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

(٧) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(٨) $\begin{pmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٧ & ٢ & -٢ \\ ٢ & -٣ & ٣ \end{pmatrix}$

(٩) $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ & ٠ \end{pmatrix}$

(١٠) $\begin{pmatrix} \text{جتا}\,\text{هـ} & -\text{جا}\,\text{هـ} & ٠ \\ \text{جا}\,\text{هـ} & \text{جتا}\,\text{هـ} & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المصفوفة المنفردة بين المصفوفات التالية هي .....

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٦ & -٤ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٣ & ٦ \end{pmatrix}$

(٢) جميع المصفوفات الآتية لها معكوس ضربي ما عدا المصفوفة .....

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$

(٣) جميع المصفوفات الآتية ليس لها معكوس ضربي ما عدا المصفوفة .....

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & -٦ \\ -٢ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٤ & -٨ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ١٠ & ٥ \end{pmatrix}$

(٤) قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ -٣ & ٣ \end{pmatrix}$ منفردة هي .....

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −٣

(٥) قيمة أ التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & أ \\ أ & ٨ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي هي .

(أ) −٤ (ب) ٤ (جـ) ± ٤ (د) ١٦

(٦) قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س - ١ & ٢ \\ ٤ & س + ١ \end{pmatrix}$ منفردة هي .

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) ± ٣ (د) ٩

(٧) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -٥ \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{-١} =$

(أ) $\begin{pmatrix} -٥ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

(٨) ناتج جمع المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٥ & -٧ \end{pmatrix}$ ومعكوسها الضربي يساوي .

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & -٦ \\ ١٠ & -١٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & -٢ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٠ & -٥ \\ -٥ & ٠ \end{pmatrix}$

(٩) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فإن

(أ) $أ^{-١} = أ$ (ب) $أ^{-١} = أ^{ط}$

(جـ) $أ^{-١} = أ^{-١}$ (د) جميع ما سبق صحيح.

(١٠) إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن : $أأ^{ط} =$

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ١٠ \\ ١٠ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٠ & ١٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١٠ & ١ \\ ١ & ١٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١٠ \\ ١٠ & ١ \end{pmatrix}$

(١١) لأي مصفوفة مربعة أ إذا كان : $أ^{٢} - أ + I = \square$ فإن : $أ^{-١} =$ .....

(أ) $أ^{-٢}$ (ب) $أ + I$ (جـ) $I - أ$ (د) $أ - I$

(١٢) قيمة أ التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ ٢ & أ & ١ \\ -١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ منفردة هى .....

(أ) $\frac{-٥}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٣) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ١ & لو\,س \\ لو\,س & ١ \end{pmatrix}$ منفردة فإن : س = ...

(أ) -١٠ أ، ١ (ب) ١٠ أ، $-\frac{١}{١٠}$ (جـ) $\frac{١}{١٠}$ أ، -١٠ (د) ١٠ أ، $\frac{١}{١٠}$

(١٤) إذا كانت : أ مصفوفة غير منفردة فإن : $(أ^{مل})^{=}$ .....

(أ) $|أ|^{-١}$ (ب) $(أ^{مد})^{-١}$ (جـ) $\frac{١}{|أ|}أ^{-١}$ (د) $|أ^{مد}|$

(١٥) إذا كانت أ مصفوفة غير منفردة على النظم ٣ × ٣ وكان ك ∈ ح*

فأى مما يأتى صحيح دائمًا ؟

(أ) $|ك أ| = ك|أ|$ (ب) $|أ^{-١}| = |أ|^{٦}$

(جـ) $|أ| = |أ^{مد}|$ (د) $|أ| = |أ^{-١}|$

(١٦) إذا كان كل من أ ، ب مصفوفتين غير منفردتين فإن كل مما يأتى صحيح ما عدا .....

(أ) $(أ+ب)^{-١} = أ^{-١} + ب^{-١}$ (ب) $(أ \times ب)^{مد} = ب^{مد} \times أ^{مد}$

(جـ) $(أ \times ب)^{-١} = ب^{-١} \times أ^{-١}$ (د) $(أ+ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$

(١٧) إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين غير منفردتين فإن : $(أب)^{-١}$ = ...

(أ) أب (ب) $أ^{-١} ب^{-١}$ (جـ) $ب^{-١} أ^{-١}$ (د) $(ب أ)^{-١}$

(١٨) إذا كانت : أ مصفوفة مربعة ، |أ| = ٤ فإن : $أ أ^{مل}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٤ I (جـ) I (د) $\frac{١}{٤}$ I

(١٩) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -٧ \\ ١٧ & -٤٦ \end{pmatrix}$ وكان أ × جـ = ب

فإن : جـ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & -٨ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & -١١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٤ & -١٧ \\ -١ & ٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٦ & -٩ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

(٢٠) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} جتا\,θ & جا\,θ \\ -جا\,θ & جتا\,θ \end{pmatrix}$ فإن : $(أ^{٢})^{-١}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} جتا\,٢θ & -جا\,٢θ \\ جا\,٢θ & جتا\,٢θ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} جتا\,θ & جا\,θ \\ -جا\,θ & جتا\,θ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} -جتا\,θ & -جا\,θ \\ -جا\,θ & -جتا\,θ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} جتا\,٢θ & جا\,٢θ \\ جا\,٢θ & جتا\,٢θ \end{pmatrix}$

(٢١) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان |أ| = ٥ فإن : |٣ أ| = ...

(أ) ٥ (ب) ١٥ (جـ) ٤٥ (د) ١٠

(٢٢) إذا كانت : أ ، ب مصفوفتان على النظم ٣ × ٣ وكان أ = ٢ب ، |ب| = ٥

فإن : |أ| = ...

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٣٢ (د) ٤٠

(٢٣) إذا كانت : I مصفوفة الوحدة على النظم ٢ × ٢ فإن : |٤ I| = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٢٤) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان |أ| = ٥ فإن : $|أ \times أ^{مل}|$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٢٥ (جـ) ١٢٥ (د) ١

(٢٥) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان |أ| = -٣ فإن : $|أ أ^{مل}|$ = ...

(أ) ٣ (ب) -٢٧ (جـ) ٢٧ (د) -٩

(٢٦) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} أ & ٠ & ٠ \\ ٠ & أ & ٠ \\ ٠ & ٠ & أ \end{pmatrix}$ فإن : $|أ|\,|أ^{مل}|$ = ...

(أ) $أ^{٣}$ (ب) $أ^{٦}$ (جـ) $أ^{٩}$ (د) $أ^{٢٧}$

(٢٧) إذا كان : أ ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات على النظم ن × ن وكان أ ب جـ = I

فإن : $ب^{-١}$ = ...

(أ) $أ^{-١} جـ^{-١}$ (ب) $(أ جـ)^{-١}$ (جـ) $جـ^{-١} + أ^{-١}$ (د) جـ أ

(٢٨) إذا كان : أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ وكان |أ| = ٥

فإن : |أ^مل| = ...

(أ) ٥ (ب) ٢٥ (جـ) ١٢٥ (د) $\frac{١}{٥}$

(٢٩) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ فإن : (٢ أ)^مل = ...

(أ) ٢ أ^مل (ب) $\frac{١}{٢}$ أ^مل (جـ) ٤ أ^مل (د) ٨ أ^مل

(٣٠) إذا كان : أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ وكان |أ| = ٥

فإن : |٢ أ^مل| = ...

(أ) ٢٥٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٥٠ (د) ٢٥

(٣١) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان حـ^ص ع ترمز للعامل المرافق للعنصر أ^ص ع

فى المصفوفة أ فإن : أ١١ حـ١٣ + أ٢١ حـ٢٣ + أ٣١ حـ٣٣ = ...

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) ٢٥

(٣٢) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان |أ| = ٥ وكان حـ^ص ع ترمز للعامل المرافق

للعنصر أ^ص ع فى المصفوفة أ فإن : أ١١ حـ١١ + أ٢١ حـ٢١ + أ٣١ حـ٣١ = ...

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) ٢٥

٧ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & -٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٦ & -٤ \end{pmatrix}$ فأوجد :

(١) (أ + ب)^-١ (٢) (أ − ب)^-١

٨ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٧ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

فأثبت أن : ٢ جـ^-١ = أ ب

٩ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$ فحقق الخواص التالية :

(١) (أ ب)^-١ = ب^-١ أ^-١ (٢) (أ^-١)^-١ = أ

١٠ فى كل مما يأتى حقق أن : (أ^٢)^-١ = (أ^-١)^٢

(١) أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٧ & ١٢ \end{pmatrix}$ (٢) أ = $\begin{pmatrix} -٣ & ٤ & ٠ \\ ٢ & -١ & ٥ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$

١١ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & -٢ & -١ \\ ٠ & ٠ & -٣ \end{pmatrix}$ فحقق أن : (أ^ن)^-١ = (أ^-١)^ن

١٢ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$

فحقق أن : (أ ب جـ)^-١ = جـ^-١ ب^-١ أ^-١

١٣ إذا كانت : أ^-١ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ وكان : أ ب = $\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ فأوجد : ب^-١

١٤ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ وكان : (أ ب)^-١ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ فأوجد : ب

١٥ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : أ^٢ − ٧ أ − ٨ I = ☐

ثم استخدم ذلك فى إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة أ

١٦ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ -١ & -١ & ١ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : أ^٢ − ٤ أ + ٣ I = ☐ ثم استنتج أ^-١

١٧ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -١ & -١ & -١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : أ^٢ = I ثم استنتج أ^-١

١٨ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ١ & -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب^ن = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ -١ & ٥ & ٣ \end{pmatrix}$

فبين أن : (أ ب)^٢ − ٢ (أ ب) = ٢٤ I ومن ثم أوجد : (أ ب)^-١ ، (أ ب)^-٢

١٩ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} س & ٠ & ٢ص \\ ص & س & -ع \\ ص & س & ع \end{pmatrix}$ وكان : $أ^{مد} = أ^{-١}$

أوجد قيم كل من : س ، ص ، ع

$\pm\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\pm\frac{١}{\sqrt{٦}}$ ، $\pm\frac{١}{\sqrt{٣}}$

٢٠ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} س & -٧ \\ ص & ع \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ل \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

وكان : $أب = ٢ ج^{-١}$ فأوجد : س ، ص ، ع ، ل

٢٠ ، -١ ، ٤ ، ٢

٢١ حل كلًا من المعادلات المصفوفية الآتية :

(١) $س \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$

(٢) $س \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ١ \end{pmatrix} - ٣ \begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

(٣) $٢ س \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$

٢٢ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٥ \\ ٢ & -٣ & ٨ \\ -١ & ٤ & -١٠ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & -٢ & -١ \\ ٣ & -٢ & -١ \\ -٥ & ٧ & ٣ \end{pmatrix}$ فأوجد : $أ^{-١}$

ثم أوجد المصفوفة ج بحيث يكون : أ ج = ب

٢٣ إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين غير منفردتين وكان : أب = ب أ

فأثبت أن : $أ^{-١} ب = ب أ^{-١}$

٢٤ إذا كان : أ ، ب ، ج مصفوفات مربعة على نفس النظم وغير منفردة وكان أب = ج أ = I

فأثبت أن : ب = ج

٢٥ حل المعادلة المصفوفية : $٤ \left(س \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix} \right) = ٣ س + \begin{pmatrix} ٢ & ٧ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$

ومن ذلك أثبت أن : $س^{٢} + (س^{٢})^{-١} = ٣ I$

٢٦ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س التى تحقق : $أ^{٢} س = ٥ I$

٢٧ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١٦ \\ ١ & ٩ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة : أ س ب = I

٢٨ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

فأوجد : $أ (ب + ج)^{-١}$ ومنها استنتج : $(ب + ج) أ^{-١}$

٢٩ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$

فأثبت أن المصفوفة : $ب^{-١} أ ب$ قطرية ومن ذلك استنتج قيمة : $ب^{-١} أ^{٢} ب$

الدرس 3 حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

• **المعادلة الخطية :**

• الصورة العامة للمعادلة الخطية هى :

$أ_1 س_1 + أ_2 س_2 + أ_3 س_3 + ... + أ_ن س_ن = ب$

(حيث $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، .... ، $س_ن$ رموز لمتغيرات عددها ن ، $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ ، ... ، $أ_ن$ ، ب رموزًا لأعداد حقيقية)

فمثلًا : المعادلة ٧ س + ٣ ص = ٤ معادلة خطية فى س ، ص

، ٢ س − ص + ٣ ع = ١٢ معادلة خطية فى س ، ص ، ع

• المعادلة الخطية تكون متجانسة إذا كانت ب (وهى ثابت المعادلة) = صفر

وبذلك تكون الصورة العامة للمعادلة الخطية المتجانسة هى :

$أ_1 س_1 + أ_2 س_2 + أ_3 س_3 + ... + أ_ن س_ن = صفر$

فمثلًا : المعادلة ٧ س + ٢ ص = صفر معادلة خطية متجانسة فى س ، ص

، المعادلة ٧ س − ٢ ص + ٥ ع = صفر معادلة خطية متجانسة فى س ، ص ، ع

• **استخدام المصفوفات فى التعبير عن أنظمة المعادلات الخطية :**

نظام المعادلات الخطية المكون من معادلات خطية عددها م وتحتوى على ن من المتغيرات يمكن التعبير عنها بالمعادلة المصفوفية $\boxed{أ س = ب}$

حيث أ هى مصفوفة المعاملات ، س هى مصفوفة المتغيرات (المجاهيل) ، ب هى مصفوفة الثوابت

• إذا كان نظام المعادلات الخطية مكون من معادلتين فى متغيرين :

$أ_1 س + ب_1 ص = حـ_1$ ، $أ_2 س + ب_2 ص = حـ_2$ فإن :

$$أ = \begin{pmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{pmatrix} ، س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} ، ب = \begin{pmatrix} حـ_1 \\ حـ_2 \end{pmatrix}$$

أى أنه يمكن التعبير عن نظام المعادلات بالمعادلة المصفوفية :

$$\underset{\text{معاملات}}{\begin{pmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{pmatrix}} \underset{\text{متغيرات}}{\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}} = \underset{\text{ثوابت}}{\begin{pmatrix} حـ_1 \\ حـ_2 \end{pmatrix}}$$

• إذا كان نظام المعادلات الخطية مكون من ثلاث معادلات فى ثلاث متغيرات

$أ_1 س + ب_1 ص + حـ_1 ع = ء_1$ ، $أ_2 س + ب_2 ص + حـ_2 ع = ء_2$

، $أ_3 س + ب_3 ص + حـ_3 ع = ء_3$ فإن :

$$أ = \begin{pmatrix} أ_1 & ب_1 & حـ_1 \\ أ_2 & ب_2 & حـ_2 \\ أ_3 & ب_3 & حـ_3 \end{pmatrix} ، س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} ، ب = \begin{pmatrix} ء_1 \\ ء_2 \\ ء_3 \end{pmatrix}$$

أى يعبر عنها بالمعادلة المصفوفية :

$$\underset{\text{معاملات}}{\begin{pmatrix} أ_1 & ب_1 & حـ_1 \\ أ_2 & ب_2 & حـ_2 \\ أ_3 & ب_3 & حـ_3 \end{pmatrix}} \underset{\text{متغيرات}}{\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}} = \underset{\text{ثوابت}}{\begin{pmatrix} ء_1 \\ ء_2 \\ ء_3 \end{pmatrix}}$$

• **نظام المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة :**

يقال أن نظام المعادلات الخطية متجانسة إذا كان كل عنصر من عناصر مصفوفة الثوابت يساوى صفر أما إذا كان أحد عناصر مصفوفة الثوابت لا يساوى صفر فإن نظام المعادلات الخطية يسمى معادلات خطية غير متجانسة.

فمثلًا : • نظام المعادلات : ٢ س − ص + ع = ٠ ، س + ٣ ص − ٢ ع = ٠

، س + ص + ع = ٠

يمثل نظام معادلات خطية متجانسة لأن $ب = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ كل عناصرها أصفار

• نظام المعادلات : س + ٣ ص − ع = ٠ ، ٢ س + ص − ع = ٤

، س + ص = ٠

يمثل نظام معادلات خطية غير متجانسة لأن $ب = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$ أحد عناصرها لا يساوى صفر

مثال ١

اكتب كلًا من أنظمة المعادلات الخطية الآتية على شكل معادلة مصفوفية :

(١) ٢ س − ٣ ص = ١ ، س + ٢ ص = ٥

(٢) س + ص = ١ ، ٢ س − ص + ٥ = ٠ ، ٣ س − ص = ٧

(٣) ٦ س = ٥ ، س + ٢ ص = ٣ ، ع = ٢

الحل

① $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ \\ ٥ \end{pmatrix}$

، ∵ المعادلة المصفوفية هى : أس = ب

∴ المعادلة المصفوفية للنظام هى : $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٥ \end{pmatrix}$

② $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ \\ -٥ \\ ٧ \end{pmatrix}$

∴ المعادلة المصفوفية للنظام هى : $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٥ \\ ٧ \end{pmatrix}$

③ $أ = \begin{pmatrix} ٦ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

∴ المعادلة المصفوفية للنظام هى : $\begin{pmatrix} ٦ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

ملاحظة

يمكن حل المعادلة المصفوفية على الصورة أس = ب باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة إذا كان أ مصفوفة مربعة وغير منفردة أى $|أ| \neq ٠$ كالآتى :

∵ أس = ب بضرب طرفى المعادلة من اليمين فى $أ^{-١}$

∴ $أ^{-١} أس = أ^{-١} ب$ ، ∵ $أ^{-١} أ = I$

∴ $I س = أ^{-١} ب$ ، ∵ $I س = س$

∴ $\boxed{س = أ^{-١} ب}$

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

إذا كان مجموعة من المعادلات الخطية يمكن كتابتها بالصورة المصفوفية أس = ب وإذا تحقق الشرطان الآتيان :

① أ مصفوفة مربعة بمعنى أن عدد المعادلات الخطية = عدد المجاهيل.

② أ مصفوفة غير منفردة أى قيمة محدد مصفوفة المعاملات لا يساوى صفرًا.

فإن : $\boxed{س = أ^{-١} ب}$

ومن هذه المعادلة وباستخدام خواص تساوى مصفوفتين نحصل على قيم المجاهيل.

مثال ١

حل أنظمة المعادلات الخطية الآتية :

① س + ص = ٥ ، ٣ س − ٢ ص = ١٢

② س + ٢ ص − ٣ ع = ٦ ، ٢ س − ص − ٤ ع = ٢ ، ٤ س + ٣ ص − ٢ ع = ١٤

الحل

يمكن كتابة المعادلتين على الصورة المصفوفية أس = ب

∴ $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ١٢ \end{pmatrix}$

∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ -٢ & ٣ \end{vmatrix} = -٨ - ٣ = -١١ \neq ٠$ ∴ أ مصفوفة غير منفردة.

∴ مجموعة حل المعادلة المصفوفية هى : $س = أ^{-١} ب$

∵ $أ^{-١} = \frac{١}{-١١}\begin{pmatrix} -٣ & -٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$ ∴ $س = \frac{-١}{١١}\begin{pmatrix} -٣ & -٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ \\ ١٢ \end{pmatrix} = \frac{-١}{١١}\begin{pmatrix} -٣٣ \\ ٢٢ \end{pmatrix}$

∴ $س = \begin{pmatrix} ٣ \\ -٢ \end{pmatrix}$ ∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ -٢ \end{pmatrix}$

∴ س = ٣ ، ص = −٢

② بكتابة مجموعة المعادلات على الصورة المصفوفية أ س = ب

$$\therefore \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣- \\ ٢ & ١- & ٤- \\ ٤ & ٣ & ٢- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ \\ ٢ \\ ١٤ \end{pmatrix}$$

$$\because |أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣- \\ ٢ & ١- & ٤- \\ ٤ & ٣ & ٢- \end{vmatrix} = ١ (٢ + ١٢) - ٢ (-٤ + ١٦) - ٣ (٦ + ٤)$$

$$= ١٤ - ٢٤ - ٣٠ = -٤٠ \neq \text{صفر}$$

∴ مجموعة المعادلات لها حل هو : س = $أ^{-١}$ ب

$$\because أ^{مط} = \begin{pmatrix} ١٤ & ١٢- & ١٠ \\ ٥- & ١٠ & ٥ \\ ١١- & ٢- & ٥- \end{pmatrix}^{مط} = \begin{pmatrix} ١٤ & ٥- & ١١- \\ ١٢- & ١٠ & ٢- \\ ١٠ & ٥ & ٥- \end{pmatrix}$$

$$\because أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} أ^{مط} \qquad \therefore أ^{-١} = \frac{١}{٤٠-} \begin{pmatrix} ١٤ & ٥- & ١١- \\ ١٢- & ١٠ & ٢- \\ ١٠ & ٥ & ٥- \end{pmatrix}$$

$$\therefore س = \frac{١-}{٤٠} \begin{pmatrix} ١٤ & ٥- & ١١- \\ ١٢- & ١٠ & ٢- \\ ١٠ & ٥ & ٥- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٦ \\ ٢ \\ ١٤ \end{pmatrix}$$

$$\therefore س = \frac{١-}{٤٠} \begin{pmatrix} ٨٠- \\ ٨٠- \\ ٠ \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$$

∴ س = ٢ ، ص = ٢ ، ع = صفر

مرتبة المصفوفة

تعريف

مرتبة المصفوفة غير الصفرية هى أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوى صفر.

مع ملاحظة أن :

إذا كانت أ مصفوفة غير صفرية على النظم م × ن فإنه يرمز لمرتبة المصفوفة أ بالرمز ر (أ) ويكون :

• ١ ≤ ر (أ) ≤ ن إذا كان : م ≤ ن • ١ ≤ ر (أ) ≤ م إذا كان : م ≥ ن

مثلاً : المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ١- & ٦ \\ ٥ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$ مرتبتها تساوى ٢

وذلك لأن $\begin{vmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٢ × ٤ − (−١) × ٥

= ١٣ ≠ صفر

، المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ مرتبتها تساوى ٢

وذلك لأن $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٥ − ٦ = −١ ≠ صفر

، المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ٢ \\ ٣ & ٣ & ٣ \end{pmatrix}$ مرتبتها تساوى ١ لأن جميع المحددات من الدرجة الثانية

تبعتها = صفرًا كما أن أحد عناصر المصفوفة ≠ صفر

لاحظ أنه

حين نقول إن مرتبة المصفوفة أ = ٢ (مثلاً) فإن هذا يعنى أمرين متحققين :

① يوجد محدد أو محدد أصغر واحد على الأقل من الدرجة ٢ بحيث قيمته ≠ صفر

② قيم جميع المحددات الصغرى من درجة أكبر من ٢ = صفر

ملاحظات

① إذا كانت أ مصفوفة صفرية فإن : ر (أ) = ٠

فمثلاً : المصفوفة $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ مرتبتها تساوى صفر

② إذا كانت أ مصفوفة صف أو عمود غير صفرية فإن : ر (أ) = ١

فمثلاً : إذا كانت أ = (٢ ٣ −١) أو أ = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$ فإن : ر (أ) = ١

③ إذا كانت I مصفوفة وحدة على النظم ن × ن فإن : ر (I) = ن

فمثلاً : إذا كانت I = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : ر (I) = ٢

، إذا كانت I = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : ر (I) = ٣

④ مرتبة المصفوفة أ = مرتبة أ^ت أى أن : ر (أ) = ر (أ^ت)

فمثلًا : إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٥ & ٧ & ٩ \end{pmatrix}$ فإن : ر (أ) = ٢

ويكون أ^ت = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٧ \\ -١ & ٩ \end{pmatrix}$ فإن : ر (أ^ت) = ٢

⑤ إذا أضيف أو حذف صف (عمود) صفرى على المصفوفة أ فإن رتبتها لا تتغير.

فمثلًا : مرتبة $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٥ \\ ٧ & -٢ & ٩ \end{pmatrix}$ = مرتبة $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٥ & ٠ \\ ٧ & -٢ & ٩ & ٠ \end{pmatrix}$

= مرتبة $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٥ \\ ٧ & -٢ & ٩ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ = ٢

⑥ إذا أضيف أو حذف صف (عمود) عبارة عن تجميع لعدة صفوف (أعمدة) فإن مرتبة المصفوفة لا تتغير.

فمثلًا : مرتبة $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٤ \\ -٥ & ٧ & ٩ \\ ١ & ٢ & ١٧ \end{pmatrix}$ = مرتبة $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٤ \\ -٥ & ٧ & ٩ \end{pmatrix}$ = ٢

لأن الصف الثالث هو حاصل جمع الصف الأول مضروبًا فى ٢ والصف الثانى.

مثال ②

أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية :

① أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٥ \end{pmatrix}$

② ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$

③ ج = $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٦ & -٣ \end{pmatrix}$

④ د = $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

الحل

① ∵ أ مصفوفة صف وغير صفرية. ∴ مرتبتها تساوى ١

② ∵ |ب| = $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ -١ & -٢ \end{vmatrix}$ = −٦ + ٥ = −١ ≠ صفر

∴ مرتبة ب تساوى درجة |ب| = ٢

∵ |ج| = $\begin{vmatrix} ٤ & -٢ \\ ٦ & -٣ \end{vmatrix}$ = −١٢ + ١٢ = صفر

∵ مرتبة ج < ٢ ولكن ج مصفوفة غير صفرية. ∴ مرتبة ج = ١

∵ |د| = $\begin{vmatrix} ٠ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر.

∵ مرتبة د < ٢ ولكن د مصفوفة غير صفرية. ∴ مرتبة د = ١

مثال ③

أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية :

① أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٢ & ٤ & -٦ \\ -٣ & -٥ & ٧ \end{pmatrix}$

② ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٤ & -١ \\ ٥ & ٦ & ٢ \\ -٤ & ٢ & -٥ \end{pmatrix}$

③ ج = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

④ د = $\begin{pmatrix} ١ & -٥ & ٢ \\ -٢ & ١٠ & -٤ \\ ٣ & -١٥ & ٦ \end{pmatrix}$

الحل

∵ |أ| = $\begin{vmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٢ & ٤ & -٦ \\ -٣ & -٥ & ٧ \end{vmatrix}$ = ١ (٢٨ − ٣٠) − ٣ (١٤ − ١٨) −٢ (−١٠ + ١٢) = ٦ ≠ ٠

∴ مرتبة أ = درجة |أ| = ٣

∵ |ب| = $\begin{vmatrix} ١ & ٤ & -١ \\ ٥ & ٦ & ٢ \\ -٤ & ٢ & -٥ \end{vmatrix}$ = ١ (−٣٠ − ٤) −٤ (−٢٥ + ٨) −١ (١٠ + ٢٤) = صفر

∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix}$ = ٦ − ٢٠ = −١٤ ≠ صفر ، ∴ ر (ب) < ٣ ∴ ر (ب) = ٢

∵ |ج| = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١ (٤ − ٤) = صفر

∴ ر (ج) < ٣

∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٢ ≠ صفر ∴ ر (ج) = ٢

④ $|د| = \begin{vmatrix} ١ & -٥ & ٢ \\ -٢ & ١٠ & -٤ \\ ٣ & -١٥ & ٦ \end{vmatrix}$ = صفر «لأن $ع_٢ = ٢ ع_١$»

∴ ر (د) < ٣

، ∵ المحددات الصغرى من الدرجة الثانية هى :

$\begin{vmatrix} ١٠ & -٤ \\ -١٥ & ٦ \end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix} -٢ & -٤ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix} -٢ & ١٠ \\ ٣ & -١٥ \end{vmatrix}$ = صفر

، $\begin{vmatrix} -٥ & ٢ \\ -١٥ & ٦ \end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix} ١ & -٥ \\ ٣ & -١٥ \end{vmatrix}$ = صفر

، $\begin{vmatrix} -٥ & ٢ \\ ١٠ & -٤ \end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & -٤ \end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix} ١ & -٥ \\ -٢ & ١٠ \end{vmatrix}$ = صفر

وحيث أن جميع قيمها أصفار ∴ ر (د) < ٢

، ∵ د مصفوفة غير صفرية ∴ ر (د) = ١

لاحظ أنه :

يمكن الحصول على نفس النتيجة إذا لاحظنا أن :

$|د| = \begin{vmatrix} ١ & -٥ & ٢ \\ -٢ & ١٠ & -٤ \\ ٣ & -١٥ & ٦ \end{vmatrix} = -٥ \times ٢ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -٢ & -٢ & -٢ \\ ٣ & ٣ & ٣ \end{vmatrix} = -٥ \times ٢ \times -٢ \times ٣ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

أى أن المحدد من الدرجة الثالثة = صفر

وكذلك كل المحددات الصغرى من الدرجة الثانية = صفر

أيضًا ، ∵ المصفوفة د غير صفرية.

∴ مرتبة د = ١

مثال ٥

إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ١ & ك & -١ \\ ٢ & -١ & ك \\ ١ & ١٠ & -٦ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة ك فى كل من الحالتين الآتيتين :

① إذا كان : ر (أ) = ٣

② إذا كان : ر (أ) = ٢

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ك & -١ \\ ٢ & -١ & ك \\ ١ & ١٠ & -٦ \end{vmatrix}$

$|أ| = ١ (٦ - ١٠ ك) - ك (-١٢ - ك) - ١ (٢٠ + ١)$

$|أ| = ٦ - ١٠ ك + ١٢ ك + ك^٢ - ٢١$ ∴ $|أ| = ك^٢ + ٢ ك - ١٥$

$|أ|$ = صفر إذا كان $ك^٢ + ٢ ك - ١٥ = ٠$

أى أن : $(ك + ٥) (ك - ٣) = ٠$ أى أن المحدد ينعدم عندما ك = -٥ أ، ك = ٣

إذا كان ك = -٥ نجد أن $\begin{vmatrix} ١ & -٥ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = -١ + ١٠ = ٩ \neq ٠$

إذا كان ك = ٣ نجد أن $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = -١ - ٦ = -٧ \neq ٠$

∴ ر (أ) = ٣ عندما ك ∈ ح - {-٥ ، ٣}

∴ ر (أ) = ٢ عندما ك ∈ {-٥ ، ٣}

المصفوفة الموسعة

إذا كان لدينا م من المعادلات الخطية فى ن من المجاهيل فإنها تكتب على الصورة أ س = ب

يمكن تعريف المصفوفة الموسعة $أ^*$ حيث $أ^* = (أ \vdots ب)$ وتكون على النظم م × (ن + ١)

مثال ٦

أوجد المصفوفة الموسعة لكل من الأنظمة الآتية :

٢س + ص = ٣ ، س - ٢ ص = ١

٢س + ٣ ص = ٧ ، ٣ س - ص = ٥ ، س - ص = ١

٢س + ٢ ص - ع = ٤ ، س + ص - ع = ٣ ، س - ٢ ع = ٠

الحل

① $أ^* = \left(\begin{array}{cc:c} ٢ & ١ & ٣ \\ ١ & -٢ & ١ \end{array}\right)$

② $أ^* = \left(\begin{array}{ccc:c} ٢ & ٣ & ٧ \\ ٣ & -١ & ٥ \\ ١ & -١ & ١ \end{array}\right)$

③ $أ^* = \left(\begin{array}{ccc:c} ٢ & ٢ & -١ & ٤ \\ ١ & ١ & -١ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ & ٠ \end{array}\right)$

مثال ٧

أوجد مرتبة المصفوفة الموسعة لكل نظام من المعادلات الآتية :

① ٥ س − ٢ ص = ٧ ، ١٠ س − ٦ ص = ٩

② ٢ س + ص = ٥ ، ٤ س + ٢ ص = ٧ ، ٦ س + ٣ ص = ٤

الحل

① $أ^* = \begin{pmatrix} ٥ & -٢ & \vdots & ٧ \\ ١٠ & -٦ & \vdots & ٩ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣ وغير صفرية.

∴ ١ ≤ ر (أ*) ≤ ٢ ، ∵ $\begin{vmatrix} ٥ & ٧ \\ ١٠ & ٩ \end{vmatrix}$ = ٤٥ − ٧٠ = −٢٥ ≠ ٠ ∴ ر (أ*) = ٢

② $أ^* = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & \vdots & ٥ \\ ٤ & ٢ & \vdots & ٧ \\ ٦ & ٣ & \vdots & ٤ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٣ وغير صفرية. ∴ ١ ≤ ر (أ*) ≤ ٢

، ∵ |أ*| = $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٥ \\ ٤ & ٢ & ٧ \\ ٦ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = صفر لأن $ع_١ = ٢ ع_٢$ ∴ ١ ≤ ر (أ*) ≤ ٢

، ∵ $\begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٧ − ١٠ = −٣ ≠ ٠ ∴ ر (أ*) = ٢

إمكانية حل أنظمة المعادلات الخطية

لأى نظام من المعادلات الخطية المكون من (ن) من المعادلات فى (ن) من المتغيرات (المجاهيل) معادلته المصفوفية على الصورة $\boxed{أ س = ب}$ حيث أ مصفوفة المعاملات ، س مصفوفة المتغيرات ، ب مصفوفة الثوابت هناك حالتان :

أولا المعادلات غير المتجانسة

إذا كانت مصفوفة الثوابت ب غير صفرية أى ب ≠ $\boxed{}$ فإن هذا النظام يمثل معادلات خطية غير متجانسة ويكون النظام

① له حل وحيد إذا كان : $\boxed{ر (أ) = ر (أ^*) = ن}$

② له عدد غير محدود من الحلول (عدد لانهائى من الحلول)

إذا كان : $\boxed{ر (أ) = ر (أ^*) = ك \text{ حيث } ك < ن}$

③ ليس له حل على الإطلاق إذا كان : $\boxed{ر (أ) \neq ر (أ^*)}$

ثانيا المعادلات المتجانسة

إذا كانت مصفوفة الثوابت ب صفرية أى ب = $\boxed{}$ فإن هذا النظام يمثل معادلات خطية متجانسة وفى هذه الحالة تكون دائمًا ر (أ) = ر (أ*) أى مرتبة المصفوفة أ هى نفسها مرتبة المصفوفة الموسعة أ* ويكون النظام

① له حل وحيد إذا كان $\boxed{ر (أ) = ن}$ حيث ن عدد المجاهيل وفيه تكون جميع قيم المتغيرات تساوى صفر لذلك يسمى بالحل الصفرى (البديهى لكونه شديد الوضوح)

② له عدد لا نهائى من الحلول بجانب الحل الصفرى إذا كان $\boxed{ر (أ) < ن}$ حيث ن عدد المجاهيل.

مثال ٨

ابحث إمكانية حل كل نظام من أنظمة المعادلات الآتية ثم حل النظام باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة إن وجد :

① ٢ س + ص = ١ ، ٥ س − ٢ ص = ٩

② ٢ س + ٤ ص = ٨ ، ٦ س + ٨ ص = ١١

③ ٢ س − ٣ ص = ٦ ، ٦ س − ٩ ص = ١٨

الحل

① ∵ أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٢ ، ∵ |أ| = $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{vmatrix}$ = −٦ − ٥ = −١١ ≠ ٠

∴ ر (أ) = ٢ ، ∵ أ* = $\left(\begin{array}{cc:c} ٢ & ١ & ١ \\ ٥ & -٢ & ٩ \end{array}\right)$ على النظم ٢ × ٣ ، أ* غير صفرية

∴ ١ ≤ ر (أ*) ≤ ٢ ، ∵ |أ| ≠ ٠ ∴ ر (أ*) = ٢

∴ ر (أ) = ر (أ*) = ٢ = عدد المجاهيل (المتغيرات) ∴ المعادلتان لهما حل وحيد.

، ∵ $أ^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ ، ∵ المعادلة المصفوفية للمعادلتين هى : أس = ب

∴ س = $أ^{-1}$ ب

∴ س = $\frac{1}{-11}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{-1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ∴ س = ١ ، ص = −٢ ∴ مجموعة الحل = {(١ ، −٢)}

② ∵ أ = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٢ ، غير صفرية.

، ∵ |أ| = $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$ = ٢٤ − ٢٤ = ٠

∴ ر (أ) = ١

، ∵ $أ^*$ = $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 8 & 11 \end{array}\right)$ على النظم ٢ × ٣ وغير صفرية.

∴ ١ ≤ ر ($أ^*$) ≤ ٢

، ∵ $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 11 \end{vmatrix}$ = ٤٤ − ٦٤ = −٢٠ ≠ ٠ ∴ ر ($أ^*$) = ٢

∴ ر (أ) ≠ ر ($أ^*$) ∴ المعادلتان ليس لهما حل.

∴ مجموعة الحل = ∅

③ ∵ أ = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٢ ، غير صفرية. ∴ ١ ≤ ر (أ) ≤ ٢

، ∵ |أ| = $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}$ = −١٨ + ١٨ = ٠

∴ ر (أ) = ١ ، ∵ $أ^*$ = $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 6 \\ 6 & -9 & 18 \end{array}\right)$ على النظم ٢ × ٣ وغير صفرية.

، ∵ $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}$ = ٠ ، $\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 18 \end{vmatrix}$ = ٠ ، $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{vmatrix}$ = ٠

∴ ر ($أ^*$) = ١

∴ ر (أ) = ر ($أ^*$) = ١ < ٢ (أقل من عدد المتغيرات)

∴ المعادلتان لهما عدد لانهائى من الحلول.

بوضع س = ل فى إحدى المعادلتين ∴ ٢ ل − ٣ ص = ٦

∴ ص = $\frac{6 - 2ل}{-3}$ = $\frac{2}{3}$ ل − ٢ ∴ الحل العام = (ل ، $\frac{2}{3}$ ل − ٢)

ملحوظة: إذا لم يحدد فى المسألة إيجاد مجموعة حل المعادلتين باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة فيمكن استخدام طريقة كرامر أو أى طريقة أخرى فى حل المعادلتين.

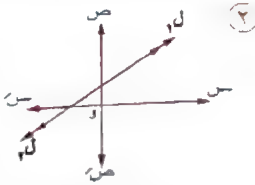
ملاحظات

المعنى الهندسى لحل معادلتين خطيتين فى متغيرين يمثلهما المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$ هو :

المستقيمان متقاطعان فى نقطة واحدة

ر (أ) = ر ($أ^*$) = ٢

حل وحيد.

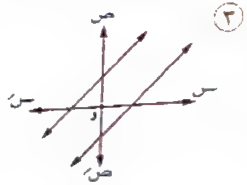
② 

المستقيمان منطبقان أى متقاطعان فى كل نقط المستقيمين

ر (أ) = ر ($أ^*$) = ١

(أقل من عدد المتغيرات)

عدد لا نهائى من الحلول.

③ 

المستقيمان متوازيان وغير منطبقين

ر (أ) ≠ ر ($أ^*$)

لا يوجد حل.

مثال ①

عين قيم ك حتى يكون للنظام : س + ك ص = ٢ ، (ك − ١) س + ٢ ص = ك

① حل وحيد. ② عدد لانهائى من الحلول. ③ ليس له حل.

الحل

∵ أ = $\begin{pmatrix} 1 & ك \\ ك - 1 & 2 \end{pmatrix}$

∴ |أ| = $\begin{vmatrix} 1 & ك \\ ك - 1 & 2 \end{vmatrix}$ = ٢ − ك (ك − ١) = − $ك^2$ + ك + ٢

لكى يكون للنظام حل وحيد يجب أن يكون ر (أ) = ٢ = عدد المتغيرات

أى : − $ك^2$ + ك + ٢ ≠ ٠ ∴ $ك^2$ − ك − ٢ ≠ ٠ ∴ (ك − ٢) (ك + ١) ≠ ٠

أى : ك ≠ ٢ ، ك ≠ −١

② لكى يكون للنظام عدد لانهائى من الحلول يجب أن يكون ر (أ) = ر (أ*) = ١
(أقل من عدد المتغيرات)

عند ك = ٢ يكون |أ| = $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر ∴ ر (أ) = ١

، أ* = $\left(\begin{array}{cc:c} ١ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{array}\right)$ على النظم ٢ × ٣ وغير صفرية ، ∵ |أ| = ٠ ، $\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٠

∴ ر (أ*) < ٢ ∴ ر (أ*) = ١

∴ يكون للنظام عدد لانهائى من الحلول عندما ك = ٢

③ لكى يكون النظام ليس له حل يجب أن يكون ر (أ) ≠ ر (أ*)

عند ك = −١ ∴ |أ| = $\begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ٢- & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر ∴ ر (أ) = ١

ويكون أ* = $\left(\begin{array}{cc:c} ١ & ١- & ٢ \\ ٢- & ٢ & ١- \end{array}\right)$ على النظم ٢ × ٣ وغير صفرية

، ∵ $\begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ١- \end{vmatrix}$ = ٢ − ٤ = −٢ ≠ ٠ ∴ ر (أ*) = ٢

∴ ر (أ) ≠ ر (أ*) ∴ عند ك = −١ لا يكون للنظام حل على الإطلاق.

مثال ١٠

إذا كان للمعادلتين : ٥ س − ٢ ص = ٠ ، ٢ س + (ك − ١) ص = ٠ عدد لانهائى من الحلول. فأوجد قيمة ك واكتب الحل العام للمعادلتين.

الحل

∵ أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢- \\ ٢ & ك - ١ \end{pmatrix}$ ∴ |أ| = $\begin{vmatrix} ٥ & ٢- \\ ٢ & ك - ١ \end{vmatrix}$ = ٥ ك − ٥ + ٤ = ٥ ك − ١

، ∵ المعادلتان متجانستان.

∴ لكى يكون للمعادلتين عدد لانهائى من الحلول يجب أن يكون ر (أ) = ١ (أقل من عدد المجاهيل)

أى أن : |أ| = ٠ ∴ ٥ ك − ١ = ٠ ∴ ك = $\frac{١}{٥}$

∴ قيمة ك التى تجعل للمعادلتين عدد لانهائى من الحلول = $\frac{١}{٥}$

ولإيجاد صورة الحل العام : نضع فى إحدى المعادلتين س = ل

∴ ٥ ل − ٢ ص = ٠ ∴ ص = $\frac{٥ ل}{٢}$ ∴ الحل العام للمعادلتين = (ل ، $\frac{٥}{٢}$ ل)

مثال ١١

ابحث إمكانية وجود حل خلاف الحل الصفرى لكل من أنظمة المعادلات الآتية :

① ٢ س − ٢ ص = ٠ ، ٢ س − ٣ ص = ٠

② ٢ ص = ٧ س ، ٢١ س − ٦ ص = ٠

الحل

① أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢- \\ ٢ & ٣- \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٢ ∴ |أ| = $\begin{vmatrix} ٣ & ٢- \\ ٢ & ٣- \end{vmatrix}$ = −٩ + ٤ = −٥ ≠ ٠

∴ ر (أ) = ٢ (تساوى عدد المجاهيل)

∴ للنظام حل وحيد هو الحل الصفرى (٠ ، ٠)

② أ = $\begin{pmatrix} ٧ & ٢- \\ ٢١ & ٦- \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٢ ∵ |أ| = $\begin{vmatrix} ٧ & ٢- \\ ٢١ & ٦- \end{vmatrix}$ = صفر

∴ ر (أ) = ١ (أقل من عدد المجاهيل)

∴ يوجد عدد لانهائى من الحلول خلاف الحل الصفرى.

ملاحظة هامة : فى بحث إمكانية وجود حل لمجموعة من المعادلات المتجانسة نكتفى بتحديد مرتبة مصفوفة المعاملات أ دون تحديد رتبة المصفوفة الموسعة أ* وذلك لأن ر (أ) = ر (أ*) دائمًا حيث أن أ* تنتج من إضافة عمود الثوابت إلى المصفوفة أ وهو دائمًا يساوى أصفار وذلك لا يغير من مرتبتها.

مثال ١٢

ابحث إمكانية حل كل نظام من أنظمة المعادلات الآتية :

① ٢ ص − ع = ٥ ، ٢ س + ص + ع = ٩ ، س + ٢ ص + ٢ ع = ٣

② س − ص + ٢ ع = ٥ ، ٢ س + ص + ع = ٧ ، ٣ س − ٢ ص + ٥ ع = ٢٠

③ س − ص + ع = ٧ ، ٣ س + ٢ ص − ١٢ ع = ١١ ، ٤ س + ص − ١١ ع = ١٨

الحل

① أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ & ١- \\ ٢ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٣ وغير صفرية.

∴ $|أ| = \begin{vmatrix} ٠ & ٣ & -١ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = -٣(٤ - ١) - ١(٤ - ١) = -١٢ \neq ٠$.

∴ ر (أ) = ٣

، ∵ $أ^* = \left(\begin{array}{ccc:c} ٠ & ٣ & -١ & ٥ \\ ٢ & ١ & ١ & ٩ \\ ١ & ٢ & ٢ & ٣ \end{array}\right)$ على النظم ٣ × ٤ وغير صفرية.

∴ ١ ≤ ر ($أ^*$) ≤ ٣ ، ∵ ر (أ) = ٣ ∴ ر ($أ^*$) = ٣

∴ ر (أ) = ر ($أ^*$) = ٣ = عدد المجاهيل. ∴ نظام المعادلات له حل وحيد.

(٢) $أ = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٣ & -٢ & ٥ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٣ وغير صفرية.

، ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٣ & -٢ & ٥ \end{vmatrix} = ١(٥ + ٢) + ١(-١٠ - ٣) + ٢(-٤ - ٣)$ = صفر

∴ ١ ≤ ر (أ) < ٣

، ∵ $\begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١ + ٢ = ٣ \neq$ صفر. ∴ ر (أ) = ٢

، ∵ $أ^* = \left(\begin{array}{ccc:c} ١ & -١ & ٢ & ٥ \\ ٢ & ١ & ١ & ٧ \\ ٣ & -٢ & ٥ & ٢٠ \end{array}\right)$ على النظم ٣ × ٤ وغير صفرية.

، ∵ $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٥ \\ ١ & ١ & ٧ \\ -٢ & ٢ & ٢٠ \end{vmatrix} = -١(٢٠ - ٣٥) - ٢(٢٠ + ١٤) + ٥(٥ + ٢) = -١٨ \neq$ صفر

∴ ر ($أ^*$) = ٣ ∴ ر (أ) ≠ ر ($أ^*$)

∴ نظام المعادلات لا يوجد له حل على الإطلاق.

(٣) $أ = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٣ & ٢ & -١٢ \\ ٤ & ١ & -١١ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٣ وغير صفرية.

، ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٣ & ٢ & -١٢ \\ ٤ & ١ & -١١ \end{vmatrix} = ٠$ لأن $ص_١ + ص_٢ = ص_٣$

∴ ١ ≤ ر (أ) < ٣ ، ∵ $\begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ + ٣ = ٥ \neq ٠$ ∴ ر (أ) = ٢

، ∵ $أ^* = \left(\begin{array}{ccc:c} ١ & -١ & ١ & ٧ \\ ٣ & ٢ & -١٢ & ١١ \\ ٤ & ١ & -١١ & ١٨ \end{array}\right)$ على النظم ٣ × ٤ وغير صفرية.

، ∵ $ص_١ + ص_٢ = ص_٣$ في المصفوفة $أ^*$ ∴ أي محدد من الدرجة (٣) ستنعدم قيمته.

∴ ١ ≤ ر ($أ^*$) < ٣ ، ∵ $\begin{vmatrix} ١ & -١ \\ -١٢ & ٢ \end{vmatrix} = ١٢ - ٢ = ١٠$ ∴ ر ($أ^*$) = ٢

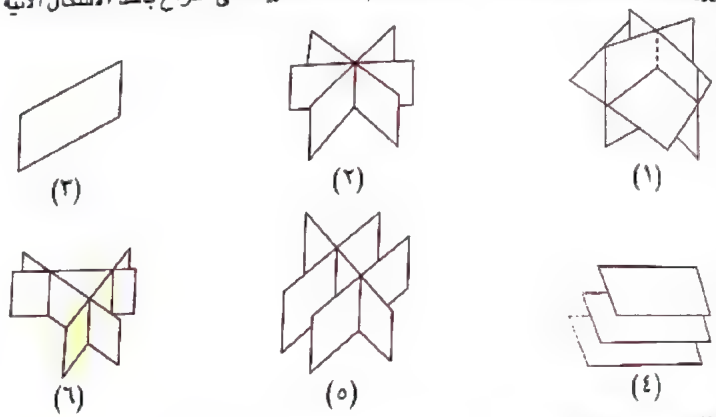
∴ ر (أ) = ر ($أ^*$) = ٢ < ٣ (عدد المجاهيل)

∴ نظام المعادلات له عدد لانهائي من الحلول.

ملاحظات

• المعنى الهندسي لنظام من ٣ معادلات خطية في ٣ مجاهيل

كل ثلاث معادلات خطية في ثلاث متغيرات يمثلهم ثلاث مستويات في الفراغ بأحد الأشكال الآتية :



(١) المستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة (النظام له حل وحيد)

(٢) المستويات الثلاثة تتقاطع في خط مستقيم واحد (النظام له عدد لانهائي من الحلول)

(٣) المستويات الثلاثة منطبقة (النظام له عدد لانهائي من الحلول)

(٤) الثلاث مستويات متوازية (النظام ليس له حل على الإطلاق)

(٥) مستوى يقطع مستويين متوازيين (النظام ليس له حل على الإطلاق)

(٦) المستويات تتقاطع مثنى مثنى ولا تتقاطع في نقطة واحدة (النظام ليس له حل على الإطلاق)

مثال ١٢

بين أن المعادلات : ٢ س − ص + ع = ٠ ، ٣ ص − ع = ٠ ، ٢ س + ٣ ص = ٠

لها فقط الحل الصفرى.

الحل

$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & -١ & ١ \\ ٠ & ٢ & -١ \\ ٢ & ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ وهى على النظم ٣ × ٣ وغير صفرية. ∴ ١ ≤ ر(أ) ≤ ٣

، ∵ $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ١ \\ ٠ & ٢ & -١ \\ ٢ & ٣ & ٠ \end{vmatrix}$ = ٣ (٠ + ٣) + ٢ (١ − ٣) = ٥ ≠ ٠ ∴ ر(أ) = ٣

، ∵ مجموعة المعادلات متجانسة ، ر(أ) = ٣ = عدد المجاهيل.

∴ المعادلات لها الحل الصفرى فقط.

وهو س = ٠ ، ص = ٠ ، ع = ٠

أى أن المستويات الثلاثة تتقاطع فى النقطة (٠ ، ٠ ، ٠)

مثال ١٣

بين أن النظام : ٣ س − ٢ ص + ع = ٠ ، ٣ ص − ع = ٠ ، ٢ س + ص = ٠

له حلول غير صفرية ، أوجد صورة هذا الحل.

الحل

∵ $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ٠ & ٣ & -١ \\ ٣ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٣ وغير صفرية.

∴ ١ ≤ ر(أ) ≤ ٣

، ∵ $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ٠ & ٣ & -١ \\ ٣ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$ = ٣ (٠ + ١) + ٣ (٢ − ٣) = صفر.

، ∵ $\begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٩ − ٠ = ٩ ≠ ٠ ∴ ر(أ) = ٢ < ٣ (عدد المجاهيل)

∵ مجموعة المعادلات متجانسة.

∴ النظام له عدد لانهائى من الحلول بينها الحل الصفرى ولإيجاد صورة الحل :

نضع س = ل وبالتعويض فى المعادلة الثالثة.

∴ ٢ ل + ص = ٠ ومنها ص = −٢ ل وبالتعويض فى المعادلة الثانية.

∴ −٩ ل − ع = ٠ ∴ ع = −٩ ل

∴ للنظام عدد لانهائى من الحلول على الصورة (ل ، −٢ ل ، −٩ ل)

مثال ١٥

أثبت أن مجموعة المعادلات الآتية لها حل وحيد وأوجده :

س + ٣ ص − ٢ ع = ٠ ، ٣ س − ٤ ص + ع = ٦ ، ٤ س + ص + ٥ ع = −٢

الحل

∵ $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٣ & -٤ & ١ \\ ٤ & ١ & ٥ \end{pmatrix}$

∴ $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٣ & -٤ & ١ \\ ٤ & ١ & ٥ \end{vmatrix}$ = ١ (−٢٠ − ١) − ٣ (١٥ − ٤) − ٢ (٣ + ١٦) = −٩٢ ≠ صفر

∴ ر(أ) = ٣ ، ∵ $\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc:c} ١ & ٣ & -٢ & ٠ \\ ٣ & -٤ & ١ & ٦ \\ ٤ & ١ & ٥ & -٢ \end{array}\right)$ على النظم ٣ × ٤

∴ ر(أ) = ر(أ*) = ٣ = عدد المجاهيل.

∴ مجموعة المعادلات لها حل وحيد على الصورة س = $\text{أ}^{-١}$ ب

، ∵ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -٢١ & -١١ & ١٩ \\ -١٧ & ١٣ & ١١ \\ -٥ & -٧ & -١٣ \end{pmatrix}$

∴ $\text{أ}^{-١}$ = $\begin{pmatrix} -٢١ & -١٧ & -٥ \\ -١١ & ١٣ & -٧ \\ ١٩ & ١١ & -١٣ \end{pmatrix}$

$$\because \text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}} = \frac{-1}{92}\begin{pmatrix} -21 & -17 & -5 \\ -11 & 13 & -7 \\ 19 & 11 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = \text{أ}^{-1}\text{ب} \qquad \therefore \text{س} = \frac{-1}{92}\begin{pmatrix} -21 & -17 & -5 \\ -11 & 13 & -7 \\ 19 & 11 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{-1}{92}\begin{pmatrix} -92 \\ 92 \\ 92 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س = ١ ، ص = −١ ، ع = −١

لاحظ أنه يمكن استخدام طريقة كرامر فى إيجاد الحل بدلاً من المعكوس الضربى للمصفوفة كالآتى.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -92 \text{ ، } \Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 6 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -92$$

$$\text{، } \Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 92 \text{ ، } \Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 92$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = 1 \text{ ، } \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = -1 \text{ ، } \text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = -1$$

مثال ١٦

أوجد قيمة الثابت ك الذى يجعل مجموعة المعادلات الآتية لها حل وحيد ثم أوجد هذا الحل باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة عندما ك = ١

س − ٢ ص + ع = ٢ ، ٣ س − ٥ ص + ٢ ع = ٥ ، ٤ س + ص + ك ع = −١

الحل

بكتابة مجموعة المعادلات على الصورة : أ س = ب

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & \text{ك} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\because \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & \text{ك} \end{vmatrix} = 1(-5\text{ك} - 2) + 2(3\text{ك} - 8) + 1(3 + 20)$$

$$= -5\text{ك} - 2 + 6\text{ك} - 16 + 23$$

$$= \text{ك} + 5$$

ملاحظة

أ* تكون على النظم ٣ × ٤ وعندما |أ| ≠ صفر فإن ر (أ*) = ٣

ولكى يكون لمجموعة المعادلات حل وحيد لابد أن ك + ٥ ≠ ٠ . أى : ك ≠ −٥

$\therefore$ لجميع قيم ك الحقيقية عدا ك = −٥ أى : ك ∈ ح − {−٥} يكون لمجموعة المعادلات حل وحيد.

وعند ك = ١ يكون :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ، } \because \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$\therefore$ ر (أ) = ر (أ*) = ٣ = عدد المجاهيل.

$\therefore$ لمجموعة المعادلات حل وحيد هو س = أ$^{-1}$ب

$$\text{أى : } \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\because \text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 23 \\ 3 & -3 & -9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 23 & -9 & 1 \end{pmatrix} \text{ ، } \because \text{أ}^{-1} = \frac{\text{أ}^{\text{مل}}}{|\text{أ}|}$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 23 & -9 & 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 23 & -9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س = ٠ ، ص = −١ ، ع = ٠

تمارين 12

على حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

اختبار تفاعلى

• فهم ○ تطبيق ∴ مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مرتبة مصفوفة الوحدة $I_{م}$ هى .....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

② مرتبة المصفوفة ☐ من النظم ٣ × ٣ هى .....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

③ من بين الأنظمة الخطية الآتية، مجموعة المعادلات المتجانسة هى .....

(أ) ٢ س + ص = ١ ، س + ٢ ص = ٤

(ب) س − ص = ٠ ، س + ٢ ص = ٥

(جـ) ٢ س + ص = ٣ ، ٢ س + ص = ٠

(د) س − ٢ ص = ٠ ، س + ص = ٠

④ إذا كان م عدد المعادلات الخطية ، ن عدد المجاهيل فإن المصفوفة الموسعة تكون على النظم .....

(أ) م × ن (ب) م × (ن + ١)

(جـ) (م + ١) × ن (د) (م + ١) (ن + ١)

⑤ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ٦ \end{pmatrix}$ فإن : ر (أ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑥ إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ١ & -٢ & -٣ \\ -٢ & ٤ & ٦ \\ ٣ & -٦ & -٩ \end{pmatrix}$ فإن : ر (أ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑦ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & -٣ \\ -٢ & -٤ & ٦ \\ ٣ & ٦ & -٩ \end{pmatrix}$ فإن : ر (أ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑧ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ -٢ & -٣ & ١ \\ ٦ & ٩ & -٣ \end{pmatrix}$ فإن : ر (أ^س) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑨ مرتبة المصفوفة الموسعة للنظام : س − ٢ ص = ٣ ، ٣ س − ٦ ص = ٩ هى .....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑩ إذا كان : $أ^{-١} = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ وكان : $أ \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ فإن : ص = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

⑪ إذا كان : $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

⑫ يوجد للنظام $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٤ & -٣ \\ ٤ & -٤ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = ☐$ .....

(أ) الحل البديهى فقط.

(ب) عدد لانهائى من الحلول بينها الحل الصفرى.

(جـ) عدد لانهائى من الحلول عدا الحل الصفرى.

(د) لايوجد حل على الإطلاق.

⑬ إذا كانت : أ مصفوفة من النظم م × ن فإن : .....

(أ) ر (أ) ≥ أصغر العددين م ، ن (ب) ر (أ) < أصغر العددين م ، ن

(جـ) ر (أ) ≤ أصغر العددين م ، ن (د) ر (أ) > أصغر العددين م ، ن

٢ اكتب نظام المعادلات الخطية الآتى على صورة معادلة مصفوفية :

① ٣ س − ٧ ص = ١٠ ، ٥ س + ٢ ص = ٣

② س + ٥ ص = ٢ ، ٣ س − ص = ٣ ، ٤ س + ص = ٤

③ ٢ س − ص + ع = ٥ ، ٢ س + ٣ ص − ع = −٢ ، ٩ س − ٢ ص − ٢ ع = ٩

④ ٦ س = ١ ، ص = −٢ ، −٣ ع = ٥

٣ بين أى نظام من أنظمة المعادلات الآتية يمثل نظام معادلات خطية متجانسة وأيها يمثل نظام معادلات خطية غير متجانسة :

(١) س + ٢ ص = ٠ ، س − ١ = ٠

(٢) ٢ س − ص = ٣ ، ٢ س − ص = ٠

(٣) ٣ س + ٢ ص − ٥ ع = ٠ ، ٥ س − ٣ ص + ٢ ع = ٤ ، س − ٢ ع = ٠

(٤) ٢ س + ٣ ص = ٥ ع ، ٣ س + ع = ٤ ص ، س + ع = ٠

(٥) س − ٢ = ٠ ، ص + ٣ = ٠ ، ع − ١ = ٠

٤ أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية :

(١) $\begin{pmatrix} ٣ & ٩ & -٨ \end{pmatrix}$ «١٠»

(٢) $\begin{pmatrix} ٥ \\ -١١ \\ ٧ \end{pmatrix}$ «١٠»

(٣) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ «صفر»

(٤) $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٧ \end{pmatrix}$ «١٠»

(٥) $\begin{pmatrix} ٣ & ٦ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ «١٠»

(٦) $\begin{pmatrix} ٠ & ٥ \\ ٠ & ٩ \end{pmatrix}$ «١٠»

(٧) $\begin{pmatrix} ٣ & ٣ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$ «٢٠»

(٨) $\begin{pmatrix} ٢ & ٧ & -٣ \\ ٣ & ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ «١٠»

(٩) $\begin{pmatrix} ١,٥ & ٣ & ٩ \\ ١ & ٢ & ٦ \end{pmatrix}$ «١٠»

(١٠) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٦ & -٢ \\ ٩ & ٣ \end{pmatrix}$ «٢٠»

(١١) $\begin{pmatrix} \text{جاهـ} & \text{جتاهـ} \\ -\text{جتاهـ} & \text{جاهـ} \end{pmatrix}$ «٢٠»

(١٢) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & ٣ \end{pmatrix}$ «٢٠»

(١٣) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & -٢ \\ ٦ & ٩ & ١٥ \end{pmatrix}$ «٢٠»

(١٤) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ «٢٠»

(١٥) $\begin{pmatrix} ٠ & -٣ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \\ -١ & -٢ & ٠ \end{pmatrix}$ «٢٠»

(١٦) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$ «١٠»

٥ أوجد مرتبة المصفوفة الموسعة لكل من أنظمة المعادلات الخطية الآتية :

(١) ٢ س − ص = ٣ ، ٦ س − ٣ ص = ٩ «١٠»

(٢) س − ٣ ص = ٥ ، ٣ ص − س = ١ «٢٠»

(٣) ٣ س + ٢ ص = ٤ ، ٢ س + ٣ ص = ٦ «٢٠»

(٤) ٣ س − ٥ ص = ٢ ، ٢ س + ٧ ص = ٩ ، ٤ س − ص = ٣ «٣٠»

(٥) س + ٢ ص = ٧ ، ٢ س − ص = ٤ ، ٣ س − ٢ ص = ٥ «٢٠»

(٦) ٢ س + ٢ ص − ع = ٤ ، س + ص + ع = ٣ ، س − ع = ٠ «٣٠»

(٧) س + ص + ع = ٩ ، ٢ س − ٣ ص + ٢ ع = ٣ ، ٣ س + ٢ ص − ٣ ع = −٣ «٣٠»

٦ إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ \text{ك} & ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ & -١ \end{pmatrix}$ وكان ر (أ) = ٢ أوجد قيمة : ك «$\frac{٦}{١٣}$»

٧ إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & -١ \\ ٢ & \text{ك} & ٠ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$ وكان ر (أ) = ٣

أوجد قيمة : ك الحقيقية. «ك ∈ ح − $\left\{\frac{٢٠}{٧}\right\}$»

٨ احسب مرتبة المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٢ & \text{ك} & -٢ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{pmatrix}$ لجميع قيم ك المختلفة.

٩ أوجد قيمة ك التى تجعل رتبة المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ١ \\ \text{ك} & ٤ & ١٠ \\ ١ & ٧ & ١٧ \end{pmatrix}$ أقل رتبة ممكنة. «صفر»

١٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد حلول النظام : ٢ س + ٥ ص = ٠ ، ٣ س − ع = ٠ ، ٢ ص − ٣ ع = ٠

هو .....

(أ) الحل الصفرى فقط. (ب) صفر

(جـ) عدد نهائى من الحلول عدا الحل الصفرى.

(د) عدد لانهائى من الحلول بينها الحل الصفرى.

(٢) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ك & ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{pmatrix}$ وكان ر (أ) = ٢ فإن : ك = ...

(أ) -٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٦

(٣) إذا كان للمعادلتين : ٢ س + ص = ١ ، ٤ س + ٢ ص = ك عدد لانهائى من الحلول فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٤) إذا كان للمعادلات : ٣ س - ٢ ص + ع = ٠ ، ٦ س - ٥ ص + ٢ ع = ٠ ، ٩ س - ٦ ص + ك ع = ٠ حلول خلاف الحل الصفرى فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

(٥) إذا كان للمعادلات : س + ٢ ص + ٣ ع = ٥ ، ٢ س - ٣ ص + ك ع = ١٢ ، ٣ س + ك ص + ٢ ع = ٣ حل وحيد فإن : ك ∈ .....

(أ) ح (ب) ح - {-١} (جـ) ح - {١٣} (د) ح - {-١ ، ١٣}

(٦) إذا كانت : أ مصفوفة غير منفردة فإن العبارة الخاطئة فما يلى هى .....

(أ) أ لها معكوس ضربى. (ب) ر (أ) = ر ($أ^{-١}$)

(جـ) |أ| = |$أ^{-١}$| (د) أ + $أ^{-١}$ = ☐

(٧) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت المصفوفة ($أ_{س ص}$) على النظم ٣ × ٣ حيث $أ_{س ص}$ = ٢ س - ص فإن مرتبة المصفوفة أ هى .....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(٨) نظام المعادلات : ٣ س + ص - ع = ٠ ، ٥ س + ٢ ص - ٣ ع = ٢ ، ١٥ س + ٦ ص + ٩ ع = ٥ .....

(أ) له حل وحيد. (ب) له عدد لا نهائى من الحلول.

(جـ) له ثلاثة حلول. (د) ليس له حل.

(٩) إذا كان $أ^*$ = $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٤ & ١ & ٢ \\ ١ & ٤ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٧ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$ فإن : ر (أ) + ر ($أ^*$) = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٢

(١٠) فى المعادلات الخطية الغير متجانسة فى ٣ متغيرات على الصورة أ س = ب حيث أ مصفوفة المعاملات إذا كان : ر (أ) = ر ($أ^*$) فإن للمعادلات .....

(أ) حل وحيد فقط. (ب) عدد لانهائى من الحلول.

(جـ) ليس لها حل. (د) (أ) أو (ب)

(١١) إذا كانت المعادلات الغير متجانسة فى ٣ متغيرات ليس لها حل على الإطلاق فإن المستويات الممثلة لهذه المعادلات فى الفراغ .....

(أ) الثلاثة مستويات تكون متوازية.

(ب) مستويان متوازيان والثالث قاطع لها.

(جـ) المستويات تتقاطع مثنى مثنى ولا تتقاطع فى نقطة واحدة.

(د) كل ما سبق صحيح.

(١٢) حل المعادلات المصفوفية الآتية :

(١) $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix}$

(٣) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & -١ \\ ٢ & ٢ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ -١ \end{pmatrix}$

(٤) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ١ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ \\ ٣ \\ ٠ \end{pmatrix}$

(١٣) ابحث باستخدام رتبة المصفوفة إمكانية حل مجموعات المعادلات الآتية واكتب الحل (أو صورته) إن وجد :

(١) س + ص = ٢ ، ٢ س + ٣ ص = ٥ «(١ ، ١)»

(٢) ٥ س − ص = −١١ ، ٣ ص − س = ٥

(٣) ٧ س − ٤ ص = ٩ ، ٤ ص − ٧ س = ١٢ «(−٢ ، ١)»

(٤) ص = س − ٥ ، س = ص + ٩ «لا يوجد حل»

(٥) ص = ٢ س − ٣ ، ٤ س − ٢ ص = ٦ «لا يوجد حل»

«عدد لا نهائى على الصورة (ل ، ٢ ل − ٣)»

١٣ أوجد قيمة ك التى تجعل لمجموعة المعادلات الآتية عدد لانهائى من الحلول :

(١) ك س + ٢ ص = ٦ ، س + ص = ٢

(٢) ك س + ٣ ص = ٥ ، ٢ س + (٤ ك − ٥) ص = ٥ «٢»

(٣) (ك + ١) س − ٢ ص = ٤ ، ك س + ٢ ص = ٨ «٢»

(٤) ٣ س + ٩ ص = ٢ (ك + ١) ، ٢ س + ٦ ص = ك + ٣ «لا يوجد» «٥»

١٤ ابحث إمكانية وجود حل خلاف الحل الصفرى لكل مما يأتى :

(١) س + ٢ ص = ٠ ، ٤ س = ٩ ص «لا يوجد»

(٢) س + ص = ٠ ، ٢ س − ٣ ص = ٠ «لا يوجد»

(٣) ٢ س + ٣ ص = ٠ ، ٦ ص + ٤ س = ٠ «يوجد»

١٥ بين أن للأنظمة الآتية حلًا صفريًا فقط :

(١) ٢ س + ٧ ص + ٣ ع = ٠ ، ٣ س + ص − ٢ ع = ٠ ، ٤ س − ٣ ص − ع = ٠

(٢) س − ٢ ص + ٢ ع = ٠ ، ٣ س + ٤ ع = ٠ ، ٦ ع − ص = ٠

(٣) س + ٢ ص − ع = ٠ ، ٢ س + ٣ ص − ع = ٠ ، ٣ س − ٤ ص + ٢ ع = ٠

١٦ بين أن للأنظمة الآتية عددًا لانهائيًا من الحلول واكتب صورة الحل :

(١) س + ٢ ص + ٣ ع = ٠ ، ٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ٠ ، ٣ س − ص + ٢ ع = ٠

(٢) ٢ س − ص + ٣ ع = ٠ ، ٤ س − ٢ ص + ٦ ع = ٠ ، س + ٢ ع = ٠

(٣) ٣ س − ٥ ص − ٢ ع = ٠ ، ٢ س + ص + ٣ ع = ٠ ، − س + ٣ ص + ٢ ع = ٠

١٧ ابحث إمكانية وجود حل خلاف الحل الصفرى لمجموعة المعادلات الخطية الآتية واكتب صورته أن وجد :

(١) س + ص + ٣ ع = ٠ ، س − ص + ع = ٠ ، س − ٢ ص = ٠

(٢) س + ٣ ص − ٢ ع = ٠ ، س − ٨ ص + ٨ ع = ٠ ، ٣ س − ٢ ص + ٤ ع = ٠

(٣) ٢ س − ٢ ص + ع = ٠ ، ٣ س − ص − ٢ ع = ٠ ، ٢ س − ٢ ص − ٣ ع = ٠

١٨ حل كلًا من أنظمة المعادلات الخطية الآتية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة :

(١) س + ص − ع = ١ ، ٢ س − ص + ٢ ع = ٣ ، ٣ س + ٢ ص − ٤ ع = ١

«١ ، ١ ، ١»

(٢) ٤ س + ص = ٠ ، س + ٢ ع = ١٥ ، ص − ٧ ع = ٠

«−١٠٥ ، ٤٢٠ ، ٦٠»

(٣) ٢ س + ٢ ص = ٨ ، ٣ ص + ٢ ع = ٩ ، ٣ ع + ٢ س = ١٣ «٢ ، ١ ، ٣»

(٤) ٢ س + ص − ٢ ع = ١٠ ، س + ٢ ص + ٢ ع = ١

، ٥ س + ٤ ص + ٣ ع = ٦

«$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١٠}{٣}$ ، −٣»

(٥) س − ٢ ص + ٢ ع = ٢ ، ٣ س + ٤ ع = ١٠ ، ٦ ع − ص = ٥

«٢ ، ١ ، ١»

(٦) $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} + \frac{١}{ع} = ١$ ، $\frac{١}{س} - \frac{١}{ص} + \frac{١}{ع} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} - \frac{٤}{ع} = \frac{٤}{٣}$

حيث س ، ص ، ع لا تساوى صفر. «٢ ، ٣ ، ٦»

(٧) $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} + \frac{١٠}{ع} = ٤$ ، $\frac{٤}{س} - \frac{٦}{ص} + \frac{٥}{ع} = ١$ ، $\frac{٦}{س} + \frac{٩}{ص} - \frac{٢٠}{ع} = ٢$

حيث س ، ص ، ع ≠ صفر. «٢ ، ٣ ، ٥»

١٩ ابحث إمكانية حل المعادلات الآتية واكتب الحل أو صورته أن وجد :

① س − ص + ع = ٢ ، ٢س + ٣ص − ع = ٥ ، ٣س − ٥ص + ٢ع = −١

② س + ٢ص + ع = ٣ ، ٤س − ص − ع = ٦ ، س + ص + ٣ع = ١٠

③ ٤س + ٣ص + ٢ع + ٧ = ٠ ، ٢س + ص − ٤ع + ١ = ٠ ، س − ٧ع − ٢ = ٠

④ $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ١ & -١ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٥ \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٩ \\ ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$

⑥ (دور أول ٢٠١٩) $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ & -٩ \\ -١ & ٢ & ٣ \\ -٣ & ٦ & ٩ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ -١ \end{pmatrix}$

٢٠ اكتب مصفوفة موسعة لنظام المعادلات الآتى، ثم حل هذا النظام باستخدام طريقة معكوس المصفوفة (إن أمكن) :

① ٢س + ص + ع = ٠ ، ٣س + ٢ص + ٣ع = ١٢ ، ٤س + ص + ٢ع = −١

② س + ٣ص + ٢ع = ٠ ، س + ع = −١ ، س + ٢ص = ٣

③ ٢س + ص + ٣ع = ٠ ، س + ص = −١ ، ص + ٢ع = ٣

④ ٤س + ٣ص − ٥ع = ٦ ، ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ ، س − ص + ع = ٢

٢١ ابحث إمكانية حل مجموعة المعادلات الآتية :

٤س + ٣ص − ٥ع = ٦ ، ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ ، ٥س − ٢ص − ٧ع = ١

ثم أوجد مجموعة حل هذه المعادلات باستخدام المعكوس الضربى. «{(٢ ، ١ ، ١)}»

٢٢ أثبت أن مجموعة المعادلات الآتية لها حل آخر غير الحل الصفرى واكتب الصورة العامة لهذا الحل :

٢س − ص + ٣ع = ٠ ، ٤س + ٥ص − ع = ٠ ، ٢س + ٣ص − ع = ٠

٢٣ احسب مرتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{pmatrix}$

ومن ثم أثبت أن مجموعة المعادلات : ٢س − ص − ٣ع = ٢ ، س + ٢ص + ع = ١ ، ٣س − ٥ص + ٢ع = ١٣ لها حل وحيد وأوجد ذلك الحل باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة. «٣ ، س = ٢ ، ص = −١ ، ع = ١»

٢٤ أوجد قيمة الثابت ك الذى يجعل لكل مجموعة من المعادلات الآتية حل وحيد وأوجد هذا الحل باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة عند ك = ١

① س + ٢ص − ع = ٣ ، س − ٣ص + ٤ع = ٢ك ، ٣س + ٢ص − ك ع = ٧

② س + ٥ص − ٢ع = ٤ ، ٢س + ص + ك ع = ٣ ، ٣س − ٢ص + ك ع = −٣

٢٥ أوجد قيمة ك التى تجعل للمعادلات :

ك س + ص + ع = ١ ، س + ك ص + ع = ١ ، س + ص + ك ع = ١

عددًا غير منته من الحلول. «١»

٢٦ أوجد قيمة الثابت ك بحيث يكون لمجموعة المعادلات الآتية :

ك س + ٢ص − ع + ٢ = ٠ ، ص − ٣ع + ٣ = ٠ ، ٢س + ص + ك ع − ١ = ٠

① حل وحيد.

② عدد لا نهائى من الحلول.

③ لا حل على الإطلاق. «ك ∈ ح − {٢ ، −٥} ، ك = ٢ ، ك = −٥»

مسائل تقيس مهارات التفكير

٢٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان أ ب حـ مثلث وكان س = $\begin{pmatrix} \text{جا أ} & \text{جا ب} & \text{جا حـ} \\ \text{جا أ} & \text{جا ب} & \text{جا حـ} \end{pmatrix}$

فإن : ر (س) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٢ إذا كان : أ = (أ$_{ص ع}$) حيث أ$_{ص ع}$ = ص ع حيث ص ، ع ∈ {١ ، ٢ ، ٣}

فإن : ر (أ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٣ مرتبة المصفوفة س = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ & ٥ \\ ٢ & -٤ & \text{أ} - ٤ \\ ١ & -٢ & \text{أ} + ١ \end{pmatrix}$ تساوى .....

(أ) صفر إذا كان أ = ٦ (ب) ١ إذا كان أ = -١

(جـ) ٣ إذا كان أ = ٢ (د) ١ إذا كان أ = -٦

٤ إذا كانت المصفوفة : ج = $\begin{pmatrix} -٢ & ١ & ٥ \\ \text{أ}^٢ - \text{ب} & ٠ & -\text{أ} \\ \text{ب} & ٠ & \text{ب}^٢ + \text{أ} \end{pmatrix}$ وكان : أ × ب = -٣

وكان مرتبة المصفوفة ج يساوى ٢

فإن : أ^٦ + ب^٦ = ...

(أ) ٩ (ب) ١٨ (جـ) ٢٧ (د) ٣٦

٥ إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{١٣} \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} \text{ب}_{١١} & \text{ب}_{٢١} & \text{ب}_{٣١} \end{pmatrix}$ حيث أ$_{ص ع}$ ≠ ٠ ، ب$_{ص ع}$ ≠ ٠

فإن : ر (أب) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

ثانيًا الهندسة الفراغية

الوحدة 1 الهندسة والقياس فى ثلاثة أبعاد.

الوحدة 2 الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ.

الوحدة 1

الهندسة والقياس فى ثلاثة أبعاد

الدرس 1 النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد.

الدرس 2 المتجهات فى الفراغ.

الدرس 3 الضرب القياسى لمتجهين.

الدرس 4 الضرب الاتجاهى والثلاثى القياسى.

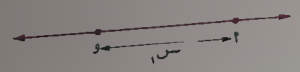
يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

الدرس 1 النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

• **تحديد موضع جسيم على خط مستقيم (نظام أحادى البعد) :**

لتحديد موضع جسيم على خط مستقيم معلوم بالنسبة لنقطة اختيارية ثابتة عليه تسمى بنقطة الأصل يلزم معرفة بُعد هذا الجسيم عن هذه النقطة.

ففى الشكل المقابل :

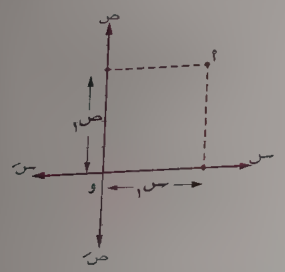


و أ = س١ ، س١ ∈ ح

• **تحديد موضع جسيم فى مستوى (نظام إحداثى ثنائى الأبعاد) :**

لتحديد موضع جسيم فى مستوى يلزم معرفة مسقط هذا الجسيم على كل من محورى إحداثيات متعامدة فى هذا المستوى.

ففى الشكل المقابل :



أ = (س١ ، ص١) ∈ ح٢

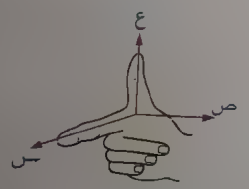
حيث المستقيم $\overleftrightarrow{\text{س س َ}}$ يمثل محور السينات

، المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ص ص َ}}$ يمثل محور الصادات

والمحوران متعامدان ويتقاطعان فى نقطة الأصل و

• **تحديد موضع جسيم فى الفراغ (نظام إحداثى ثلاثى الأبعاد) ح٣ :**

بفرض ثلاثة مستقيمات $\overleftrightarrow{\text{س و س َ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص و ص َ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع و ع َ}}$ فى الفراغ متقاطعة فى نقطة «و» ومتعامدة مثنى مثنى بحيث تكون نظام إحداثى متعامد حسب قاعدة اليد اليمنى الموضحة بالشكل المقابل



حيث تستخدم وضعية الأصابع الموضحة ليشير السبابة إلى الاتجاه الموجب للمحور س والوسطى إلى الاتجاه الموجب للمحور ص والإبهام إلى الاتجاه الموجب للمحور ع

فتتعين إحداثيات النقطة أ

فى الفراغ بالثلاثى المرتب أ (س١ ، ص١ ، ع١) ∈ ح٣

ومنها فإن النقاط :

ب (س١ ، ٠ ، ٠) ، حـ (٠ ، ص١ ، ٠)

، ء (٠ ، ٠ ، ع١)

هى مساقط النقطة أ على المحاور الثلاثة س ، ص ، ع على الترتيب.

• مستويات الإحداثيات :

المستوى الإحداثى س ص	المستوى الإحداثى س ع	المستوى الإحداثى ص ع
يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (س ، ص ، ٠) وتكون معادلته ع = ٠	يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (س ، ٠ ، ع) وتكون معادلته ص = ٠	يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (٠ ، ص ، ع) وتكون معادلته س = ٠

ملاحظة

معادلة المستوى الذى يحوى جميع نقط الفراغ التى على الصورة
- (س ، ص ، أ) ← س ص ← وهى ← ع = أ
- (س ، أ ، ع) ← س ع ← وهى ← ص = أ
- (أ ، ص ، ع) ← ص ع ← وهى ← س = أ

هى معادلة مستوى يوازى المستوى

حيث أ ثابت ∈ ح

مثال ①

عين موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثى متعامد ثلاثى الأبعاد :

① أ (٣ ، ٢ ، ٣)

② ب (-٤ ، ٤ ، -٢)

③ حـ (-٢ ، ٤ ، ٠)

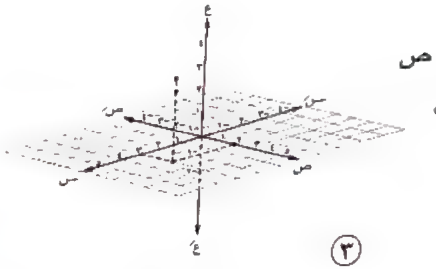
الحل

① لتعيين النقطة أ (٣ ، ٢ ، ٣)

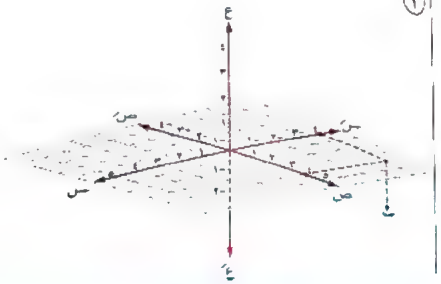
نحدد النقطة (٣ ، ٢) فى المستوى س ص

ثم نتحرك ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب

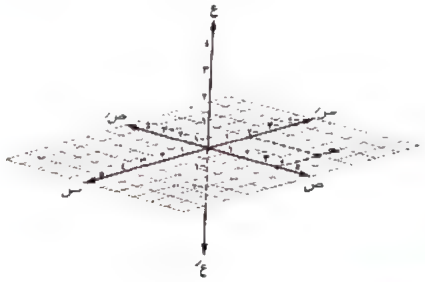
للمحور ع



②



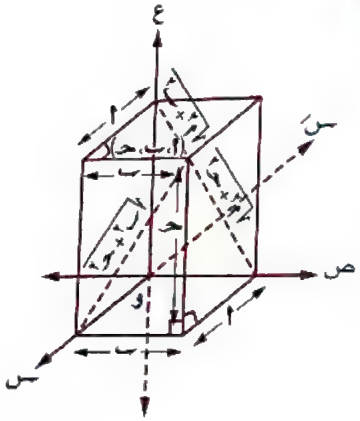
③



بعد نقطة فى الفراغ عن محاور الإحداثيات.

• بُعد النقطة (أ ، ب ، حـ)

- عن المحور س = √(ب٢ + حـ٢)
- عن المحور ص = √(أ٢ + حـ٢)
- عن المحور ع = √(أ٢ + ب٢)



ملاحظات

- النقطة (س ، ٠ ، ٠) تقع على المحور س
- النقطة (٠ ، ص ، ٠) تقع على المحور ص
- النقطة (٠ ، ٠ ، ع) تقع على المحور ع
- النقطة أ (س₁ ، ص₁ ، ع₁)

← تبعد |س₁| وحدة طول عن المستوى ص ع

← تبعد |ص₁| وحدة طول عن المستوى س ع

← تبعد |ع₁| وحدة طول عن المستوى س ص

فمثلاً :

النقطة أ (٥ ، −٤ ، ٣) تبعد ٥ وحدات طول عن المستوى ص ع

، ٤ وحدات طول عن المستوى س ع ، ٣ وحدات طول عن المستوى س ص

- المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{س س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ص}}$ يعينان المستوى س ص
- المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{س س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ع}}$ يعينان المستوى س ع
- ، المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{ص ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ع}}$ يعينان المستوى ص ع
- معادلة محور س فى الفراغ هى : ص = ٠ ، ع = ٠
- معادلة محور ص فى الفراغ هى : س = ٠ ، ع = ٠
- معادلة محور ع فى الفراغ هى : س = ٠ ، ص = ٠

مثال ١

أوجد إحداثيات النقطة أ فى كل من الحالات الآتية :

① أ (٢ + م ، ٣ − م ، م) ∈ المستوى س ع

② أ (٣ ل ، ل + ٣ ، ٥ ل) ∈ المحور ص

③ أ (٢ + ك ، ٤ ك ، − ك) تبعُد ٥ وحدات طول عن المستوى ص ع

④ أ (٤ م ، ٣ م ، م + ١) تبعُد ٥ وحدات عن محور ع

الحل

① ∵ أ (٢ + م ، ٣ − م ، م) ∈ المستوى س ع

∴ ٣ − م = ٠ ∴ م = ٣ ∴ أ (٥ ، ٠ ، ٣)

② ∵ أ (٣ ل ، ل + ٣ ، ٥ ل) ∈ المحور ص

∴ ٣ ل = ٥ ل = ٠ ∴ ل = ٠ ∴ أ (٠ ، ٣ ، ٠)

③ ∵ أ (٢ + ك ، ٤ ك ، − ك) تبعُد ٥ وحدات طول عن المستوى ص ع

∴ ٢ + ك = ٥ ∴ ك = ٣ ∴ أ (٥ ، ١٢ ، −٣)

أو ٢ + ك = −٥ ∴ ك = −٧ ∴ أ (−٥ ، −٢٨ ، ٧)

④ ∵ $\sqrt{(٤ م)^٢ + (٣ م)^٢}$ = ٥

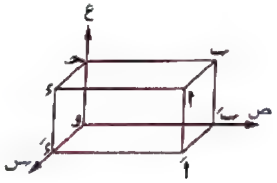
∴ ١٦ م² + ٩ م² = ٢٥ ∴ ٢٥ م² = ٥² ∴ م² = ١

∴ م = ± ١

∴ أ (٤ ، ٣ ، ٢) أو أ (−٤ ، −٣ ، ٠)

مثال ٢

فى الشكل المقابل :



أ ب ج د أَ ب َ ج َ د َ متوازى مستطيلات فيه : أ (٣ ، ٧ ، ٥)

أوجد : ① إحداثيات النقط : ب ، ب َ ، ج ، د ، ج َ ، د َ ، أَ

② حجم متوازى المستطيلات.

الحـــل

① ب (٠ ، ٧ ، ٥) «لاحظ أن : ب ∈ المستوى ص ع»

، ب (٠ ، ٧ ، ٠) «لاحظ أن : ب ∈ محور ص»

، حـ (٠ ، ٠ ، ٥) «لاحظ أن : حـ ∈ محور ع»

، ء (٣ ، ٠ ، ٥) «لاحظ أن : ء ∈ المستوى س ع»

، ء (٣ ، ٠ ، ٠) «لاحظ أن : ء ∈ محور س»

، أ (٣ ، ٧ ، ٠) «لاحظ أن : أ ∈ المستوى س ص»

② حجم متوازى المستطيلات = ٣ × ٧ × ٥ = ١٠٥ وحدة مكعبة.

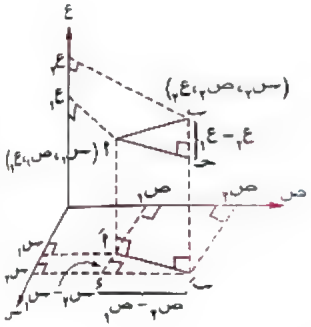
البعد بين نقطتين فى الفراغ

سبق لك دراسة البُعد بين نقطتين :

أ (س$_١$ ، ص$_١$) ، ب (س$_٢$ ، ص$_٢$)

فى المستوى الإحداثى ثنائى البعد حيث :

$$أب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$



أما إذا كانت النقطتان أ ، ب فى الفراغ ثلاثى الأبعاد

حيث : أ (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) ، ب (س$_٢$ ، ص$_٢$ ، ع$_٢$)

فإن البعد بين النقطتين أ ، ب يعطى بالعلاقة :

$$أب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$$

فمثلًا : إذا كانت : أ (٢ ، −٣ ، ٥) ، ب (٤ ، ١ ، −١)

فإن : $أب = \sqrt{(٢ - ٤)^٢ + (-٣ - ١)^٢ + (٥ + ١)^٢} = ٢\sqrt{١٤}$ وحدة طول.

مثال ٤

إذا كان : أ (٦ ، ٠ ، ٣) ، ب (٧ ، ١ ، ٧) ، حـ (٩ ، ٣ ، ١٥)

أثبت أن : أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

الحـــل

$أب = \sqrt{(٦ - ٧)^٢ + (٠ - ١)^٢ + (٣ - ٧)^٢} = ٣\sqrt{٢}$ وحدة طول.

، $بحـ = \sqrt{(٧ - ٩)^٢ + (١ - ٣)^٢ + (٧ - ١٥)^٢} = ٦\sqrt{٢}$ وحدة طول.

، $أحـ = \sqrt{(٦ - ٩)^٢ + (٠ - ٣)^٢ + (٣ - ١٥)^٢} = ٩\sqrt{٢}$ وحدة طول.

∴ أحـ = أب + بحـ

∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

مثال ٥

أثبت أن : النقط أ (٥ ، ٦ ، ٣) ، ب (٥ ، ٢ ، ٧) ، حـ (١ ، ٦ ، ٧)

هى رؤوس لمثلث متساوى الأضلاع وأوجد مساحته.

الحـــل

$أب = \sqrt{(٥ - ٥)^٢ + (٦ - ٢)^٢ + (٣ - ٧)^٢} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول.

، $بحـ = \sqrt{(٥ - ١)^٢ + (٢ - ٦)^٢ + (٧ - ٧)^٢} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول.

، $أحـ = \sqrt{(٥ - ١)^٢ + (٦ - ٦)^٢ + (٣ - ٧)^٢} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول.

∴ أ ، ب ، حـ هى رؤوس مثلث متساوى الأضلاع.

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢} \times ٤\sqrt{٢} \times ٤\sqrt{٢}$ جا ٦٠° = $٨\sqrt{٣}$ وحدة مربعة.

مثال ٦

أثبت أن : Δ أ ب حـ حيث أ (٤ ، ١ ، ٥) ، ب (−٤ ، ٣ ، ١) ، حـ (−٢ ، ٥ ، ١) منفرج الزاوية فى حـ

الحل

(أ ب)^{٢} = (٤ + ٤)^{٢} + (١ − ٣)^{٢} + (٥ − ١)^{٢} = ٨٤

، (ب حـ)^{٢} = (−٤ + ٢)^{٢} + (٣ − ٥)^{٢} + (١ − ١)^{٢} = ٨

، (أ حـ)^{٢} = (٤ + ٢)^{٢} + (١ − ٥)^{٢} + (٥ − ١)^{٢} = ٦٨

، ∵ (أ ب)^{٢} > (أ حـ)^{٢} + (ب حـ)^{٢}

∴ Δ أ ب حـ منفرج الزاوية فى حـ

تذكر أن :

فى المثلث أ ب حـ إذا كان :

- (أ ب)^{٢} = (ب حـ)^{٢} + (أ حـ)^{٢} فإن ∠ حـ قائمة.
- (أ ب)^{٢} > (ب حـ)^{٢} + (أ حـ)^{٢} فإن ∠ حـ منفرجة.
- (أ ب)^{٢} < (ب حـ)^{٢} + (أ حـ)^{٢} فإن ∠ حـ حادة.

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة

إذا كان : أ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ، ع$_{١}$) ، ب (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$ ، ع$_{٢}$) نقطتين فى الفراغ

فإن إحداثيات نقطة حـ التى تقع فى منتصف $\overline{أب}$ هى :

حـ = $\left(\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢} ، \frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢} ، \frac{ع_{١} + ع_{٢}}{٢}\right)$

فمثلًا : إذا كان : أ (٥ ، −٤ ، ٠) ، ب (١ ، ٨ ، ٤)

فإن إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$ = (٣ ، ٢ ، ٢)

مثال ٧

إذا كانت : حـ (٣ ، ٢ ، −١) هى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٤ ، ٣ ، −١)

أوجد : إحداثيات نقطة ب

الحل

بفرض أن إحداثيات نقطة ب هى (س ، ص ، ع)

∵ حـ منتصف $\overline{أب}$ ∴ (٣ ، ٢ ، −١) = $\left(\frac{٤ + س}{٢} ، \frac{٣ + ص}{٢} ، \frac{−١ + ع}{٢}\right)$

∴ ٤ + س = ٦ ∴ س = ٢

، ٣ + ص = ٤ ∴ ص = ١

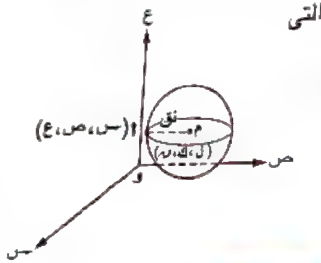
، −١ + ع = −٢ ∴ ع = −١

∴ ب (٢ ، ١ ، −١)

معادلة الكرة فى الفراغ

تعريف

الكرة هى مجموعة نقط الفراغ التى تبعد عن نقطة ثابتة (تعرف بمركز الكرة) بعدًا ثابتًا (يعرف بطول نصف قطر الكرة)



وبفرض النقطة أ (س ، ص ، ع) تقع على سطح الكرة التى مركزها النقطة م (ل ، ك ، ن) وطول نصف قطرها نق

فإنه من تعريف الكرة ومن قانون البُعد بين نقطتين فإن :

$\sqrt{(س − ل)^{٢} + (ص − ك)^{٢} + (ع − ن)^{٢}}$ = نق

وبتربيع الطرفين :

∴ (س − ل)^{٢} + (ص − ك)^{٢} + (ع − ن)^{٢} = نق^{٢}

وهذه هى الصورة القياسية لمعادلة الكرة.

تذكر أن :

- مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}
- حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

الصورة العامة لمعادلة الكرة

- سبق لك دراسة معادلة الدائرة فى المستوى : $(س - ء)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

حيث (ء ، هـ) مركز الدائرة ونق طول نصف قطرها وكانت لها الصورة العامة :

$س^٢ + ص^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠$ ومنها كان مركز الدائرة (− ل ، − ك)

وطول نصف قطرها نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - حـ}$

- بالمثل يوجد أيضًا الصورة العامة لمعادلة الكرة فى الفراغ والتى يمكن استنتاجها من الصورة القياسية الموضحة سابقًا فتكون الصورة العامة :

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + ٢ ن ع + ء = ٠$ ومنها فإن مركز الكرة

هو (− ل ، − ك ، − ن) أى ($-\frac{١}{٢}$ معامل س ، $-\frac{١}{٢}$ معامل ص ، $-\frac{١}{٢}$ معامل ع)

وذلك بشرط أن معامل كل من $س^٢$ ، $ص^٢$ ، $ع^٢$ هو الواحد الصحيح

ومنها أيضًا فإن طول نصف قطر الكرة نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ء}$

مثال ٨

أوجد الصورة القياسية لمعادلة الكرة فى كل من الحالات الآتية :

① مركزها النقطة (٢ ، −١ ، ١) وطول نصف قطرها ٥ وحدات طول.

② مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ وحدات طول.

③ النقطتين أ (٢ ، −٣ ، ٥) ، ب (٤ ، ٣ ، ١) هما طرفا قطر فيها.

الحل

① الصورة القياسية لمعادلة الكرة هى : $(س - ٢)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ١)^٢ = ٢٥$

② الصورة القياسية لمعادلة الكرة هى : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٩$

③ مركز الكرة م = منتصف $\overline{أب}$ = $(\frac{٢ + ٤}{٢} ، \frac{-٣ + ٣}{٢} ، \frac{٥ + ١}{٢}) = (٣ ، ٠ ، ٣)$

، نق = أ م = $\sqrt{(٢ - ٣)^٢ + (-٣ - ٠)^٢ + (٥ - ٣)^٢} = \sqrt{١٤}$ وحدة طول

∴ الصورة القياسية لمعادلة الكرة هى $(س - ٣)^٢ + (ص - ٠)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ١٤$

أى أن : $(س - ٣)^٢ + ص^٢ + (ع - ٣)^٢ = ١٤$

معلومة إثرائية

* معادلة الكرة بمعلومية طرفى قطر فيها :

إذا كان : $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$ هما طرفى قطر فى الكرة

فإن معادلتها تكون على الصورة :

$(س - س_١)(س - س_٢) + (ص - ص_١)(ص - ص_٢) + (ع - ع_١)(ع - ع_٢) = ٠$

ويمكن استخدام ذلك فى حل الفرعية ③ من المثال السابق كالتالى :

معادلة الكرة فى الصورة العامة هى :

$(س - ٢)(س - ٤) + (ص + ٣)(ص - ٣) + (ع - ٥)(ع - ١) = ٠$

أى أن : $س^٢ - ٦ س + ٨ + ص^٢ - ٩ + ع^٢ - ٦ ع + ٥ = ٠$

∴ $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٦ س - ٦ ع + ٤ = ٠$

∴ $(س - ٣)^٢ + ص^٢ + (ع - ٣)^٢ = ١٤$

مثال ٩

عين مركز وطول نصف قطر الكرة التى معادلتها :

① $(س - ٥)^٢ + (ص + ٤)^٢ + (ع + ٢)^٢ = ٢٥$ وأوجد مساحة سطحها.

② $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٦$ وأوجد حجمها.

الحل

① ∵ المعادلة على الصورة القياسية.

∴ مركز الكرة (٥ ، −٤ ، −٢) وطول نصف قطرها ٥ وحدات طول.

∴ مساحة سطحها = ٤π نق^٢ = $٤ \times \pi \times ٢٥ = ١٠٠ \pi$ وحدة مربعة.

② ∵ المعادلة على الصورة القياسية.

∴ مركز الكرة هى نقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠) وطول نصف قطرها ٤ وحدات طول.

∴ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = $\frac{٤}{٣}$ π × ٤^{٣} = $\frac{٢٥٦}{٣}$ π وحدة حجم.

مثال ⑩

عين مركز وطول نصف قطر الكرة التى معادلتها :

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ س − ٤ ص + ٦ ع + ١٢ = ٠

الحل

∵ معادلة الكرة هى : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ س − ٤ ص + ٦ ع + ١٢ = ٠

∴ مركز الكرة (−١ ، ٢ ، −٣)

، طول نصف قطرها نق = $\sqrt{(-١)^{٢} + (٢)^{٢} + (-٣)^{٢} - ١٢}$ = $\sqrt{٢}$ وحدة طول.

حل آخر : نكتب المعادلة على الصورة القياسية وذلك باستخدام إكمال المربع.

(س^{٢} + ٢ س + ①) + (ص^{٢} − ٤ ص + ④)

+ (ع^{٢} + ٦ ع + ⑨) − (① + ④ + ⑨) + ١٢ = ٠

∴ (س + ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} + (ع + ٣)^{٢} = ٢

وهى الصورة القياسية لمعادلة الكرة.

∴ مركز الكرة (−١ ، ٢ ، −٣) وطول نصف قطرها $\sqrt{٢}$ وحدة طول.

تذكر أن :

لجعل المقدار س^{٢} + ب س مقدار ثلاثى مربع كامل نضيف إليه مربع نصف معامل س أى $\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$

ملاحظات

فى المعادلة العامة للكرة يكون :

* معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = معامل ع^{٢} ≠ صفر
* ل^{٢} + ك^{٢} + ن^{٢} − ء > صفر
* المعادلة خالية من الحدود التى تشتمل على س ص أ، ص ع أ، س ع

الكرة التى مركزها نقطة الأصل والنقطة (أ ، ب ، حـ) تقع عليها

* يكون طول نصف قطرها نق = $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢}}$
* تكون معادلتها فى الصورة القياسية : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢}

مثال ⑪

أوجد الصورة القياسية لمعادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل والنقطة (٥ ، −٢ ، ٣) تقع عليها.

الحل

المعادلة هى : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٥^{٢} + (−٢)^{٢} + ٣^{٢}

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٣٨

الكرة التى يقع مركزها على أحد المحاور وتمس المستوى المار بالمحورين الآخرين

* إذا كان المركز يقع على المحور س والكرة تمس المستوى ص ع فإن إحداثيات المركز (أ ، ٠ ، ٠) وطول نصف القطر = |أ|
* إذا كان المركز يقع على المحور ص والكرة تمس المستوى س ع فإن إحداثيات المركز (٠ ، ب ، ٠) وطول نصف القطر = |ب|
* إذا كان المركز يقع على المحور ع والكرة تمس المستوى س ص فإن إحداثيات المركز (٠ ، ٠ ، حـ) وطول نصف القطر = |حـ|

مثال ⑫

أوجد معادلة الكرة التى يقع مركزها على المحور ص وتمس المستوى س ع ومركزها يبعُد عن ٤ وحدات طولية.

الحل

* طول نصف قطر الكرة = ٤ وحدات طولية.
* مركز الكرة : إما (٠ ، ٤ ، ٠) أ، (٠ ، −٤ ، ٠)

∴ هناك كرتان معادلتاهما :

س^{٢} + (ص − ٤)^{٢} + ع^{٢} = ١٦ أ، س^{٢} + (ص + ٤)^{٢} + ع^{٢} = ١٦

الكرة التى مركزها النقطة (أ ، ب ، حـ) وتمس أحد مستويات الإحداثيات

* إذا كانت تمس المستوى س ص فإن طول نصف قطرها |حـ|
* إذا كانت تمس المستوى س ع فإن طول نصف قطرها |ب|
* إذا كانت تمس المستوى ص ع فإن طول نصف قطرها |أ|

مثال ١٣

أوجد معادلة الكرة التى مركزها (-٥ ، ١ ، -٢) وتمس المستوى الإحداثى س ص

الحل

∵ الكرة مركزها (-٥ ، ١ ، -٢) وتمس المستوى س ص

∴ نق = |-٢| = ٢ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هى : $(س + ٥)^٢ + (ص - ١)^٢ + (ع + ٢)^٢ = ٤$

الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات وطول نصف قطرها نق

* يكون مركزها هو النقطة (± نق ، ± نق ، ± نق)

مثال ١٤

أوجد معادلة الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات وإحداثيات مركزها موجبة وطول نصف قطرها ٣ وحدات طول.

الحل

مركز الكرة هو النقطة (٣ ، ٣ ، ٣) ، نق = ٣

∴ معادلة الكرة هى : $(س - ٣)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٩$

ملاحظة

إذا كانت : م ، ن كرتين طولا نصفى قطريهما $نق_١$ ، $نق_٢$ على الترتيب (حيث $نق_١ > نق_٢$)

إذا كانت الكرتان م ، ن	فإن
(١) متباعدتين	م ن > $نق_١ + نق_٢$
(٢) متماستين من الخارج	م ن = $نق_١ + نق_٢$
(٣) متقاطعتين	$نق_١ - نق_٢$ < م ن < $نق_١ + نق_٢$
(٤) متماستين من الداخل	م ن = $نق_١ - نق_٢$
(٥) إحداهما بداخل الأخرى	م ن < $نق_١ - نق_٢$
(٦) متحدتى المركز	م ن = صفر

مثال ١٥

إذا كانت الكرتان : $(س - ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ١٠٠$

، $(س + ١)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ك)^٢ = ٩$ متماستين أوجد : ك

الحل

بالنسبة للكرة الأولى : مركزها $م_١ = (٣ ، ١ ، ٢)$ ، طول نصف قطرها ١٠ وحدات طولية.

بالنسبة للكرة الثانية : مركزها $م_٢ = (-١ ، ٤ ، ك)$ ، طول نصف قطرها ٣ وحدات طولية.

، $م_١ م_٢ = \sqrt{(٣ + ١)^٢ + (١ - ٤)^٢ + (٢ - ك)^٢} = \sqrt{٢٥ + (٢ - ك)^٢}$

∵ الكرتين متماستان.

∴ إما $م_١ م_٢ = ١٠ + ٣ = ١٣$ (متماستان من الخارج)

∴ $\sqrt{٢٥ + (٢ - ك)^٢} = ١٣$ ∴ $٢٥ + (٢ - ك)^٢ = ١٦٩$

∴ $(٢ - ك)^٢ = ١٤٤$ ∴ $٢ - ك = \pm ١٢$

∴ ك = ١٤ أو -١٠

أ، م، م، = ١٠ − ٣ = ٧ (متماستان من الداخل)

∴ $\sqrt{٢٥ + (٢ - ك)^{٢}}$ = ٧ ∴ ٢٥ + (٢ − ك)^{٢} = ٤٩

∴ (٢ − ك)^{٢} = ٢٤ ∴ ٢ − ك = ± ٢ $\sqrt{٦}$

∴ ك = ٢ + ٢ $\sqrt{٦}$ أو ٢ − ٢ $\sqrt{٦}$

مثال (١٦)

أوجد معادلة الكرة التى تمس الأجزاء الموجبة من محاور الإحداثيات وطول قطرها ١٠ $\sqrt{٢}$ وحدة طولية.

الحل

نفرض أن مركز الكرة (أ ، ب ، حـ)

∴ نق = $\frac{١٠ \sqrt{٢}}{٢}$ = ٥ $\sqrt{٢}$ وحدة طولية.

∵ الكرة تمس الأجزاء الموجبة من محاور الإحداثيات.

∴ أ = ب = حـ = $\frac{٥ \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = ٥

∴ مركز الكرة = (٥ ، ٥ ، ٥)

∴ معادلة الكرة هى :

(س − ٥)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} + (ع − ٥)^{٢} = ٥٠

لاحظ أنه

الكرة التى مركزها (أ ، ب ، حـ) وتمس محاور الإحداثيات الثلاثة ، طول نصف قطرها نق يكون :

* بعد المركز عن محور س = $\sqrt{ب^{٢} + حـ^{٢}}$ = نق
* بعد المركز عن محور ص = $\sqrt{أ^{٢} + حـ^{٢}}$ = نق
* بعد المركز عن محور ع = $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$ = نق

∴ $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$ = $\sqrt{أ^{٢} + حـ^{٢}}$ = $\sqrt{ب^{٢} + حـ^{٢}}$

ومنها نجد أن :

|أ| = |ب| = |حـ| ، نق = |أ| $\sqrt{٢}$

مثال (١٧)

أوجد معادلة أصغر كرة تمر بالنقط (٥ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٥ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٥)

الحل

∵ النقط (٥ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٥ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٥)

هى رؤوس مثلث متساوى الأضلاع

طول ضلعه = ٥ $\sqrt{٢}$

∴ نصف قطر الدائرة المارة بهذه النقط = $\frac{٥ \sqrt{٢}}{٢ \text{ جا } ٦٠°}$ = $\frac{٥ \sqrt{٦}}{٣}$

، مركزها ($\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$)

∴ معادلة أصغر كرة هى :

(س − $\frac{٥}{٣}$)^{٢} + (ص − $\frac{٥}{٣}$)^{٢} + (ع − $\frac{٥}{٣}$)^{٢} = $\frac{٥٠}{٣}$

لاحظ أنه

لكى تحصل على أصغر كرة تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فإن هذه النقط لابد وأن تقع على أكبر دائرة على الكرة ويكون لها نفس مركز الكرة ونفس نصف قطرها

وإذا كونت النقاط الثلاثة مثلثًا متساوى الأضلاع ولتكن رؤوسه (أ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، أ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، أ)

∴ المركز = ($\frac{أ + ٠ + ٠}{٣}$ ، $\frac{٠ + أ + ٠}{٣}$ ، $\frac{٠ + ٠ + أ}{٣}$)

= ($\frac{أ}{٣}$ ، $\frac{أ}{٣}$ ، $\frac{أ}{٣}$) وطول ضلع المثلث = |أ| $\sqrt{٢}$

∴ طول نصف قطر الدائرة = $\frac{|أ| \sqrt{٢}}{٢ \text{ جا } ٦٠°}$ = $\frac{|أ| \sqrt{٦}}{٣}$

الدرس 1 على النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

اختبار تفاعلى

• فهم ○ تطبيق ♣ مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولاً تمارين على النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

١ عين موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثى متعامد ثلاثى الأبعاد :

(١) أ (٣ ، ٤ ، ٥) (٢) ب (−٣ ، ٢ ، ٥)

٢ 📖 أوجد البُعد بين النقطتين أ ب فى كل مما يأتى :

(١) أ (٧ ، ٠ ، ٤) ، ب (١ ، ٠ ، ٠)

(٢) أ (٤ ، ١ ، ٩) ، ب (٢ ، ١ ، ٦)

(٣) أ (١ ، ١ ، −٧) ، ب (−٢ ، −٣ ، −٧)

٣ أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث :

(١) 📖 أ (١ ، −٣ ، ٢) ، ب (٤ ، −١ ، ٤)

(٢) أ (٢ ، ٥ ، −٢) ، ء (−٦ ، ٣ ، ٤) =

(٣) 📖 أ (−٣ ، ٥ ، ٥) ، ب (−٦ ، ٤ ، ٨) =

(٤) أ (٥ ، ١ ، ٦) ، ب (٤ ، ٢ ، ١) =

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) النقطة أ (٢ ، −٣ ، ٠) تقع .....

(أ) على المحور ع (ب) فى المستوى ص ع

(جـ) فى المستوى س ص (د) على المحور س

(٢) النقطة (٢ ، ٠ ، ٠) تقع .....

(أ) على محور ص (ب) على محور ع

(جـ) على محور س (د) فى المستوى ص ع

(٣) بُعد النقطة أ (٢ ، −٣ ، ٥) عن المستوى الإحداثى س ع يساوى ..... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٥

(٤) البُعد بين النقطة (أ ، ب ، جـ) ومحور ص يساوى .....

(أ) $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2}$ (ب) $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ (جـ) $\sqrt{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2}$ (د) $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}$

(٥) طول العمود المرسوم من النقطة (−٥ ، −٣ ، ٤) على محور س = ... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ١٠

(٦) إذا كانت النقطة (س ، ص ، ع) تقع فى المستوى الإحداثى س ع فإن .....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) ع = ٠ (د) س + ص = ٠

(٧) 📖 مستويا الإحداثيات س ص ، ص ع يتقاطعان فى .....

(أ) نقطة الأصل. (ب) محور س (جـ) محور ص (د) محور ع

(٨) مستويات الإحداثيات س ص ، س ع ، ص ع تتقاطع معًا فى .....

(أ) نقطة الأصل. (ب) محور س (جـ) محور ص (د) محور ع

(٩) 📖 المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{س س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ع}}$ يكونان مستوى الإحداثيات الذى معادلته .....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) ع = ٠ (د) ص = ٢

(١٠) معادلة محور ع فى الفراغ هى .....

(أ) س = ٠ ، ص = ٠ (ب) س = ٠ ، ع = ٠

(جـ) ص = ٠ ، ع = ٠ (د) س = ٠

(١١) 📖 إحداثيات نقطة منتصف القطعة $\overline{\text{ء هـ}}$ حيث ء (٢ ، ٣ ، ٣) ، هـ (٦ ، −١ ، −٤) هى .....

(أ) (٤ ، ٢ ، $3\frac{1}{2}$) (ب) (٢ ، ١ ، $\frac{1}{2}$)

(جـ) (٤ ، ١ ، $-\frac{1}{2}$) (د) (٤ ، ١ ، $\frac{1}{2}$)

(١٢) إذا كان : (أ ، ب ، حـ) منتصف $\overline{ءهـ}$ حيث ء (-٤ ، ٠ ، ٥) ، هـ (-٢ ، ٤ ، -١٣)

فإن : أ + ب + حـ = ...

(أ) -٥ (ب) -٦ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٣) إذا كانت نقطة منتصف $\overline{أب}$ تقع فى المستوى الإحداثى س ع وكانت :

أ (-٣ ، ١٢ + ك ، ٥) ، ب (١ ، ٣ ك ، -٢) فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) -٣ (جـ) -٢ (د) ١

(١٤) إذا كان : أ (٧ ، -١ ، ٨) ، ب (١١ ، ٢ ، -٤)

فإن : طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طول.

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(١٥) النقطة (٢ ، ٠ ، -٣) تقع فى مستوى الإحداثيات الذى معادلته .....

(أ) ع = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) س = ٠ (د) س + ص = -١

(١٦) إذا كانت النقطة (٢ أ ، أ + ٣ ، ٥) تقع فى مستوى الإحداثيات س ع فإن بُعدها عن المستوى الإحداثى ص ع يساوى ..... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) صفر

(١٧) إذا كانت النقطة (أ - ٢ ، ٥ ، أ - ٤) تُبعد عن المستوى ص ع خمسة وحدات طولية وتُبعد عن المستوى س ص ثلاثة وحدات طولية فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ٧ أ ، -٣

(١٨) إذا كانت : (٥ ، ٦ ، -٣) هى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٣ ، -١ ، ٥)

فإن : ب = ...

(أ) (٤ ، $\frac{٥}{٢}$ ، ١) (ب) (٧ ، ١٣ ، -١١)

(جـ) (-٢ ، -٧ ، ٨) (د) (٣ ، ٢ ، ١٣)

(١٩) بُعد النقطة (-٣ ، ٤ ، ٥) عن نقطة الأصل = ... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ٥ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

(٢٠) إذا كان : أ (-٤ ، -٢ ، ٣) ، ب (١ ، ٢ ، ك) وكان طول $\overline{أب}$ = $\sqrt{٧٧}$

فإن : ك = ...

(أ) -٣ أ ، ٦ (ب) -٣ أ ، ١٢ (جـ) ٩ أ ، ٦ (د) ٩ أ ، -٣

(٢١) جميع نقط الفراغ التى على الصورة (س ، ٥ ، ع) تقع فى المستوى الذى معادلته .....

(أ) س = ٥ (ب) ص = ٥ (جـ) ع = ٠ (د) ص = ٠

(٢٢) إذا كانت النقط أ (٦ ، ٠ ، ٣) ، ب (٧ ، ١ ، ٧) ، حـ (٩ ، ٣ ، ١٥) تقع على استقامة واحدة فإن : أ تقسم $\overline{بحـ}$ بنسبة .....

(أ) ٣ : ١ من الداخل. (ب) ١ : ٣ من الخارج.

(جـ) ٢ : ٣ من الداخل. (د) ١ : ٢ من الخارج.

(٢٣) إذا كانت النقطة (ك ، ٣ ، -٥) تقع على أبعاد متساوية من المحورين س ، ص

فإن : ك = ...

(أ) ± ٢ (ب) ± ٣ (جـ) ± ٤ (د) ± ٥

(٢٤) إذا كان منتصف $\overline{أب}$ ∈ محور س حيث أ (٢ ، ١٢ + ك ، ك) ، ب (٤ ، م ، ٨ - م)

فإن : ك - ٣ م = ...

(أ) ٤ (ب) -٤ (جـ) -٢ (د) -١٠

(٢٥) النقطة أ (٣ ، -٥ ، ١) فى الفراغ فإن مجموع أبعادها عن مستويات الإحداثيات الثلاثة = ... وحدة طول.

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٩ (د) ٣٥

(٢٦) صورة النقطة (-٢ ، ٣ ، ٤) بالانعكاس فى محور ع هى .....

(أ) (-٢ ، ٣ ، ٤) (ب) (٢ ، ٣ ، ٤)

(جـ) (٢ ، -٣ ، -٤) (د) (٢ ، -٣ ، ٤)

(٢٧) إذا كان : م (١ ، ٢ ، ٣) ، ن (٤ ، ٢ ، ٣) ، هـ (١ ، ٦ ، ٣) إحداثيات نقط منتصفات كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ على الترتيب فإن محيط Δ أ ب حـ يساوى ..... وحدة طول.

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ٢٤

(٢٨) إذا كانت ل ، م ، ن هى مساقط الأعمدة المرسومة من النقطة أ (٣ ، ٤ ، ٥) على المحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن : م = ...

(أ) (٣ ، ٠ ، ٥) (ب) (٠ ، ٤ ، ٠)

(جـ) (٠ ، ٤ ، ٥) (د) (٠ ، −٤ ، ٠)

(٢٩) إذا كانت : ل ، م ، ن هى مساقط الأعمدة المرسومة من النقطة أ (٣ ، ٤ ، ٥) على المستويات س ص ، ص ع ، س ع على الترتيب فإن : ل = ...

(أ) (−٣ ، −٤ ، ٠) (ب) (٠ ، ٤ ، ٥)

(جـ) (٣ ، ٤ ، ٠) (د) (٣ ، ٠ ، ٠)

(٣٠) إذا كانت النقطة هـ على أبعاد متساوية من النقط : و (٠ ، ٠ ، ٠) ، أ (ل ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، م ، ٠) ، حـ (٠ ، ٠ ، ن) فإن النقطة هـ = ...

(أ) (ل ، م ، ن) (ب) $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-م}{٢} ، \frac{-ن}{٢}\right)$

(جـ) (−ل ، −م ، −ن) (د) $\left(\frac{ل}{٢} ، \frac{م}{٢} ، \frac{ن}{٢}\right)$

(٣١) النقطة التى تقع على محور الصادات وتبعد مسافة $\sqrt{١٠}$ وحدة طول عن النقطة (١ ، ٢ ، ٣) هى .....

(أ) (٠ ، −٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ٢ ، ٠)

(جـ) (٠ ، ٤ ، ٠) (د) (٠ ، −٤ ، ٠)

(٣٢) إذا كانت أ (٦ ، −٢ ، ٤) ، ب (٢ ، ٤ ، −٨) ، حـ (−٢ ، ٢ ، ٤) هى ثلاث رؤوس متتالية لمتوازى الأضلاع أ ب حـ ء فإن : ء = ...

(أ) $\left(٢ ، \frac{٤}{٣} ، ٠\right)$ (ب) (−٢ ، ٤ ، −١٦)

(جـ) (٢ ، −٤ ، ١٦) (د) (١ ، −٢ ، ٨)

(٣٣) إذا كانت : أ (٣ ، −٤ ، ٠) ، ب (١٥ ، ٠ ، ٢) ، حـ (٠ ، −٨ ، ٤) ثلاث نقط فى الفراغ وهى رؤوس المثلث أ ب حـ فإن بعد المركز الهندسى للمثلث عن المستوى الإحداثى س ع يكون .....

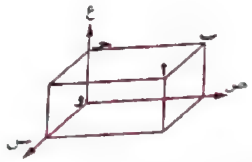
(أ) أكبر من بعده عن المستوى س ص

(ب) أصغر من أو يساوى بعده عن المستوى س ص

(جـ) أكبر من بعده عن المستوى ص ع

(د) أكبر من أو يساوى بعده عن المستوى ص ع

(٣٤) الشكل المقابل يمثل متوازى مستطيلات :



أ (٥ ، ٨ ، ٤) فإن :

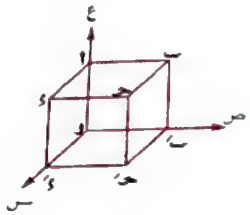
أولًا : إحداثيات النقطة ب هى .....

(أ) (٤ ، ٨ ، ٠) (ب) (٠ ، ٨ ، ٤) (جـ) (٥ ، ٨ ، ٠) (د) (٥ ، ٠ ، ٤)

ثانيًا : إحداثيات النقطة حـ هى .....

(أ) (٠ ، ٠ ، ٠) (ب) (٠ ، ٠ ، ٤) (جـ) (٥ ، ٠ ، ٤) (د) (٠ ، ٨ ، ٠)

(٣٥) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء و ب َ حـ َ ء َ مكعب

طول حرفه ٥ وحدات مكعبة فإن :

أولًا : إحداثيات النقطة حـ هى .....

(أ) (٥ ، ٥ ، ٠) (ب) (٥ ، ٥ ، ٥) (جـ) (٠ ، ٠ ، ٥) (د) (٠ ، ٥ ، ٠)

ثانيًا : إحداثيات النقطة ء َ هى .....

(أ) (٠ ، ٠ ، ٥) (ب) (٥ ، ٥ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٥ ، ٥) (د) (٥ ، ٠ ، ٠)

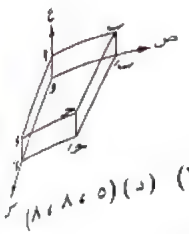
ثالثًا : طول قطر المكعب = ... وحدة طول.

(أ) $٥\sqrt{٢}$ (ب) $٥\sqrt{٣}$ (جـ) ٥ (د) $٥\sqrt{٦}$

(٣٦) في الشكل المقابل :

متوازى مستطيلات فيه :

حَ (٥ ، ٨ ، ٠) ، ع (٥ ، ٠ ، ٣) فإن :



أولًا : إحداثيات نقطة حـ .....

(أ) (٥ ، ٨ ، ٠) (ب) (٥ ، ٣ ، ٨) (جـ) (٥ ، ٨ ، ٣) (د) (٥ ، ٨ ، ٨)

ثانيًا : حجم متوازى المستطيلات ..... وحدة مكعبة.

(أ) ٦٤ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٤٤ (د) ١٥٠

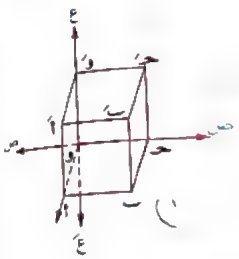
ثالثًا : معادلة المستوى و ب حَ ءَ هى .....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) ع = ٠ (د) ع = ٣

رابعًا : معادلة المستوى ءَ ءَ حَ حـ هى .....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) س = ٥ (د) ع = ٣

٥ الشكل المقابل يمثل مكعبًا حجمه ٢٧ وحدة مكعبة أحد رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل. أوجد إحداثيات باقى الرؤوس.



٦ أوجد إحداثيات النقطة أ في كل من الحالات الآتية :

(١) أ (١ - ك ، ٢ ك ، ٣ + ك) تقع فى المستوى س ص

(٢) أ (٠ ، م - ٣ ، م + ٤) تقع على المحور ع

(٣) أ (ن - ١ ، ن + ٤ ، ٥ ن) تقع فى المستوى ص = ٥

(٤) أ (ل + ٥ ، ٢ ل ، ل) تبعد ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة طولية عن المحور س

(٥) أ (م ، ٢ م - ن ، م + ن + ٣) ∈ محور س

٧ أثبت أن كل مجموعة من النقط التالية تقع على استقامة واحدة :

(١) أ (٧ ، ١ ، ٤) ، ب (٨ ، ٢ ، ٨) ، حـ (١٠ ، ٤ ، ١٦)

(٢) أ (٢ ، -١ ، ٥) ، ب (٦ ، ٠ ، ٦) ، حـ (١٤ ، ٢ ، ٨)

٨ أثبت أن : النقط أ (١ ، ٢ ، ٥) ، ب (٢ ، ٥ ، ٣) ، حـ (-١ ، ٣ ، ٢) هى رؤوس مثلث متساوى الأضلاع وأوجد مساحته. «$\frac{٧\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة»

٩ أثبت أن النقط أ ، ب ، حـ هى رؤوس مثلث قائم وأوجد مساحته حيث :

(١) أ (٠ ، ٠ ، ٠) ، ب (٤ ، -٥ ، ٢) ، حـ (١ ، ٢ ، ٣)

(٢) أ (٢ ، -١ ، ٣) ، ب (-٤ ، ٤ ، ٢) ، حـ (-٢ ، ٥ ، ١)

١٠ أثبت أن : المثلث الذى رؤوسه النقط أ (٧ ، ١ ، ٣) ، ب (٥ ، ٣ ، ٤) ، حـ (٣ ، ٥ ، ٣) هو مثلث متساوى الساقين.

١١ أثبت أن : النقط أ (٧ ، ١ ، ٣) ، ب (٥ ، ٣ ، ك) ، حـ (٣ ، ٥ ، ٣) تكون مثلثًا متساوى الساقين لجميع قيم ك الحقيقية ، ثم أوجد : قيم ك الحقيقية التى تجعل المثلث متساوى الأضلاع. «٣ ± ٢ $\sqrt{٦}$»

١٢ إذا كانت : حـ (٥ ، ٥ ، ٩) هى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٤ ، -١ ، ٣) أوجد : ب «(٦ ، ١١ ، ١٥)»

١٣ إذا كانت : حـ (-١ ، ٤ ، ٠) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث ب (٤ ، -٢ ، ١) أوجد : إحداثيات النقطة أ «(-٦ ، ١٠ ، -١)»

١٤ إذا كانت : حـ (-١ ، ٦ ، -٥) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (ك - ٢ ، -١ ، م + ٣) ، ب (٢ ، ن - ٧ ، -٢) فأوجد قيمة : ك + م - ن «-٣٢»

١٥ أوجد محيط المثلث الناتج من توصيل منتصفات أضلاع Δ أ ب حـ حيث : أ (٢ ، ٥ ، -١) ، ب (٦ ، -٣ ، ٣) ، حـ (-٤ ، ٧ ، ١) «١٥,٤»

١٦ إذا كانت : أ ∈ محور س ، ب ∈ محور ص ، حـ ∈ محور ع
وكانت النقطة (١ ، -١ ، صفر) منتصف $\overline{أب}$ ، والنقطة (٠ ، -١ ، ٢) منتصف $\overline{بحـ}$
أوجد : إحداثيات منتصف $\overline{أحـ}$

١٧ إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ء أربعة نقاط فى مستوى واحد أثبت أن :
① أ(٠ ، ٤ ، ١) ، ب(٢ ، ٣ ، -١) ، حـ(٤ ، ٥ ، ٠) ، ء(٢ ، ٦ ، ٢)
هى رؤوس مربع.
② أ(٥ ، -١ ، ١) ، ب(٧ ، -٤ ، ٧) ، حـ(١ ، -٦ ، ١٠) ، ء(-١ ، -٣ ، ٤)
هى رؤوس معين.

١٨ إذا كانت : ء ، هـ ، و هى منتصفات أضلاع Δ أ ب حـ وهى $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب حيث : ء(١ ، ٢ ، ٦) ، هـ(٠ ، ٣ ، ٢) ، و(٢ ، ٠ ، -٢)
أوجد : إحداثيات رؤوس Δ أ ب حـ

ثانيًا تمارين على معادلة الكرة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① معادلة الكرة التى مركزها (٢ ، -٣ ، ٥) وطول نصف قطرها ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة طول هى .....
(أ) $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع + ٥)^٢ = ٢\sqrt{٥}$
(ب) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٢٠$
(جـ) $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٥)^٢ = ٢٠$
(د) $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٥)^٢ = ٢\sqrt{٥}$

② معادلة الكرة التى مركزها (-٢ ، ١ ، -٤) وطول نصف قطرها ٢٥ هى .....
(أ) $(س + ٢)^٢ + (ص - ١)^٢ + (ع + ٤)^٢ = ٥$
(ب) $(س - ٢)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ٦٢٥$
(جـ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٤س - ٢ص + ٨ع - ٦٢٥ = ٠$
(د) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٤س - ٢ص + ٨ع - ٦٠٤ = ٠$

③ معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات هى .....
(أ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٣$
(ب) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٩$
(جـ) $(س - ٣)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٩$
(د) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٩ = ٠$

④ معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣ ، -١ ، ٢) هى .....
(أ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٤$
(ب) $(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ١٤$
(جـ) $(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٢)^٢ = \sqrt{١٤}$
(د) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٤$

⑤ (دور أول ٢٠١٨) معادلة الكرة التى مركزها النقطة (٢ ، -٣ ، ٤) وتمس المستوى الإحداثى س ص هى .....
(أ) $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ٤$
(ب) $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ٩$
(جـ) $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ١٦$
(د) $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع + ٤)^٢ = ١٦$

⑥ مركز الكرة التى معادلتها : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢س - ٤ص + ٦ع - ١٦ = ٠$ هو .....
(أ) (١ ، ١ ، ١) (ب) (٢ ، -٤ ، ٦)
(جـ) (-١ ، ٢ ، -٣) (د) (-٢ ، ٤ ، -٦)

⑦ النقطة أ = (٣ ، ٢ ، ١) تقع ..... الكرة التى معادلتها :
$س^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ١)^٢ = ٤$
(أ) على (ب) داخل (جـ) خارج (د) فى مركز

(٨) طول نصف قطر الكرة : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ س − ٦ ص + ١٠ ع − ١ = صفر يساوى ..... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٩) (دور ثان ٢٠١٧) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤ س − ٦ ص + ٨ ع + ٤ = ٠ معادلة كرة طول قطرها = ... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

(١٠) إذا كانت $\overline{أب}$ قطر فى الكرة التى معادلتها (س − ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} + (ع − ١)^{٢} = ١١ وكانت إحداثيات أ (٨ ، −١ ، ٢) فإن إحداثيات نقطة ب هى .....

(أ) (٥ ، −٢ ، ١) (ب) (١٠ ، −٤ ، ٥)

(جـ) (٢ ، −٣ ، ٠) (د) (١٠ ، ٣ ، ٦)

(١١) معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتقطع جزءًا طوله ٥ وحدات من الجزء الموجب للمحور س هى .....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢٥ = ٠ (ب) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢٥ = ٠

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ١٠٠ = ٠ (د) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − $\sqrt{٥}$ = ٠

(١٢) إذا كانت نقطة الأصل تقع على الكرة التى مركزها (−١ ، ٢ ، ٢) فإن معادلتها .....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ س + ٤ ص + ٤ ع = −٣

(ب) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ س − ٤ ص − ٤ ع = ٣

(جـ) (س + ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} + (ع − ٢)^{٢} + ٩ = ٠

(د) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ س − ٤ ص − ٤ ع = ٠

(١٣) معادلة الكرة التى مركزها النقطة (١ ، −٣ ، −١) وتمر بالنقطة (−٢ ، −١ ، −١) هى .....

(أ) (س + ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ١٣

(ب) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ س + ٦ ص + ٢ ع − ١٣ = ٠

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ س + ٦ ص + ٢ ع = ٢

(د) (س − ١)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = $\sqrt{١٣}$

(١٤) معادلة الكرة التى قطرها $\overline{أب}$ حيث أ (٧ ، ١ ، −٤) ، ب (٣ ، −١ ، ٢) هى .....

(أ) (س − ٧)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع + ٤)^{٢} = ٢٨

(ب) (س − ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٢)^{٢} = ١٤

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ١٠ س + ٢ ع − ١٤ = ٠

(د) (س − ٥)^{٢} + (ع + ١)^{٢} + ص^{٢} = ١٤

(١٥) طول نصف قطر الكرة التى معادلتها (س − ٢)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} + (ع − ٥)^{٢} = ٦٤ يساوى ..... وحدة طول.

(أ) ٦٤ (ب) ٣ $\sqrt{٥}$ (جـ) ٨ (د) ٥

(١٦) مساحة الكرة التى معادلتها س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢٥ = ٠ تساوى ..... وحدة مساحة.

(أ) ٢٠ π (ب) ٤٠ π (جـ) ٢٥ π (د) ١٠٠ π

(١٧) حجم الكرة التى معادلتها س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٤ س − ٨ ص − ١٠ ع − ٣٦ = ٠ يساوى ..... وحدة حجم.

(أ) ٣٢٤ π (ب) ٣٦ π (جـ) ٧٨٢ π (د) ٩٧٢ π

(١٨) إذا كانت النقطة (−٢ ، ٤ ، م) تقع على الكرة (س + ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٢٥ فإن : م = ...

(أ) ٧ (ب) ٤ (جـ) ٧ أ، −١ (د) ٤ أ، −١

(١٩) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت النقطة (٧ ، −٢ ، ٢) تقع على سطح الكرة التى معادلتها (س − ٤)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ك^{٢} فإن : |ك| = ...

(أ) ٣ (ب) ٣ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢٧ (د) $\sqrt{٣}$

(٢٠) مركز الكرة التى يكون فيها النقط أ (٣ ، −٣ ، ٢) ، ب (٥ ، −١ ، ٢) طرفى قطر فيها هو .....

(أ) (٨ ، −٤ ، ٤) (ب) (٤ ، −٢ ، ٠)

(جـ) (٤ ، −٢ ، ٢) (د) (−٢ ، −٢ ، ٠)

(٢١) معادلة الكرة التى مركزها (٢ ، −١ ، ٤) ومساحتها ١٠٠ π وحدة مربعة هى .....

(أ) (س + ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع + ٤)^{٢} = ٢٥

(ب) (س − ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ٢٥

(جـ) (س − ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ١٠٠

(د) (س − ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ٥

(٢٢) مساحة أكبر دائرة مرسومة على سطح الكرة التى مركزها النقطة (٥ ، ٠ ، −١) وتمر بالنقطة (٧ ، ١ ، −٤) تساوى ..... وحدة مربعة.

(أ) ٢٥ π (ب) ٤٩ π (جـ) ١٦ π (د) ١٤ π

(٢٣) معادلة كرة مركزها م (٤ ، −٦ ، −٥) ، وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول هى س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + أ س + ب ص + جـ ع + ء = ٠

فإن : أ + ب + جـ + ء = ...

(أ) ١٨ (ب) ٧٣ (جـ) ٨٧ (د) ٣٠٤

(٢٤) الكرة المحصورة بين المستويين ع = −١ ، ع = ٥ ومركزها (٢ ، −١ ، ك)

فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٥) مركز الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات الموجبة وطول نصف قطرها ٥ وحدات هو .....

(أ) (٠ ، ٠ ، ٠) (ب) (٥ ، ٥ ، ٥) (جـ) (٥ ، ٠ ، ٠) (د) (٠ ، ٥ ، ٥)

(٢٦) مركز الكرة س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ ع = ٠ يقع .....

(أ) على المحور س (ب) فى المستوى ع = ٠

(جـ) على المحور ص (د) على المحور ع

(٢٧) إذا كانت : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ س + ٤ ص − ٤ ع + ك = ٠ معادلة كرة فإن : ك يمكن أن تكون .....

(أ) ٩ (ب) ١٨ (جـ) ٥ (د) ١٠

(٢٨) الكرة (س − ٣)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ٢٥ تمس .....

(أ) المحور س (ب) المستوى الإحداثى س ص

(جـ) المستوى الإحداثى س ع (د) المحور ص

(٢٩) أى مما يأتى يمثل معادلة كرة مركزها يقع على المحور ع وتمس المستوى الإحداثى س ص ؟

(أ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٢٥ (ب) س^{٢} − ١٠ س + ص^{٢} + ع^{٢} = ٠

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ١٠ ع = ٢٥ (د) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ١٠ ع = ٠

(٣٠) كرة مركزها (٢ ، ٣ ، ٤) تمس محور السينات فإن معادلة الكرة .....

(أ) (س − ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ١٥

(ب) (س − ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ٥

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٤ س − ٦ ص − ٨ ع + ٤ = ٠

(د) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢٥ = ٠

(٣١) إذا كانت : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٤ ك س + ٤ ص − ٨ ع + ك = ٠ معادلة كرة طول نصف قطرها ٥ وحدات طول فإن : ك = ...

(أ) $\frac{-٥}{٤}$ أ ، ١ (ب) $\frac{٥}{٤}$ أ ، −١ (جـ) −$\frac{١}{٤}$ أ ، $\frac{٥}{٤}$ (د) ١ أ ، −١

(٣٢) إذا كان محور الصادات يقطع الكرة التى مركزها (٣ ، −٤ ، ١٢) وطول نصف قطرها ١٣ سم فى النقطتين أ ، ب فإن : أب يساوى ..... وحدة طول.

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٣ (د) ٢٦

(٣٣) الكرتان اللتان معادلاتهما : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ س − ٢ ص + ٢ ع − ١ = ٠ ، (س − ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} + ع^{٢} = ٤ تكونان .....

(أ) متماستين من الخارج. (ب) متماستين من الداخل.

(جـ) متقاطعتين. (د) متباعدتين.

(٣٤) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت : م١ ، م٢ كرتين متماستين من الداخل ، وكان :
م١ (-٣ ، ٢ ، -٦√٢) ، نق١ = ٨ وحدة طول ، م٢ (-٢ ، ١ ، -٥√٢)
فإن : نق٢ = ... وحدة طول ، حيث نق١ > نق٢

(أ) ٥ (ب) ٢ (جـ) ٧ (د) ٦

∴ (٣٥) أصغر مسافة بين النقطة (٣ ، ٥ ، ١) وسطح الكرة
(س - ١)² + (ص - ٢)² + (ع + ٥)² = ٢٥ تساوى .....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

∴ (٣٦) نقطة فى الفراغ ثلاثى الأبعاد تبعد عن كل من مستويات الإحداثيات الثلاثة نفس المسافة (أ) وحدة طول أى مما يأتى صحيح ؟

(أ) النقطة هى : (أ ، أ ، أ)

(ب) يوجد ٨ نقاط تحقق ذلك تقع على رؤوس مكعب حجمه (٨ أ³) وحدة مكعبة.

(جـ) هذه النقطة هى مركز الكرة التى تمس محاور الإحداثيات وطول نصف قطرها أ وحدة طول.

(د) جميع هذه النقط تقع على سطح كرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها أ وحدة طول.

∴ (٣٧) كرة تمس المستويات س ص ، ص ع ، س ع وتمر بالنقطة (١ ، -٤ ، ٥)
فإن طول نصف قطرها يمكن أن يكون ..... وحدة طول.

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

٢ أوجد معادلة الكرة التى :

(١) مركزها النقطة (٢ ، -١ ، ٤) وطول نصف قطرها ٢ وحدات.

(٢) مركزها النقطة (٤ ، -٢ ، ٣) وطول قطرها ٢√٥

(٣) مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها √٧ وحدة طول.

(٤) (٣ ، ٤ ، -٣) ، (٠ ، ٢ ، ١) نهايتا قطر فيها.

(٥) أ (٢ ، ٣ ، -٥) ، ب (-٤ ، -١ ، ٣) طرفا قطر فيها.

(٦) مركزها النقطة (١ ، -٦ ، ١) وتمر بالنقطة (٢ ، -١ ، ٥)

(٧) مركزها النقطة (-١ ، ٢ ، -٢) وتمر بنقطة الأصل.

(٨) مركزها النقطة (-٢ ، -٥ ، ٣) وتمس المستوى س ص

(٩) مركزها النقطة (٠ ، ٤ ، ٠) وتمس المستوى الإحداثى س ع

(١٠) تكون متحدة المركز مع الكرة التى معادلتها :
س² + ص² + ع² - ٦ س + ٢ ص - ٤ ع = ٢ وطول نصف قطرها ضعف نصف قطر الكرة المعطاة.

(١١) طول نصف قطرها ٣ وحدات وتمس مستويات الإحداثيات علمًا بأن إحداثيات المركز موجبة.

٣ عين مركز وطول نصف قطر الكرة التى معادلتها :

(١) (س - ٣)² + (ص - ٥)² + (ع + ٢)² - ٢٥ = صفر وأوجد حجمها.

(٢) س² + ص² + ع² = ١٨

(٣) س² + ص² + ع² + ٤ س - ٢ ص - ٦ ع + ١١ = ٠

(٤) س² + ص² + ع² = ٦ ع

(٥) ٢ س² + ٣ ص² + ٣ ع² - ٣ س - ٩ ص - ٦ ع + ٣ = ٠ وأوجد مساحة سطحها.

(٦) س² + ص² + ع² - ٢ س + ٤ ص = ٠

٤ إذا كان : أب قطر فى الكرة التى معادلتها :
س² + ص² + ع² - ٤ س + ٢ ص - ٦ ع - ٦٧ = ٠ حيث أ (-٦ ، ٣ ، ٢)
أوجد : إحداثيات نقطة ب
«(١٠ ، -٥ ، ٤)»

٥ أى تمثل المعادلة : س² + ص² + ع² + أ س + ب ص + حـ ع - ء = ٠
معادلة كرة حيث أ ، ب ، حـ ، ء ∈ ح ؟

٦ إذا كان : $(س - ٢)^٢ + (ص + ٤)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ١$ ، $(س + ٤)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ٤$ معادلتا كرتين
أوجد البُعد بين مركزى الكرتين وبيِّن أن الكرتين غير متقاطعتين. ١٠٠ وحدات

٧ إذا كانت الكرتان $(س - ٣)^٢ + ص^٢ + (ع - ٣)^٢ = ١٦$ ، $(س + ١)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ك)^٢ = ٢٥$ متماستين
فأوجد : قيمة ك ١٠٠ أو ٢٠

٨ أوجد معادلة الكرة التى :
① يقع مركزها على المحور ع ويبعد ٣ وحدات عن المستوى الإحداثى س ص وطول نصف قطرها وحدتان طول.
② تمس مستوى إحداثى ومركزها (٣ ، ٠ ، ٠)
③ تمس المستوى الإحداثى ص ع ومركزها (-٣ ، ٣ ، ٤)
④ مركزها (-٣ ، -٢ ، ٥) وتمس مستويات الإحداثيات س ع ، ص ع
⑤ مركزها النقطة (٣ ، -٢ ، ٤) وتمس المستوى الإحداثى الذى معادلته ع = ٢
⑥ تمر بالنقط أ(-٥ ، -٤ ، ١) ، ب(٣ ، ٤ ، -٥) ، جـ(٠ ، ٠ ، ٤) ، ء(٠ ، ٠ ، ٠)
⑦ تمر بالنقاط (٤ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٤ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٤) ويكون طول نصف قطرها أصغر ما يمكن.
⑧ تمس المستويات س ع ، س ص ، ص ع فى النقط أ ، ب ، جـ على الترتيب ، $\overline{أء}$ قطر فيها حيث ء (٣ ، ٦ ، ٣)

٩ إذا قطع المحور س الكرة $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ١)^٢ = ١٤$ فى النقطتين أ ، ب أوجد : طول $\overline{أب}$ ٤٠ وحدات

١٠ أوجد معادلة الكرة التى يقع مركزها على المحور ص والتى تمر بالنقطتين (١ ، ٣ ، ٢) ، (-٢ ، ٤ ، ٢)

١١ أوجد معادلة الكرة التى يقع مركزها فى المستوى س ع والتى تمر بالنقاط أ (٠ ، ٨ ، ٠) ، ب(٤ ، ٦ ، ٢) ، جـ(٠ ، ١٢ ، ٤)

١٢ إذا كان محورا الإحداثيات س ، ص يقطعان الكرة التى معادلتها : $(س - ٣)^٢ + (ص + ٤)^٢ + (ع - ١٢)^٢ = ١٦٩$
أوجد مساحة المقطع الناتج من الكرة والمستوى س ص «٢٥ π وحدة مربعة»

١٣ كرة مركزها (ل - ٢ ، م + ١ ، ٤) ، وطول نصف قطرها ٣ وحدات تمس المستويين س ع ، ص ع أوجد قيم كل من : ل ، م «٥ أو -١ ، ٢ أو -٤»

١٤ أوجد معادلة الكرة التى تمس الأجزاء الموجبة من محاور الإحداثيات وطول نصف قطرها $٤\sqrt{٢}$ وحدة طول.

١٥ إذا كان مركز الكرة التى تمس محاور الإحداثيات هو $(أ ، ٢\sqrt{٢} ، ٢\sqrt{٢})$ فأوجد قيمة أ ثم اكتب معادلة الكرة.

مسائل تقيس مهارات التفكير

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① معادلة الكرة التى مركزها (٣ ، م - ١ ، ٥) وتمس محورى الإحداثيات س ، ص هى .....

(أ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٣س - ٣ص + ٥ع = ٣٤$

(ب) $(س - ٣)^٢ + (ص \pm ٣)^٢ + (ع - ٥)^٢ = ٣٤$

(جـ) $(س + ٣)^٢ + (ص \pm ٣)^٢ + (ع + ٥)^٢ = ٣٤$

(د) $(س \pm ٣)^٢ + (ص \pm ٣)^٢ + (ع \pm ٥)^٢ = ٣٤$

② نصف قطر أصغر كرة تقع عليها النقاط (٠ ، ٠ ، ٥) ، (٥ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٥ ، ٠) هو ..... وحدة طول.

(أ) ١٥ (ب) $\frac{٥\sqrt{٦}}{٣}$ (جـ) $٥\sqrt{٣}$ (د) ٥

③ نصف قطر أصغر كرة تمر بالنقط (٥ ، ٥ ، ٠) ، (٠ ، ٥ ، ٥) ، (٥ ، ٠ ، ٥) هو ..... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{٥\sqrt{٦}}{٣}$ (د) $٥\sqrt{٢}$

④ عدد الكرات التي تمس محاور الإحداثيات الثلاثة وطول قطرها ١٦ وحدة هو .....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

⑤ معادلة الكرة التي تمس مستويات الإحداثيات علما بأن إحداثيات المركز موجبة وطول قطرها ١٦ وحدة هي .....

(أ) $(س - ٤\sqrt{٢})^٢ + (ص - ٤\sqrt{٢})^٢ + (ع - ٤\sqrt{٢})^٢ = ٦٤$

(ب) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٨\sqrt{٢}\,س + ٨\sqrt{٢}\,ص + ٨\sqrt{٢}\,ع = ٦٤$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٦٤$

(د) $(س - ٨)^٢ + (ص - ٨)^٢ + (ع - ٨)^٢ = ٦٤$

⑥ معادلة الكرة التي تمس محاور الإحداثيات الموجبة وطول قطرها ١٦ وحدة هي .....

(أ) $(س - ٤\sqrt{٢})^٢ + (ص - ٤\sqrt{٢})^٢ + (ع - ٤\sqrt{٢})^٢ = ٦٤$

(ب) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٨\sqrt{٢}\,س + ٨\sqrt{٢}\,ص + ٨\sqrt{٢}\,ع = ٦٤$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٦٤$

(د) $(س - ٨)^٢ + (ص - ٨)^٢ + (ع - ٨)^٢ = ٦٤$

⑦ كرة مركزها م موضوعة داخل مكعب طول حرفه من الداخل ١٠ سم بحيث تمس الكرة جميع أوجه المكعب ، باعتبار أحد رؤوس المكعب هي نقطة الأصل وإحداثيات المركز موجبة فإن معادلة الكرة هي .....

(أ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٢٠\,س - ٢٠\,ص - ٢٠\,ع + ٥٠ =$ صفر

(ب) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ١٠\,س\,ص + ١٠\,ص\,ع + ٥٠ =$ صفر

(جـ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ١٠\,س - ١٠\,ص - ١٠\,ع + ٥٠ =$ صفر

(د) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ١٠\,س - ١٠\,ص - ١٠\,ع + ٥٠ =$ صفر

⑧ معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر برؤوس مكعب طول حرفه ١٢ سم هي .....

(أ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٤٤$ (ب) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٠٨$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٣٦$ (د) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ١٠٨ = ٠$

⑨ إذا انتقلت الكرة $(س - ٢)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٩$ مسافة ٣ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{و\,س}$ فإن معادلة الكرة تكون .....

(أ) $(س - ٢)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٩$

(ب) $(س - ٥)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٩$

(جـ) $(س - ٢)^٢ + (ص - ٢)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٩$

(د) $(س - ٢)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٦)^٢ = ٩$

⑩ إذا كانت النقط أ ، ب ، جـ هي نقط تقاطع الكرة $(س - ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ + (ع - ١)^٢ = ٦$ مع المحورين $\overleftrightarrow{و\,س}$ ، $\overleftrightarrow{و\,ص}$ فإن مساحة المثلث أ ب جـ تساوي ..... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

⑪ كرة معادلتها : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٧٥$ تمر برؤوس مكعب مرسوم داخلها فإن المساحة الكلية للمكعب = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٢٥ (ب) ٦٠٠ (جـ) $٢٥\sqrt{٣}$ (د) ٣٠٠

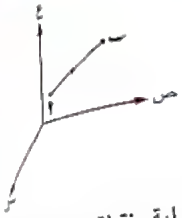
⑫ مساحة الدائرة الناتجة من تقاطع الكرة التي معادلتها $(س - ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ١٢)^٢ = ١٦٩$ مع المستوى س ص = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٢π (ب) ١٦٩π (جـ) ٢٥π (د) ١٤٤π

الدرس 2 المتجهات فى الفراغ

• **القطعة المستقيمة الموجهة :**

تحدد القطعة المستقيمة الموجهة بثلاثة عناصر:



① نقطة البداية.

② نقطة النهاية.

③ الاتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية.

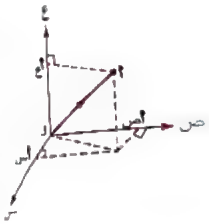
أى أن : القطعة المستقيمة الموجهة هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية ونقطة نهاية واتجاه.

فمثلًا : أ (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) نقطة البداية ، ب (س$_2$ ، ص$_2$ ، ع$_2$) نقطة النهاية

واتجاهها هو اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$ ومعيارها "$\|\overleftarrow{\text{أب}}\|$" يعرف بطول $\overleftarrow{\text{أب}}$

ونعبر عن مقدارها واتجاهها معًا بالرمز $\overleftarrow{\text{أب}}$

• **متجه الموضع فى الفراغ :**



يتحدد موضع أى نقطة أ (أس ، أص ، أع) فى الفراغ بالنسبة لنقطة الأصل و (٠ ، ٠ ، ٠) بالقطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة أ واتجاهها $\overleftarrow{\text{وأ}}$

• متجه الموضع لنقطة أ فى الفراغ هو $\overleftarrow{\text{وأ}}$ = (أس ، أص ، أع) وحيث أن كل متجهات الموضع تنسب لنقطة الأصل و فإنه يمكن كتابة $\overleftarrow{\text{أ}}$ بدلًا من $\overleftarrow{\text{وأ}}$ للتعبير عن متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل.

• أس تسمى مركبة المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه محور س

• أص تسمى مركبة المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه محور ص

• أع تسمى مركبة المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه محور ع

• **معيار المتجه :**

هو طول القطعة المستقيمة الموجهة التى تمثل المتجه فإذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (أس ، أص ، أع)

∵ $\overleftarrow{\text{أ}}$ هو القطعة المستقيمة الموجهة من نقطة الأصل «و» إلى النقطة «أ» ومن قانون البُعد بين نقطتين :

∴ طول $\overleftarrow{\text{أ}}$ ويرمز له بالرمز $\|\overleftarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(\text{أس} - ٠)^٢ + (\text{أص} - ٠)^٢ + (\text{أع} - ٠)^٢}$

أى أن : $\boxed{\|\overleftarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\text{أس}^٢ + \text{أص}^٢ + \text{أع}^٢}}$

فمثلًا : إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−٢ ، ١ ، ٢)

فإن : $\|\overleftarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(-٢)^٢ + (١)^٢ + (٢)^٢} = ٣$ وحدات طول.

• **جمع المتجهات فى الفراغ :**

إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (أس ، أص ، أع) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (بس ، بص ، بع)

فإن : $\overleftarrow{\text{حـ}} = \overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}$ = (أس + بس ، أص + بص ، أع + بع) = (حس ، حص ، حع)

فمثلًا : إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−٢ ، ٣ ، ٥) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٤ ، −٣ ، ٢)

فإن : $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}$ = (−٢ ، ٣ ، ٥) + (٤ ، −٣ ، ٢) = (٢ ، ٠ ، ٧)

• **خواص عملية جمع المتجهات فى الفراغ :**

① **خاصية الانغلاق :** لكل $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} \in$ ح^٣ يكون : $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} \in$ ح^٣

② **خاصية الإبدال :** لأى متجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ يكون : $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{أ}}$

③ **خاصية الدمج أو التجميع :** لأى ثلاثة متجهات $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ}}$ يكون :

$\overleftarrow{\text{أ}} + (\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{حـ}}) = (\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) + \overleftarrow{\text{حـ}} = \overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{حـ}}$

④ **خاصية وجود العنصر المحايد :** لأى متجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ يوجد متجه صفرى $\overleftarrow{\text{و}}$ = (٠ ، ٠ ، ٠)

حيث : $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{و}} = \overleftarrow{\text{و}} + \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{أ}}$ ويسمى المتجه $\overleftarrow{\text{و}}$ = (٠ ، ٠ ، ٠) ∈ ح^٣

بالمحايد الجمعى فى ح^٣

⑤ **خاصية توفر المعكوسات الجمعية :** لكل متجه $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ يوجد متجه $(-\overleftarrow{أ}) = (-أ_س ، -أ_ص ، -أ_ع)$ حيث : $\overleftarrow{أ} + (-\overleftarrow{أ}) = (-\overleftarrow{أ}) + \overleftarrow{أ} = \overleftarrow{و}$ (المتجه الصفرى)

والمتجه $(-\overleftarrow{أ})$ يسمى المعكوس الجمعى للمتجه $\overleftarrow{أ}$

⑥ **خاصية الحذف :** لأى ثلاثة متجهات $\overleftarrow{أ} ، \overleftarrow{ب} ، \overleftarrow{حـ}$

إذا كان : $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{أ} + \overleftarrow{حـ}$ فإن : $\overleftarrow{ب} = \overleftarrow{حـ}$

ملاحظة

إذا كان : $\overleftarrow{أ} ، \overleftarrow{ب}$ متجهين فى الفراغ ثلاثى الأبعاد فإن : $\|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}\| \leq \|\overleftarrow{أ}\| + \|\overleftarrow{ب}\|$

• **ضرب المتجه فى عدد حقيقى :**

إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع) \in ح^٣$ وكان $ك \in ح$

فإن : $ك\overleftarrow{أ} = ك(أ_س ، أ_ص ، أ_ع) = (ك أ_س ، ك أ_ص ، ك أ_ع) \in ح^٣$

فمثلًا : إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (٤ ، -٢ ، ٥)$ فإن :

• $٣\overleftarrow{أ} = (١٢ ، -٦ ، ١٥)$ • $\frac{١}{٢}\overleftarrow{أ} = (٢ ، -١ ، \frac{٥}{٢})$

• **خواص ضرب المتجهات فى عدد حقيقى :**

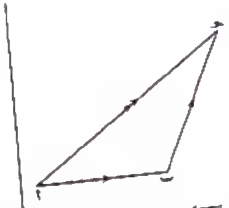
إذا كان $\overleftarrow{أ} ، \overleftarrow{ب} \in ح^٣$ ، $ك ، ل \in ح$ فإن :

① **خاصية التوزيع :** • $ك(\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}) = ك\overleftarrow{أ} + ك\overleftarrow{ب}$ • $(ك + ل)\overleftarrow{أ} = ك\overleftarrow{أ} + ل\overleftarrow{أ}$

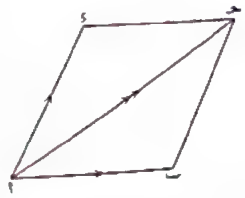
② **خاصية الدمج (التجميع) :** $ك(ل\overleftarrow{أ}) = (ك ل)\overleftarrow{أ} = ك ل \overleftarrow{أ}$

③ **خاصية الحذف :** إذا كانت $ك \neq ٠$ وكان $ك\overleftarrow{أ} = ك\overleftarrow{ب}$ فإن : $\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{ب}$

• **العلاقات الهندسية للمتجهات :**



$\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بحـ} = \overleftarrow{أحـ}$



$\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{أء} = \overleftarrow{أحـ}$

$\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{أحـ} = ٢\overleftarrow{أء}$

مثال ①

إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (٣ ، -١ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٢ ، ٥ ، -٣)$ ، $\overleftarrow{حـ} = (-٤ ، ٢ ، ٦)$

أوجد كلًا من المتجهات الآتية :

① $٢\overleftarrow{أ} - ٢\overleftarrow{ب}$ ② $\frac{١}{٢}(٤\overleftarrow{أ} - ٢\overleftarrow{ب} + ٣\overleftarrow{حـ})$

③ $٢\overleftarrow{و} - ٢(\overleftarrow{حـ} + ٣\overleftarrow{أ})$ «حيث $\overleftarrow{و}$ المتجه الصفرى»

الحل

① $٢\overleftarrow{أ} - ٢\overleftarrow{ب} = ٣(٣ ، -١ ، ٢) - ٢(٢ ، ٥ ، -٣)$

$= (٩ ، -٣ ، ٦) + (-٤ ، -١٠ ، ٦) = (٥ ، -١٣ ، ١٢)$

② $\frac{١}{٢}(٤\overleftarrow{أ} - ٢\overleftarrow{ب} + ٣\overleftarrow{حـ})$

$= \frac{١}{٢}[٤(٣ ، -١ ، ٢) - ٢(٢ ، ٥ ، -٣) + ٣(-٤ ، ٢ ، ٦)]$

$= \frac{١}{٢}[(١٢ ، -٤ ، ٨) + (-٤ ، -١٠ ، ٦) + (-١٢ ، ٦ ، ١٨)]$

$= \frac{١}{٢}(-٤ ، -٨ ، ٣٢) = (-٢ ، -٤ ، ١٦)$

③ $٢\overleftarrow{و} - ٢(\overleftarrow{حـ} + ٣\overleftarrow{أ}) = ٣(٠ ، ٠ ، ٠) - ٢[(-٤ ، ٢ ، ٦) + ٣(٣ ، -١ ، ٢)]$

$= -٢[(-٤ ، ٢ ، ٦) + (٩ ، -٣ ، ٦)]$

$= -٢(٥ ، -١ ، ١٢) = (-١٠ ، ٢ ، -٢٤)$

مثال ②

إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (٥ ، -١ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٧ ، -٦ ، ٤)$

أوجد : $\|٢\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}\|$

الحل

$٢\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = ٢(٥ ، -١ ، ٢) - (٧ ، -٦ ، ٤)$

$= (١٠ ، -٢ ، ٤) - (٧ ، -٦ ، ٤) = (٣ ، ٤ ، ٠)$

$\therefore \|٢\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}\| = \sqrt{٣^٢ + ٤^٢ + ٠^٢} = ٥$ وحدة طول.

مثال ٣

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-١ ، ٠ ، -٦)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ٣ ، ك + ١)$

وكان : $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = ٧$ وحدة طول أوجد : ك

الحل

$\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (-١ ، ٠ ، -٦) + (٣ ، ٣ ، ك + ١) = (٢ ، ٣ ، ك - ٥)$

، $\because \|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = ٧$ $\therefore (٢)^٢ + (٣)^٢ + (ك - ٥)^٢ = ٧^٢$

$\therefore ٤ + ٩ + ك^٢ - ١٠ ك + ٢٥ = ٤٩$ $\therefore ك^٢ - ١٠ ك - ١١ =$ صفر

$\therefore (ك + ١)(ك - ١١) =$ صفر $\therefore ك = -١$ أ، $ك = ١١$

ملاحظة

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين فى الفراغ ، م عدد حقيقى ≠ صفر

وكان : $\|\overrightarrow{ب}\| = \|م \overrightarrow{أ}\|$ فإن : $\|\overrightarrow{ب}\| = |م| . \|\overrightarrow{أ}\|$

فمثلًا : إذا كان : • $\|\overrightarrow{ب}\| = \|-٣ \overrightarrow{أ}\|$ فإن : $\|\overrightarrow{ب}\| = ٣ \|\overrightarrow{أ}\|$

• $\|\overrightarrow{ب}\| = \|٥ \overrightarrow{أ}\|$ فإن : $\|\overrightarrow{ب}\| = ٥ \|\overrightarrow{أ}\|$

• تساوى المتجهات فى الفراغ :

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$

فإن : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ إذا و فقط إذا كان : $أ_س = ب_س$ ، $أ_ص = ب_ص$ ، $أ_ع = ب_ع$

فمثلًا : إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٢ ، م ، ن + ٥)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ل ، -٣ ، ٣ ن + ١)$

وكان : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

فإن : $ل = ٢$ ، $م = -٣$ ، $ن + ٥ = ٣ ن + ١$ $\therefore ن = ٢$

مثال ٤

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -١ ، -٣)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٤ ، ٠ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (-٨ ، -٢ ، -١٢)$

عبر عن : $\overrightarrow{حـ}$ بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

الحل

نفرض أن $\overrightarrow{حـ} = ك \overrightarrow{أ} + ل \overrightarrow{ب}$ حيث ك ، ل ∈ ح.

$\therefore \overrightarrow{حـ} = ك (٢ ، -١ ، -٣) + ل (٤ ، ٠ ، ٢)$

$= (٢ ك ، -ك ، -٣ ك) + (٤ ل ، ٠ ، ٢ ل)$

$\therefore (-٨ ، -٢ ، -١٢) = (٢ ك + ٤ ل ، -ك ، -٣ ك + ٢ ل)$

$\therefore -٢ = -ك$ $\therefore ك = ٢$ ، $٢ ك + ٤ ل = -٨$

$\therefore ٢(٢) + ٤ ل = -٨$ $\therefore ٤ ل = -١٢$ $\therefore ل = -٣$

$\therefore \overrightarrow{حـ} = ٢ \overrightarrow{أ} - ٣ \overrightarrow{ب}$

متجه الوحدة :

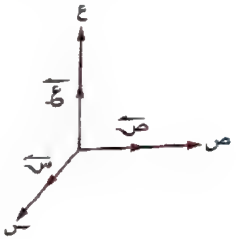
هو المتجه الذى معياره وحدة الأطوال.

فمثلًا : $\overrightarrow{أ} = \left(\frac{٣}{٥} ، \frac{-٢}{٥} ، \frac{٢\sqrt{٣}}{٥}\right)$ متجه وحدة.

لأن : $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{-٢}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{٢\sqrt{٣}}{٥}\right)^٢} = ١$

متجهات الوحدة الأساسية ($\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$) :

هى قطع مستقيمة موجهة بدايتها نقطة الأصل ومعيارها وحدة الأطوال واتجاهها هو الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات س ، ص ، ع على الترتيب أى أنه لدينا ثلاثة متجهات وحدة أساسية :



① **متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{س}$:**

هو متجه الموضع للنقطة (١ ، ٠ ، ٠) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب للمحور س

② **متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{ص}$:**

هو متجه الموضع للنقطة (٠ ، ١ ، ٠) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب للمحور ص

③ **متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{ع}$:**

هو متجه الموضع للنقطة (٠ ، ٠ ، ١) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب للمحور ع

• لاحظ أن : $\|\overrightarrow{س}\| = \|\overrightarrow{ص}\| = \|\overrightarrow{ع}\| = ١$

• التعبير عن أى متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية :

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ متجهًا فى الفراغ ثلاثى الأبعاد $(\overrightarrow{أ} \in ح^{٣})$

حيث $\overrightarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$

$\therefore \overrightarrow{أ} = (أ_{س} ، ٠ ، ٠) + (٠ ، أ_{ص} ، ٠) + (٠ ، ٠ ، أ_{ع})$ (من تعريف الجمع)

$\therefore \overrightarrow{أ} = أ_{س}(١ ، ٠ ، ٠) + أ_{ص}(٠ ، ١ ، ٠) + أ_{ع}(٠ ، ٠ ، ١)$ (من تعريف الضرب فى عدد حقيقى)

$\therefore \boxed{\overrightarrow{أ} = أ_{س}\overrightarrow{س} + أ_{ص}\overrightarrow{ص} + أ_{ع}\overrightarrow{ع}}$

ويستخدم التكوين السابق للتعبير عن أى متجه فى الفراغ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

فمثلًا : $\overrightarrow{ب} = (-٥ ، ٧ ، \sqrt{٣}) = -٥\overrightarrow{س} + ٧\overrightarrow{ص} + \sqrt{٣}\overrightarrow{ع}$

مثال ٥

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-٨ ، ٥ ، ٩)$ ، $\overrightarrow{ب} = (١ ، -٢ ، ٣)$

عبر عن : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

ثم أوجد : $\overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب}$ وأوجد معياره.

الحل

$\overrightarrow{أ} = -٨\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص} + ٩\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع}$

، $\overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب}$

$= (-٨\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص} + ٩\overrightarrow{ع}) - ٣(\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع})$

$= (-٨ - ٣)\overrightarrow{س} + (٥ + ٦)\overrightarrow{ص} + (٩ - ٩)\overrightarrow{ع}$

$= -١١\overrightarrow{س} + ١١\overrightarrow{ص}$

$\therefore \|\overrightarrow{حـ}\| = \sqrt{(-١١)^{٢} + (١١)^{٢} + (صفر)^{٢}} = ١١\sqrt{٢}$ وحدة طول.

مثال ٦

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = -\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} + حـ\overrightarrow{ع}$ وكان $\overrightarrow{ب} = \frac{١}{٣}\overrightarrow{أ}$ هو متجه وحدة أوجد : حـ

الحل

$\because \overrightarrow{ب} = \frac{١}{٣}\overrightarrow{أ}$ $\therefore \overrightarrow{ب} = \frac{-١}{٣}\overrightarrow{س} + \frac{٢}{٣}\overrightarrow{ص} + \frac{حـ}{٣}\overrightarrow{ع}$

، $\because \overrightarrow{ب}$ هو متجه وحدة. $\therefore \|\overrightarrow{ب}\| = ١$

$\therefore \left(\frac{-١}{٣}\right)^{٢} + \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} + \left(\frac{حـ}{٣}\right)^{٢} = ١$ $\therefore \frac{١}{٩} + \frac{٤}{٩} + \frac{حـ^{٢}}{٩} = ١$

$\therefore \frac{حـ^{٢}}{٩} = ١ - \frac{٥}{٩} = \frac{٤}{٩}$ $\therefore حـ^{٢} = ٤$

$\therefore حـ = \pm ٢$

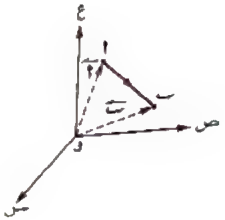
• التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة فى الفراغ بدلالة متجهى الموضع لطرفيها :

بفرض أن $أ(أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$ ، $ب(ب_{س} ، ب_{ص} ، ب_{ع})$

نقطتان فى الفراغ متجها موضعيهما $\overrightarrow{و أ}$ ، $\overrightarrow{و ب}$ على الترتيب :

فإن المتجه الممثل للقطعة المستقيمة الموجهة من أ إلى ب هو

$\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{و ب} - \overrightarrow{و أ}$



أى أن : $\boxed{\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}}$

فمثلًا : إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-٣ ، ٤ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٥ ، ٠ ، ٧)$

فإن : $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٥ ، ٠ ، ٧) - (-٣ ، ٤ ، ٢) = (٨ ، -٤ ، ٥)$

، $\overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (-٣ ، ٤ ، ٢) - (٥ ، ٠ ، ٧) = (-٨ ، ٤ ، -٥)$

أى أن : $\boxed{\overrightarrow{أ ب} = -\overrightarrow{ب أ}}$

• متجه الوحدة فى اتجاه معلوم :

إذا كان المتجه $\overrightarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع}) \in ح^{٣}$

فإن متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$ ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{ى_{أ}}$ يعطى بالعلاقة : $\boxed{\overrightarrow{ى_{أ}} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}}$

فمثلًا : إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-٢ ، ٢ ، -١)$ فإن : $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{(-٢)^{٢} + (٢)^{٢} + (-١)^{٢}} = ٣$

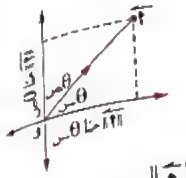
$\therefore$ متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ى_{أ}} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \frac{(-٢ ، ٢ ، -١)}{٣} = \left(\frac{-٢}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{-١}{٣}\right)$

تذكر أن :

سبق لك دراسة الصورة القطبية لمتجه فى المستوى الإحداثى $ح^2$ وهى $\overleftarrow{أ} = (\|\overleftarrow{أ}\| ، \theta)$

حيث θ هى قياس الزاوية التى يصنعها المتجه $\overleftarrow{أ}$ مع الاتجاه الموجب للمحور س

ومنها فإن : $\overleftarrow{أ} = \|\overleftarrow{أ}\| \text{جتا}\, \theta\, \overleftarrow{س} + \|\overleftarrow{أ}\| \text{جا}\, \theta\, \overleftarrow{ص}$



وإذا كانت : $\theta_{س}$ هى الزاوية التى يصنعها المتجه مع المحور س

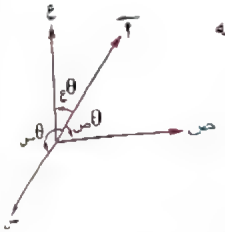
، $\theta_{ص}$ هى الزاوية التى يصنعها المتجه مع المحور ص

فإن : $\text{جا}\, \theta_{س} = \text{جتا}\, \theta_{ص}$

ومنها فإن الصورة الكارتيزية للمتجه : $\overleftarrow{أ} = \|\overleftarrow{أ}\| \text{جتا}\, \theta_{س}\, \overleftarrow{س} + \|\overleftarrow{أ}\| \text{جتا}\, \theta_{ص}\, \overleftarrow{ص}$

• **زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه فى الفراغ :**

* **زوايا الاتجاه لمتجه $\overleftarrow{أ}$ فى الفراغ :**



هى قياسات الزوايا $(\theta_{س} ، \theta_{ص} ، \theta_{ع})$ التى يصنعها المتجه مع الاتجاهات الموجبة للمحاور س ، ص ، ع على الترتيب

حيث كل من $\theta_{س} ، \theta_{ص} ، \theta_{ع} \in [٠ ، \pi]$

* **جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{أ}$ فى الفراغ :**

هى جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{أ}$ أى $(\text{جتا}\, \theta_{س} ، \text{جتا}\, \theta_{ص} ، \text{جتا}\, \theta_{ع})$

$\therefore \overleftarrow{أ} = \|\overleftarrow{أ}\| \text{جتا}\, \theta_{س}\, \overleftarrow{س} + \|\overleftarrow{أ}\| \text{جتا}\, \theta_{ص}\, \overleftarrow{ص} + \|\overleftarrow{أ}\| \text{جتا}\, \theta_{ع}\, \overleftarrow{ع}$

$\therefore \overleftarrow{أ} = \|\overleftarrow{أ}\| (\text{جتا}\, \theta_{س}\, \overleftarrow{س} + \text{جتا}\, \theta_{ص}\, \overleftarrow{ص} + \text{جتا}\, \theta_{ع}\, \overleftarrow{ع})$

$\therefore \dfrac{\overleftarrow{أ}}{\|\overleftarrow{أ}\|} = \text{جتا}\, \theta_{س}\, \overleftarrow{س} + \text{جتا}\, \theta_{ص}\, \overleftarrow{ص} + \text{جتا}\, \theta_{ع}\, \overleftarrow{ع}$

، $\because \dfrac{\overleftarrow{أ}}{\|\overleftarrow{أ}\|}$ هو متجه وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{أ}$

$\therefore \text{جتا}\, \theta_{س}\, \overleftarrow{س} + \text{جتا}\, \theta_{ص}\, \overleftarrow{ص} + \text{جتا}\, \theta_{ع}\, \overleftarrow{ع}$ هو متجه وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{أ}$

$\therefore \text{جتا}^2\, \theta_{س} + \text{جتا}^2\, \theta_{ص} + \text{جتا}^2\, \theta_{ع} = 1$

ملاحظات :

، زوايا الاتجاه لمتجه $\overleftarrow{أب}$ (لا يمر بنقطة الأصل) فى الفراغ هى قياسات الزوايا التى يصنعها متجه يمر بنقطة الأصل موازيًا للمتجه $\overleftarrow{أب}$

، جيوب تمام الاتجاه لأى متجه هى مركبات متجه الوحدة فى اتجاهه

أى هى : $\left(\dfrac{أ_{س}}{\|\overleftarrow{أ}\|} ، \dfrac{أ_{ص}}{\|\overleftarrow{أ}\|} ، \dfrac{أ_{ع}}{\|\overleftarrow{أ}\|}\right)$

، جيوب تمام الاتجاه الموجب للمحاور س ، ص ، ع أو أى متجه فى اتجاه أى منهم هى (١ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ١ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ١) على الترتيب.

، زوايا اتجاه المحاور س ، ص ، ع الموجبة أو أى متجه فى اتجاه أى منهم هى (٠° ، ٩٠° ، ٩٠°) ، (٩٠° ، ٠° ، ٩٠°) ، (٩٠° ، ٩٠° ، ٠°) على الترتيب.

* إذا كانت : $(\theta_{س} ، \theta_{ص} ، \theta_{ع})$ هى زوايا الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{أ}$

فإن : $(\pi - \theta_{س} ، \pi - \theta_{ص} ، \pi - \theta_{ع})$ هى زوايا الاتجاه للمتجه $-\overleftarrow{أ}$

تعميم : إذا كانت $(\theta_{س} ، \theta_{ص} ، \theta_{ع})$ هى زوايا الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{أ}$ فإن

(١) $(\theta_{س} ، \theta_{ص} ، \theta_{ع})$ هى زوايا الاتجاه للمتجه $ك\overleftarrow{أ}$ حيث $ك >$ صفر

(٢) $(\pi - \theta_{س} ، \pi - \theta_{ص} ، \pi - \theta_{ع})$ هى زوايا الاتجاه للمتجه $ك\overleftarrow{أ}$ حيث $ك <$ صفر

، إذا كان المتجه $\overleftarrow{أ}$ يصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات الموجبة

أى أن : $\theta_{س} = \theta_{ص} = \theta_{ع} = \theta$ فإن : $\text{جتا}\, \theta_{س} = \text{جتا}\, \theta_{ص} = \text{جتا}\, \theta_{ع} = \text{جتا}\, \theta$

، $\because \text{جتا}^2\, \theta + \text{جتا}^2\, \theta + \text{جتا}^2\, \theta = 1$ $\therefore ٣\, \text{جتا}^2\, \theta = 1$ $\therefore \text{جتا}^2\, \theta = \dfrac{1}{3}$

$\therefore \text{جتا}\, \theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ومنها $\theta \simeq ٥٤°\, ٤٤'\, ٨''$

أ، $\text{جتا}\, \theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ومنها $\theta \simeq ١٢٥°\, ١٥'\, ٥٢''$

* مجموع قياس أى زاويتين من زوايا الاتجاه أكبر من أو يساوى ٩٠°

* إذا كان مجموع قياسى زاويتى اتجاه ٩٠° فإن قياس الزاوية الثالثة ٩٠°

مثال ٧

أوجد جيوب تمام الاتجاه وزوايا الاتجاه للمتجه : $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -٢ ، ٢\sqrt{٢})$

الحل

$\because \|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٢^٢ + (-٢)^٢ + (٢\sqrt{٢})^٢} = ٤$ ، $\because$ $\overrightarrow{ى_أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \frac{(٢ ، -٢ ، ٢\sqrt{٢})}{٤}$

$\therefore$ جتا $\theta_س = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ ، جتا $\theta_ص = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$ ، جتا $\theta_ع = \frac{٢\sqrt{٢}}{٤} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$\therefore$ جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى $(\frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢})$

، زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى $(٦٠° ، ١٢٠° ، ٤٥°)$

مثال ٨

إذا كانت : $(١٣٥° ، ٦٠° ، \theta)$ هى زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

أوجد : θ ، وإذا كان $\|\overrightarrow{أ}\| = ٦$ أوجد : $\overrightarrow{أ}$

الحل

$\because (١٣٥° ، ٦٠° ، \theta)$ هى زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

$\therefore$ جتا^٢ ١٣٥° + جتا^٢ ٦٠° + جتا$^٢ \theta = ١$ $\therefore \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} +$ جتا$^٢ \theta = ١$

$\therefore$ جتا$^٢ \theta = \frac{١}{٤}$

$\therefore$ جتا $\theta = \frac{١}{٢}$ ومنها $\theta = ٦٠°$ أ، جتا $\theta = -\frac{١}{٢}$ ومنها $\theta = ١٢٠°$

$\therefore$ زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى $(١٣٥° ، ٦٠° ، ٦٠°)$ أ، $(١٣٥° ، ٦٠° ، ١٢٠°)$

$\therefore \overrightarrow{أ} = ٦$ جتا ١٣٥° $\overrightarrow{س} + ٦$ جتا ٦٠° $\overrightarrow{ص} + ٦$ جتا ٦٠° $\overrightarrow{ع}$

$= -٣\sqrt{٢}\,\overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص} + ٣\,\overrightarrow{ع}$

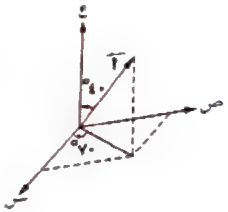
أ، $\overrightarrow{أ} = ٦$ جتا ١٣٥° $\overrightarrow{س} + ٦$ جتا ٦٠° $\overrightarrow{ص} + ٦$ جتا ١٢٠° $\overrightarrow{ع}$

$= -٣\sqrt{٢}\,\overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص} - ٣\,\overrightarrow{ع}$

مثال ٩

فى الشكل المقابل :

متجه $\overrightarrow{أ}$ معياره ١٠ وحدات



① عبر عن المتجه $\overrightarrow{أ}$ بالصورة الجبرية (المركبات الكارتيزية)

② أوجد قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

الحل

① نحلل $\overrightarrow{أ}$ إلى مركبتين : الأولى فى اتجاه $\overrightarrow{ع}$

ومقدارها $أ_ع = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_ع = ١٠$ جتا ٤٠° $= ٧,٦٦$

والثانية تقع فى المستوى الإحداثى س ص

$أ_{س ص} = \|\overrightarrow{أ}\|$ جا $\theta_ع = ١٠$ جا ٤٠° $= ٦,٤٢٨$

الآن نحلل المركبة $أ_{س ص}$ إلى مركبتين : الأولى فى اتجاه $\overrightarrow{س}$

ومقدارها $أ_س = أ_{س ص}$ جتا ٧٠° $= ٦,٤٢٨$ جتا ٧٠° $= ٢,٢$

والثانية فى اتجاه $\overrightarrow{ص}$ ومقدارها $أ_ص = أ_{س ص}$ جا ٧٠° $= ٦,٤٢٨$ جا ٧٠° $= ٦,٠٤$

وبذلك تكون الصورة الكارتيزية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى :

$\overrightarrow{أ} = أ_س \overrightarrow{س} + أ_ص \overrightarrow{ص} + أ_ع \overrightarrow{ع} = ٢,٢ \overrightarrow{س} + ٦,٠٤ \overrightarrow{ص} + ٧,٦٦ \overrightarrow{ع}$

② ولإيجاد زوايا الاتجاه نوجد متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$

$\overrightarrow{ى_أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \frac{١}{١٠}(٢,٢ \overrightarrow{س} + ٦,٠٤ \overrightarrow{ص} + ٧,٦٦ \overrightarrow{ع})$

$= ٠,٢٢ \overrightarrow{س} + ٠,٦٠٤ \overrightarrow{ص} + ٠,٧٦٦ \overrightarrow{ع}$

$\therefore$ جتا $\theta_س = ٠,٢٢$ ومنها $\theta_س =$ جتا$^{-١}$ $(٠,٢٢) = ٧٧,٣°$

، جتا $\theta_ص = ٠,٦٠٤$ ومنها $\theta_ص =$ جتا$^{-١}$ $(٠,٦٠٤) = ٥٢,٨٤°$

، جتا $\theta_ع = ٠,٧٦٦$ ومنها $\theta_ع =$ جتا$^{-١}$ $(٠,٧٦٦) \simeq ٤٠°$

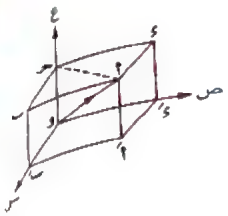
مثال ١٠

الشكل المقابل يمثل متوازى مستطيلات أبعاده

(ء حـ = ٨ وحدات طول ، ب حـ = ٦ وحدات طول

، و حـ = ٥ وحدات طول) قوة $\overleftarrow{ق}$ مقدارها ٢٠٠ نيوتن

تعمل فى اتجاه القطر $\overleftarrow{و أ}$



① عبر عن القوة $\overleftarrow{ق}$ بالصورة الجبرية

② أوجد قياسات زوايا الاتجاه للقوة $\overleftarrow{ق}$

الحل

∵ $\overleftarrow{و أ} = ٦\,\overleftarrow{س} + ٨\,\overleftarrow{ص} + ٥\,\overleftarrow{ع}$

∴ $\|\overleftarrow{و أ}\| = \sqrt{٣٦ + ٦٤ + ٢٥} = ٥\sqrt{٥}$ وحدة طول.

∴ متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و أ} = \dfrac{\overleftarrow{و أ}}{\|\overleftarrow{و أ}\|} = \dfrac{٦}{٥\sqrt{٥}}\,\overleftarrow{س} + \dfrac{٨}{٥\sqrt{٥}}\,\overleftarrow{ص} + \dfrac{١}{\sqrt{٥}}\,\overleftarrow{ع}$

∴ يمكن التعبير عن القوة $\overleftarrow{ق}$ بالصورة الجبرية كما يلى :

$\overleftarrow{ق} = ٢٠٠$ (متجه وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و أ}$)

$= ٢٠٠\left(\dfrac{٦}{٥\sqrt{٥}}\,\overleftarrow{س} + \dfrac{٨}{٥\sqrt{٥}}\,\overleftarrow{ص} + \dfrac{١}{\sqrt{٥}}\,\overleftarrow{ع}\right)$

$= ٤٨\sqrt{٥}\,\overleftarrow{س} + ٦٤\sqrt{٥}\,\overleftarrow{ص} + ٤٠\sqrt{٥}\,\overleftarrow{ع}$

، ∵ جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{و أ} = \left(\dfrac{٦}{٥\sqrt{٥}} ، \dfrac{٨}{٥\sqrt{٥}} ، \dfrac{١}{\sqrt{٥}}\right)$

∴ قياسات زوايا الاتجاه للقوة $\overleftarrow{ق} = (٣٧^\circ\ ٣٢'\ ٥٧'' ، ٤٥^\circ\ ١٨'\ ٤٤'' ، ٦٣^\circ\ ٢٦'\ ٦'')$

على المتجهات فى الفراغ

اختبار تفاعلى

• مهم ○ تطبيقى ∴ مستويات عليا ▭ من أسئلة الكتاب المدرسى

١ ▭ عبر عن المتجهات (−١ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، −١ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، −١)

بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

٢ أوجد معيار كل من المتجهات الآتية :

① ▭ $\overleftarrow{أ} = (٢ ، −١ ، ٠)$

② $\overleftarrow{ب} = ٥\,\overleftarrow{س} − ٤\,\overleftarrow{ص} + ٢\sqrt{٢}\,\overleftarrow{ع}$

③ $\overleftarrow{ب} = ٣\,\overleftarrow{س} + ٤\,\overleftarrow{ص}$

② $\overleftarrow{أ} = (١ ، ٢ ، −٢)$

④ ▭ $\overleftarrow{حـ} = \overleftarrow{ع}$

٢٠ ، ٣ ، ٧ ، ١ ، ٥

٣ إذا كان : $\overleftarrow{أ} = −٣\,\overleftarrow{س} − ٥\,\overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ب} = ٤\,\overleftarrow{ص} + ٨\,\overleftarrow{ع}$ أوجد :

① $\overleftarrow{أ} − \frac{١}{٢}\,\overleftarrow{ب}$

② $٣\,\overleftarrow{ب} − ٢\,\overleftarrow{أ}$

③ $\overleftarrow{أ} − ٣\,\overleftarrow{ب}$

④ $٢\,\overleftarrow{أ} + ٣\,\overleftarrow{ب}$

٤ ▭ إذا كان $\overleftarrow{أ} = (٢ ، −٣ ، ١)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٤ ، −٢ ، ٠)$ ، $\overleftarrow{حـ} = (−٦ ، ٠ ، ٣)$

أوجد كلًا من المتجهات الآتية :

① $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}$

② $٣\,\overleftarrow{أ} − \frac{١}{٣}\,\overleftarrow{حـ}$

③ $\frac{٣}{٢}\,\overleftarrow{ب} + \frac{٢}{٣}\,\overleftarrow{حـ}$

٥ ▭ إذا كان : $\overleftarrow{حـ} = (٢ ، −٣ ، ١)$ ، $\overleftarrow{ء} = (٠ ، ٢ ، −٢)$

① أوجد : $٥\,\overleftarrow{حـ} − ٢\,\overleftarrow{ء}$

② إذا كان : $٣\,\overleftarrow{أ} − ٤\,\overleftarrow{ء} = \overleftarrow{حـ}$ فأوجد : $\overleftarrow{أ}$

٦ إذا كان : $\overleftarrow{حـ} = (٤ ، −١ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{ء} = (−٣ ، ٤ ، ٥)$ ، $\overleftarrow{هـ} = (−٥ ، ١ ، ٣)$

أوجد المتجه $\overleftarrow{أ}$ الذى يحقق المعادلة : $٢\,\overleftarrow{أ} = ٢\,\overleftarrow{حـ} − ٣\,\overleftarrow{ء} + ٢\,\overleftarrow{هـ}$

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-٣ ، ٧ ، ٨)$ فإن : $\|\overrightarrow{أ}\| =$ .....

(أ) ١٢ (ب) $\sqrt{٢٢٢}$ (جـ) $\sqrt{١٢٢}$ (د) ١٠

(٢) (دور ثان ٢٠١٩) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -٢ ، م)$ وكان : $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٢٢}$

فإن : م = ...

(أ) ٢١ (ب) ± ٩ (جـ) ± ٣ (د) ١٧

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-٢ ، ك ، ١)$ وكان : $\|\overrightarrow{أ}\| = ٣$ وحدات فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) -٤ (جـ) ± ٢ (د) $\sqrt{١٤}$

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -٣ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ٠ ، ٤)$

فإن : $٣\overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب} =$ .....

(أ) (١٠ ، -٩ ، ٧) (ب) (٤ ، -٩ ، ١٩)

(جـ) (١٥ ، ١١ ، ٨) (د) (١١ ، ١٢ ، ٤)

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-١ ، ٥ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ١ ، ١)$ وكان : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{س}$

فإن : $\overrightarrow{حـ} =$ .....

(أ) $\overrightarrow{س} + ٦\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ (ب) $-\overrightarrow{س} - ٦\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$

(جـ) $\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$ (د) $\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (١ ، -١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٠ ، ٢ ، -٣)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (-٢ ، ١ ، ٠)$

فإن : $\|٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}\| =$ .....

(أ) $٨\sqrt{٣}$ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) $٧\sqrt{٢}$

(٧) إذا كان : أ(-٢ ، ٠ ، ٣) ، ب(٤ ، ٢ ، -٥) فإن : $\overrightarrow{أب} =$ .....

(أ) (-٦ ، -٢ ، ٨) (ب) (٢ ، ٢ ، -٢)

(جـ) (٦ ، ٢ ، -٨) (د) (١ ، ١ ، -١)

(٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٢ ، ٣\sqrt{٣} ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٤ ، ٢\sqrt{٣} ، \sqrt{٦})$

فإن : $\|\overrightarrow{أب}\| =$ .....

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) $\sqrt{١٣}$ (د) ٥

(٩) (دور أول ٢٠١٩) إذا كان : $\overrightarrow{أب} = -٣\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} + ٧\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{بحـ} = \overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$

فإن : $\|\overrightarrow{أحـ}\| =$ .....

(أ) ١٣ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٩

(١٠) (دور أول ٢٠١٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-٢ ، ٤ ، ٦)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٠ ، ك ، ٣)$

حيث $ك \in ص^+$ وكان : $\|\overrightarrow{أب}\| = ٧$ فإن قيمة : ك = ...

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٤

(١١) إذا كان : $\|ك(٣ ، -٣\sqrt{٣} ، ٠)\| = ١$ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\pm\frac{١}{٦}$ (جـ) ٦ (د) ± ٦

(١٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-٩ ، ١ ، ٨)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٦ ، -٣ ، -٤)$

فإن متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أب} =$ .....

(أ) $\left(\frac{٣}{١٣} ، \frac{٤}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$ (ب) $\left(\frac{٣}{١٣} ، \frac{-٤}{١٣} ، \frac{-١٢}{١٣}\right)$

(جـ) $\left(\frac{-٣}{١٣} ، \frac{٤}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$ (د) $\left(\frac{-٣}{١٣} ، \frac{-٤}{١٣} ، \frac{-١٢}{١٣}\right)$

(١٣) المتجه الذى يمثل متجه وحدة فى المتجهات الآتية هو .....

(أ) (-٣ ، ٢ ، ٢) (ب) $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤}\right)$

(جـ) $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{-٤}{٥} ، ٠\right)$ (د) $\left(\frac{-١}{١٢} ، \frac{-٣}{١٢} ، \frac{٢}{١٢}\right)$

(١٤) (دور ثان ٢٠١٧) جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ} = (-٢ ، ١ ، ٢)$ هى .....

(أ) (-٢ ، ١ ، ٢) (ب) $\left(\frac{-٢}{٣} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

(جـ) $\left(\frac{٥}{-٢} ، ٥ ، \frac{٥}{٣}\right)$ (د) (-١ ، ١ ، ١)

(١٥) (دورثان ٢٠١٧) متجه زوايا الاتجاه له (٤٥° ، ٤٥° ، θ) فإن : θ = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ٠° (د) ٦٠°

(١٦) إذا كان : (٣٠° ، ٧٠° ، θ) هى زوايا الاتجاه لمتجه فإن إحدى قيم θ = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٢٦٠° (د) ٦٨,٦°

(١٧) إذا كان : ‖٤ $\overrightarrow{أ}$‖ = ‖٢ ك $\overrightarrow{أ}$‖ فإن : ك = ...

(أ) ± ١ (ب) ± $\frac{٣}{٤}$ (جـ) ± $\frac{٤}{٣}$ (د) ± $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

(١٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٢ ، −٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ١ ، ك − ١)

وكان ‖$\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$‖ = ٧ وحدة طولية فإن : ك = ...

(أ) ± ٦ (ب) ٢ أ، −١١ (جـ) ١١ أ، −١ (د) ± ٧

(١٩) إذا كان : $\overrightarrow{أب}$ = (٢ ، ٥ ، −١) ، $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ٣ ، ١) فإن : $\overrightarrow{ب}$ = ...

(أ) (٤ ، ٨ ، ٠) (ب) (٤ ، ٠ ، ٨) (جـ) (٠ ، ٤ ، ٨) (د) $\overrightarrow{و}$

(٢٠) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، ك) متجه وحدة فإن : قيمة ك = ...

أو .....

(أ) ± ٣ (ب) ± $\sqrt{٣}$ (جـ) ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ± $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

(٢١) المتجه $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ − ٢ $\overrightarrow{ع}$ يصنع زاوية قياسها ..... (لأقرب درجة)

مع الاتجاه الموجب لمحور س

(أ) ٧٤° (ب) ٧٨° (جـ) ١٤٣° (د) ٣٧°

(٢٢) المتجه $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ يصنع زاوية قياسها ..... مع الاتجاه

الموجب لمحور ع

(أ) صفر (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٢٣) إذا كان قياس الزاوية التى يصنعها $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ٤ ، ك) مع الاتجاه الموجب للمحور

ص يساوى ٤٥° فإن : ك = ...

(أ) ± ٥ (ب) ± ٢ (جـ) ± ٢ $\sqrt{٣}$ (د) ± $\sqrt{٣}$

(٢٤) إذا كانت قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى (٣٠° ، ١٢٠° ، ٩٠°)

فإن المتجه $\overrightarrow{أ}$ يقع فى .....

(أ) المستوى س ع (ب) المستوى ص ع

(جـ) المستوى س ص (د) أتجاه $\overleftarrow{وس}$

(٢٥) قياسات زوايا الاتجاه الموجب للمحور ص هى .....

(أ) (٩٠° ، ٩٠° ، ٠°) (ب) (٠° ، ٩٠° ، ٩٠°)

(جـ) (٠° ، ٩٠° ، ٠°) (د) (٩٠° ، ٠° ، ٩٠°)

(٢٦) جيوب التمام الاتجاهية للاتجاه السالب للمحور ع هى .....

(أ) (٠ ، ٠ ، ١) (ب) (٠ ، ١ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠ ، −١) (د) (٠ ، −١ ، ٠)

(٢٧) المتجه الذى معياره ٦ وحدات طولية وجيوب التمام الاتجاهيه له (−$\frac{١}{٢}$ ، ٠ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

هو .....

(أ) (−٣ ، ٠ ، ٣ $\sqrt{٣}$) (ب) (−٣ ، ٣ ، ٣ $\sqrt{٣}$)

(جـ) ($\frac{-٣}{٢}$ ، ٠ ، ٢ $\sqrt{٣}$) (د) (−١ ، ٠ ، $\sqrt{٣}$)

(٢٨) إذا كانت : (٦٠° ، $\theta_{ص}$ ، ٤٥°) هى قياسات زوايا الاتجاه لمتجه ما

فإن : $\theta_{ص}$ = ...

(أ) ٣٠° أ، ٦٠° (ب) ٦٠° أ، ١٥٠° (جـ) ٦٠° أ، ١٢٠° (د) ٣٠° أ، ١٥٠°

(٢٩) إذا كانت جيوب تمام الاتجاه للمتجه هى ($\frac{١}{٢}$ ، −$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) فإن زوايا الاتجاه له

هى .....

(أ) (٦٠° ، ١٢٠° ، ١٣٥°) (ب) (٦٠° ، ١٢٠° ، ٤٥°)

(جـ) (٣٠° ، ١٥٠° ، ٤٥°) (د) (١٢٠° ، ٦٠° ، ٤٥°)

(٣٠) إذا كانت قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى (٤٥° ، ١٣٥° ، ٩٠°)
فإن متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$ = ...

(أ) $(\sqrt{٢} ، -\sqrt{٢} ، ٠)$ (ب) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{-١}{\sqrt{٢}} ، ١)$
(جـ) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{-١}{\sqrt{٢}} ، ٠)$ (د) (١ ، -١ ، ٠)

(٣١) إذا كانت قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى (٤٥° ، ١٢٠° ، ٦٠°)
، $\|\overrightarrow{أ}\| = ١٢\sqrt{٢}$ فإن : $\overrightarrow{أ}$ = ...

(أ) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢})$ (ب) $(١٢ ، -٦\sqrt{٢} ، ٦\sqrt{٢})$
(جـ) $(١٢ ، ٦\sqrt{٢} ، -٦\sqrt{٢})$ (د) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢})$

(٣٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٢\sqrt{٢} ، ٢ ، -٢)$ فإن المتجه الذى له نفس الزوايا الاتجاهيه هو .....

(أ) $(٨ ، ٠ ، -٤\sqrt{٣})$ (ب) $(٤\sqrt{٢} ، -٤ ، -٤)$
(جـ) $(٣\sqrt{٢} ، ٣ ، -٣)$ (د) $(٤ ، ٢ ، \sqrt{٣})$

(٣٣) متجه الوحدة لمتجه يوازى المستوى ص ع يمكن أن يكون .....

(أ) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}} ، ٠)$ (ب) $(٠ ، \frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}})$
(جـ) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، ٠ ، \frac{١}{\sqrt{٢}})$ (د) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، ٠ ، ٠)$

(٣٤) إذا كان المتجه $\overrightarrow{ن}$ = (أ ، ٤ ، حـ) يوازى المستوى الإحداثى ص ع ، وكان $\|\overrightarrow{ن}\| = ٥$
فإن : $حـ^٢$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٠

(٣٥) المتجه الذى يصنع زوايا متساوية فى القياس مع الاتجاهات الموجبة للمحاور الإحداثية مما يأتى هو .....

(أ) $(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}})$ (ب) $(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، -\frac{١}{\sqrt{٣}} ، -\frac{١}{\sqrt{٣}})$
(جـ) $(-\sqrt{٣} ، -\sqrt{٣} ، \sqrt{٣})$ (د) (-١ ، ١ ، -١)

(٣٦) إذا كانت : حـ منتصف $\overline{أب}$ وكان $\overrightarrow{أحـ}$ = (٢ ، -٢ ، ٥)
فإن : $\overrightarrow{حـب}$ = ...

(أ) (-٣ ، ٢ ، -٥) (ب) (٣ ، -٢ ، ٥)
(جـ) $(\frac{-٣}{٢} ، ١ ، \frac{-٥}{٢})$ (د) $(\frac{٣}{٢} ، -١ ، \frac{٥}{٢})$

(٣٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ متجه غير صفرى ، $\overrightarrow{حـ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$ فإن أى من العبارات الآتية صحيحة دائمًا ؟

(أ) $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{حـ}\|$ (ب) $\|\overrightarrow{أ}\| < \|\overrightarrow{حـ}\|$
(جـ) $\|\overrightarrow{أ}\| > \|\overrightarrow{حـ}\|$ (د) $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{حـ}$

(٣٨) إذا كانت : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ثلاثة متجهات
فإن : $\left\|\frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} + ٢\frac{\overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|} + ٣\frac{\overrightarrow{حـ}}{\|\overrightarrow{حـ}\|}\right\|$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

(٣٩) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، ٠ ، ٣) فإن ظل الزاوية التى يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{\sqrt{٧}}$ (د) $\frac{٤}{٧}$

(٤٠) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان جيب تمام الزاوية التى يصنعها المتجه $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، ١٢ ، ٤)
مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوى $\frac{٣}{١٣}$ فإن : ك = ...
، حيث ك ∈ ح

(أ) ٤ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) $-\sqrt{٣}$ (د) ٣

(٤١) متجه الموضع الذى يقع فى المستوى الإحداثى الموجب س ع ويصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب للمحور س فإن جيوب تمام الاتجاه له هى .....

(أ) $(\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ٠)$ (ب) $(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ٠ ، \frac{١}{٢})$
(جـ) $(-\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ٠)$ (د) $(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ٠ ، -\frac{١}{٢})$

٤٢ متجه الموضع الذى يقع فى المستوى الإحداثى س ص ويصنع زاوية قياسها ٩٠° مع الاتجاه الموجب لمحور ص تكون جيوب تمام الاتجاه له هى .....

(أ) $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢} ، ٠\right)$ (ب) $\left(\frac{١}{٢} ، \pm\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ٠\right)$

(جـ) $\left(\pm\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢} ، ٠\right)$ (د) $\left(\pm\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢} ، ٠\right)$

٤٣ إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = ٣$ ، $-١ \le ك \le ٢$ فإن : $\|ك\overrightarrow{أ}\| \in$ .....

(أ) [-٣ ، ٦] (ب) [٠ ، ٦] (جـ) [٣ ، ٦] (د) [١ ، ٦]

٤٤ المتجه الذى زوايا الاتجاه له (٠ ، ٩٠° ، ٩٠°) .....

(أ) يعمل فى الاتجاه الموجب للمحور ص

(ب) يعمل فى الاتجاه الموجب للمحور س

(جـ) يعمل فى الاتجاه الموجب للمحور ع

(د) يقع فى المستوى الإحداثى ص ع

٤٥ أى مما يأتى يعبر عن زوايا اتجاه لمتجه فى الفراغ الثلاثى ؟

(أ) (٦٠° ، ٣٠° ، ٣٠°) (ب) (٩٠° ، ٩٠° ، ٦٠°)

(جـ) (١٢٠° ، ١٥٠° ، ٩٠°) (د) (٦٠° ، ٣٠° ، ٠)

٤٦ كل المتجهات الآتية هى متجهات وحدة ماعدا .....

(أ) $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، ٠ ، \frac{-١}{\sqrt{٢}}\right)$ (ب) $\left(-\frac{٦}{١٠} ، \frac{٢\sqrt{٧}}{١٠} ، ٠,٦\right)$

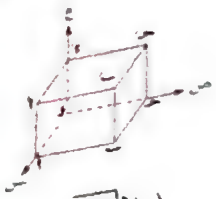
(جـ) (١ ، ١ ، ١) (د) $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{-\sqrt{٣}}{٢} ، ٠\right)$

٤٧ إذا كان ك ، هـ ، و هى جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فإن : .....

(أ) ك + هـ + و = ١ (ب) ك = هـ = و

(جـ) $ك^٢ + هـ^٢ + و^٢ = ١$ (د) $ك + هـ + و = \|\overrightarrow{أ}\|$

٤٨ فى الشكل المقابل :



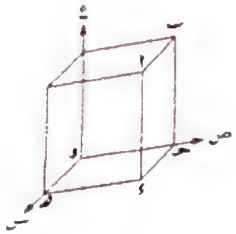
أ ب جـ و أ ب جـ د متوازى مستطيلات وكان :

أ (٤ ، ٠ ، ٠) ، جـ (٠ ، ٩ ، ٠) ، د (٠ ، ٠ ، ٧)

فإن : $\|\overrightarrow{أجـ}\|$ = ...

(أ) $\sqrt{١٣٧}$ (ب) $\sqrt{١٤١}$ (جـ) $\sqrt{١٤٦}$ (د) $\sqrt{١٤٧}$

٤٩ الشكل المقابل يمثل متوازى مستطيلات :



أ (٦ ، ٨ ، ٢٤) فإن :

زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{وع}$ هى .....

(أ) (٦٠° ، ١٢٠° ، ٤٥°)

(ب) (٥٣° ٨َ ، ٥٢° ٣٦َ ، ٩٠°)

(جـ) (٥٣° ٨َ ، ٩٠° ، ٥٢° ٣٦َ)

(د) (٥٢° ٣٦َ ، ٤٥° ، ٩٠°)

٥٠ إذا كان (٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠°) هى زوايا الاتجاه لمتجه $\overrightarrow{أ}$ فإن زوايا الاتجاه للمتجه $٢\overrightarrow{أ}$ هى .....

(أ) (٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠°) (ب) (٦٠° ، ١٢٠° ، ١٨٠°)

(جـ) (-٣٠° ، -٦٠° ، -٩٠°) (د) (٦٠° ، ١٢٠° ، ٩٠°)

٥١ إذا كان : (٦٠° ، ١٣٥° ، ٦٠°) هى زوايا الاتجاه لمتجه $\overrightarrow{أ}$ فإن زوايا الاتجاه للمتجه $-٢\overrightarrow{أ}$ هى .....

(أ) (٦٠° ، ١٣٥° ، ٦٠°) (ب) (١٢٠° ، ٢٧٠° ، ١٢٠°)

(جـ) (٣٠° ، ٤٥° ، ٣٠°) (د) (١٢٠° ، ٤٥° ، ١٢٠°)

٥٢ أى المتجهات الآتية تمثل متجه وحدة عمودى على المستوى الإحداثى س ص ؟

(أ) $\overrightarrow{س}$ (ب) $\overrightarrow{ص}$ (جـ) $\overrightarrow{ع}$ (د) (٠ ، ٠ ، ٢)

(٥٣) إذا كانت : ($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$) هى زوايا اتجاه متجه بحيث $\theta_{س} + \theta_{ص} = ٩٠°$

فإى مما يأتى غير صحيح ؟

(أ) $\theta_{ع} = ٩٠°$

(ب) المتجه يقع فى مستوى الإحداثيات س ص

(جـ) $جتا^{٢} \theta_{س} + جتا^{٢} \theta_{ص} = ١$

(د) المتجه يصنع زوايا متساوية مع محاور الاحداثيات.

(٥٤) إذا كانت : ($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$) هى زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى الفراغ ثلاثى الأبعاد

فأى مما يأتى خطأ ؟

(١) $\theta_{س} + \theta_{ص} \leq ٩٠°$

(٢) $جا^{٢}(\frac{\pi}{٢} - \theta_{س}) + جا^{٢}(\frac{\pi}{٢} - \theta_{ص}) + جا^{٢}(\frac{\pi}{٢} - \theta_{ع}) = ١$

(٣) ($-\theta_{س}$ ، $-\theta_{ص}$ ، $-\theta_{ع}$) هى زوايا الاتجاه للمتجه $-\overrightarrow{أ}$

(٤) $\theta_{س} = \pm جتا^{-١}(\frac{أ_{س}}{\|\overrightarrow{أ}\|})$

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط.

(جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (٣) ، (٤) فقط.

٨ إذا كان : (٣ ل + ٢ ، ٩ ، م − ٤) = (−٤ ، $ن^{٢}$ ، ١٤) فما قيمة : ل ، م ، ن ؟

«−٢ ، ١٨ ، ±٢»

٩ أوجد قيمة : ل ، م ، ن التى تجعل المتجهين $\overrightarrow{أ}$ = (ل − ٤ ، $م^{٢}$ − ٣ ، ١)

، $\overrightarrow{ب}$ = (٥ ، ١ ، $ن^{٢}$) متساويين.

«٩ ، ±٢ ، ±١»

١٠ إذا كان : (٢ س + ١ ، ٥ ، ك + ٤) = (−١ ، $ص^{٢}$ − ٤ ، س + ١)

فما قيمة : س ، ص ، ك ؟

«−١ ، ±٣ ، −٤»

١١ أوجد قيم : ل ، م ، ن فى كل مما يأتى :

(١) ٢ (٣ ، م ، ل) + ٣ (ن ، −٢ ، ٤) = (٣ ، ٢ ، ٤)

(٢) ل (−٦ ، م ، ٢ ن) = ١٢ $\overrightarrow{س}$ + ١٠ $\overrightarrow{ص}$ − ٤ $\overrightarrow{ع}$

(٣) ل (−٢ ، ٣ ، ١) + م (−٣ ، ١ ، ٢) + ن $\overrightarrow{ع}$ = (−٨ ، ٥ ، ٨)

١٢ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، ٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٢ ، ٥ ، −١) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (٨ ، ١٩ ، ٤)

أوجد : (١) بدلالة متجهات الوحدة الأساسية كلًا من : $\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{حـ}$ ، ٢ ($\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}$)

(٢) $\overrightarrow{حـ}$ بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

١٣ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٣ ، ٢ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٣ ، ٠) أوجد : $\|\overrightarrow{أ}\|$ ، $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|$

«$\sqrt{١٤}$ ، $\sqrt{٣٣}$»

١٤ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، −٦ ، ٢) ، ٣ ($\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$) = ٧ $\overrightarrow{ب}$ − ٢ $\overrightarrow{أ}$ أوجد : $\|\overrightarrow{ب}\|$

«$\sqrt{١٤}$»

١٥ إذا كان : أ (−١ ، ٤ ، ٦) ، ب (٢ ، ٥ ، −١) أوجد : $\|\overrightarrow{أب}\|$

«$\sqrt{٥٩}$»

١٦ إذا كان : ك $\|٤ \overrightarrow{أ}\|$ = $\|-٣ \overrightarrow{أ}\|$

أوجد قيمة : ك حيث $\overrightarrow{أ}$ متجه غير صفرى فى الفراغ الثلاثى.

«$\frac{٣}{٤}$»

١٧ إذا كان : $\|-٨ \overrightarrow{أ}\|$ = ٥ $\|ك \overrightarrow{أ}\|$

أوجد قيمة : ك حيث $\overrightarrow{أ}$ متجه غير صفرى فى الفراغ الثلاثى

«$\pm\frac{٨}{٥}$»

١٨ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، ٠ ، ٠) ، $\overrightarrow{س}$ = (١ ، ٠ ، ٠)

أثبت أن : $\|\overrightarrow{أ}\|$ = |ك| $\|\overrightarrow{س}\|$ حيث ك ∈ ح*

١٩ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، −٢ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٢ ، ٤ ، ٢) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (٧ ، ١ ، −٣)

أوجد :

(١) $\|\overrightarrow{أ} + ٢ \overrightarrow{حـ}\|$ (٢) $\|٥ \overrightarrow{ب} + ٣ \overrightarrow{أ}\|$ (٣) $\|\overrightarrow{أ} + \frac{١}{٢} \overrightarrow{ب}\|$

(٤) $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - ٢ \overrightarrow{حـ}\|$ (٥) $\|٢ \overrightarrow{أ} + ٣ \overrightarrow{ب} - ٤ \overrightarrow{حـ}\|$

«$\sqrt{٢٩٣}$ ، $\sqrt{٦٨١}$ ، $\sqrt{٢٩}$ ، $\sqrt{٣١٣}$ ، $\sqrt{٤١}$»

٢٠ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٢\,\overrightarrow{س} - ٣\,\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص}$ أوجد :

(١) $٢\,\overrightarrow{أ} - ٣\,\overrightarrow{ب}$ (٢) $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|$ ، $\|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$ ماذا تستنتج ؟

٢١ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين فى $ح^{٣}$ هل $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$ ؟
إذا كان الطرفان غير متساويين أى الطرفين هو الأكبر ؟

٢٢ أوجد متجه الوحدة فى اتجاه كل من المتجهات الآتية :

(١) $\overrightarrow{أ} = (٨ ، -٤ ، -٨)$
(٢) $\overrightarrow{ح} = ٣\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ع}$
(٣) $\overrightarrow{هـ} = ١٢\,\overrightarrow{س} + ٥\,\overrightarrow{ص}$
(٤) $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$
(٥) $\overrightarrow{ء} = (٢ ، -١ ، ٣)$
(٦) $\overrightarrow{م} = (٢ ، ٢ ، -١)$

٢٣ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-١ ، ٣ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٤ ، ٢ ، -١)$ أوجد متجه الوحدة فى اتجاه :

(١) $\overrightarrow{أ}$ (٢) $\overrightarrow{ب}$ (٣) $\overrightarrow{أب}$ (٤) $\overrightarrow{ب أ}$

٢٤ إذا كان : $\overrightarrow{ح} = \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ هو متجه وحده فى اتجاه كل من $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$
وكان : $\|٣\,\overrightarrow{أ}\| = \|-٥\,\overrightarrow{ب}\| = ١٥$ أوجد كلًا من : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

٢٥ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ متجه وحدة حيث $\overrightarrow{أ} = \left(ك ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$ أوجد : ك

$\pm\frac{١}{٣}$

٢٦ إذا كان المتجهان : $\overrightarrow{ب} = \left(ل ، ٤م ، \frac{١}{٥}\right)$ ، $\overrightarrow{ح} = \frac{-٢\sqrt{٢}}{٥}\,\overrightarrow{س} + \frac{٤}{٥}\,\overrightarrow{ص} + \frac{ن}{٥}\,\overrightarrow{ع}$
هما متجها وحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ}$

(١) أوجد : ل ، م ، ن (٢) إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = ١٥$ أوجد : $\overrightarrow{أ}$

٢٧ أوجد جيوب تمام الاتجاه لكل من المتجهات الآتية :

(١) $\overrightarrow{أ} = ٥\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص} + \sqrt{٧}\,\overrightarrow{ع}$
(٢) $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ٢ ، ٢\sqrt{٢})$
(٣) $\overrightarrow{ح} = ٤\,\overrightarrow{س} - ٣\,\overrightarrow{ع}$
(٤) $\overrightarrow{ء} = -٥\,\overrightarrow{ص} + ١٢\,\overrightarrow{ع}$
(٥) $\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$
(٦) $\overrightarrow{م} = ٣\,\overrightarrow{س} + ١٢\,\overrightarrow{ص} + ٤\,\overrightarrow{ع}$

٢٨ أوجد قياسات زوايا الاتجاه لكل من المتجهات الآتية :

(١) $\overrightarrow{أ} = (٨ ، ٦ ، -١٠)$
(٢) $\overrightarrow{ء} = ٥\,\overrightarrow{س} - ٥\,\overrightarrow{ص} + ٥\,\overrightarrow{ع}$
(٣) $\overrightarrow{م} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$
(٤) $\overrightarrow{ح} = -٢\,\overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص} - ٦\,\overrightarrow{ع}$
(٥) $\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{ع}$

٢٩ أوجد قياسات الزوايا التى يصنعها المتجه $\overrightarrow{ح} = ٣\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص} + ٥\,\overrightarrow{ع}$ مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

٣٠ إذا كان المتجه $\overrightarrow{أ}$ يصنع مع محاور الإحداثيات الموجبة س ، ص ، ع زوايا قياساتها ٦٠° ، ٨٠° ، θ° حيث θ زاوية حادة.

(١) أوجد قيمة : θ
(٢) اكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ إذا علمت أن : $\|\overrightarrow{أ}\| = ١٣$

٣١ اذكر زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لكل محور من محاور الإحداثيات الأساسية فى الفراغ ثلاثى الأبعاد.

٣٢ أوجد زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه يصنع مع محاور الإحداثيات الموجبة زوايا متساوية فى القياس.

٣٣ أوجد زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ الذى يقع فى المستوى الإحداثى ص ع ويصنع زاوية قياسها ٦٠° مع المحور $\overrightarrow{ص}$

٣٤ (دور أول ٢٠١٧) أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ الذى معياره $٢١\sqrt{٣}$ ويصنع زوايا متساوية القياس مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

٣٥ المتجه $\overrightarrow{أ}$ يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب للمحور س ، أخرى قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب للمحور ص أوجد قياس الزاوية التى يصنعها مع الاتجاه الموجب للمحور ع

٣٦ إذا كان المتجه $\overrightarrow{أ}$ يوازى المستوى الإحداثى ص ع ماذا يمكن أن تقول عن إحداثيات المتجه $\overrightarrow{أ}$ ؟

٣٧ إذا كانت : $\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$ هى زوايا الاتجاه لمتجه مع محاور الإحداثيات الموجبة

أثبت أن : $جا^{٢}\theta_{س} + جا^{٢}\theta_{ص} + جا^{٢}\theta_{ع} = ٢$

٣٨ إذا كانت : $\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$ هى زوايا الاتجاه لمتجه ما

أثبت أن : $جتا ٢\theta_{س} + جتا ٢\theta_{ص} + جتا ٢\theta_{ع} + ١ =$ صفر

٣٩ فى الشكل المقابل :

مكعب طول حرفه ٥ وحدة طولية ، $\overrightarrow{ق}$ قوة معيارها ٢٥ نيوتن

أوجد :

① جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{ق}$

② قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{ق}$

③ متجه القوة $\overrightarrow{ق}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ ثلاثى الأبعاد.

٤٠ الشكل المقابل يمثل قوة $\overrightarrow{ق}$ مقدارها ٢٠٠ نيوتن :

① عبر عن القوة $\overrightarrow{ق}$ بالصورة الجبرية.

② أوجد قياسات زوايا الاتجاه للقوة $\overrightarrow{ق}$

٤١ أوجد مركبات القوة $\overrightarrow{ق}$

التى مقدارها ١٢ $\sqrt{٢٩}$ نيوتن.

٤٢ فى الشكل المقابل :

أوجد جيوب التمام الاتجاهيه للمتجه $\overrightarrow{و أ}$

٤٣ إذا كانت قوة الشد فى الخيط تساوى ٢١ نيوتن

أوجد المركبات الجبرية للقوة $\overrightarrow{ق}$

فى اتجاهات محاور الإحداثيات.

٤٤ الشكل المقابل يمثل متجه $\overrightarrow{أ}$ معياره ١٠ وحدات :

① عبر عن المتجه $\overrightarrow{أ}$ بالصورة الجبرية (المركبات الكارتيزية)

② أوجد قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

٤٥ فى الشكل المقابل :

① أوجد $\|\overrightarrow{أ}\|$

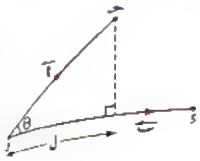
② أوجد $\overrightarrow{أ}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ ثلاثى الأبعاد.

③ أوجد قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

الدرس 3

الضرب القياسى لمتجهين

مركبة متجه فى اتجاه متجه آخر



إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين فى الفراغ ثلاثى الأبعاد ومثلناهما هندسيًا بالقطعتين المستقيمتين الموجهتين $\overrightarrow{وحـ}$ ، $\overrightarrow{وء}$ الخارجتين من نفس النقطة و فإن :

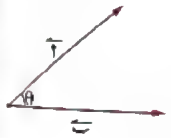
- θ هى قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$
- $\|\overrightarrow{أ}\|$ هو طول القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{وحـ}$
- $\|\overrightarrow{ب}\|$ هو طول القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{وء}$
- ل هو طول مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$

من هندسة الشكل المقابل ∴ ل = وحـ جتا θ

∴ مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ = $\|\overrightarrow{أ}\|$ جتا θ

الضرب القياسى لمتجهين

تعريف



إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين قياس الزاوية بينهما θ

فإن حاصل ضرب :

معيار أحد المتجهين و مركبة المتجه الآخر عليه

يعرف بالضرب القياسى للمتجهين ويرمز لها بالرمز ($\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$)

أى أن : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$ جتا θ

أى أن : حاصل الضرب القياسى لمتجهين هو الكمية القياسية المساوية لحاصل ضرب معيار المتجه الأول فى معيار المتجه الثانى فى جيب تمام الزاوية الصغرى المحصورة بينهما.

مثال : إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ٥ ، $\|\overrightarrow{ب}\|$ = ٤ ، θ = ٦٠°

فإن : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$ جتا θ = ٥ × ٤ × جتا ٦٠° = ١٠

ملاحظات

- فى تعريف حاصل الضرب القياسى لمتجهين استخدمنا الزاوية الصغرى المحصورة بينهما ، ولو أننا استخدمنا الزاوية الكبرى لحصلنا على نفس النتيجة.

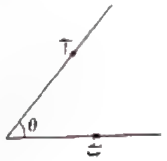
لأن : جتا (٣٦٠° − θ) = جتا θ ولكننا نستخدم الزاوية الصغرى للسهولة فقط.

- عند تعيين الزاوية الصغرى بين متجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يجب أن يكون المتجهان خارجين من (أو داخلين إلى) نفس النقطة.

- إذا كانت القطعتان المستقيمتان الموجهتان الممثلتان لهما إحداهما نقطة نهايتها (و) هى نفس نقطة بداية الأخرى فإن الزاوية الصغرى بين المتجهين تكون هى الزاوية المحصورة بين إحداهما وامتداد القطعة الأخرى كما بالشكلين التاليين :

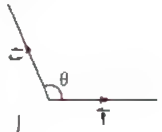
- إذا كان : θ هو قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

حيث θ ∈ [٠ ، π] فإن :



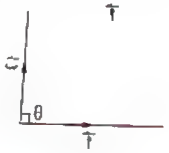
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ > ٠ (موجب)

إذا كان : ٠° < θ < ٩٠°



$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ < ٠ (سالب)

إذا كان : ٩٠° < θ < ١٨٠°



$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = ٠

إذا كان : θ = ٩٠°

أى أن : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان.

(٤) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\|$

إذا كان : $\theta = ٠°$

أى أن : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان وفى نفس الاتجاه

ومنها فإن : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|^٢$

(٥) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = -\|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\|$ إذا كان : $\theta = ١٨٠°$

أى أن : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان وكل منهما فى عكس اتجاه الآخر.

(٤) وحدات قياس الكمية القياسية $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ تساوى حاصل ضرب وحدتى قياس معيار كل من $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

* خواص الضرب القياسى :

(١) خاصية الإبدال : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{أ}$

(٢) خاصية التوزيع : $\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}) = \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{حـ}$

(٣) إذا كان ك عدد حقيقى فإن : $(ك \overrightarrow{أ}) \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \cdot (ك \overrightarrow{ب}) = ك (\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب})$

(٤) إذا كان أحد المتجهين $\overrightarrow{أ}$ أ، $\overrightarrow{ب}$ أو كلاهما هو المتجه الصفرى

فإن : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = صفر لأن معيار المتجه الصفرى = صفر

أى أن : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{و} = \overrightarrow{و} \cdot \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و} \cdot \overrightarrow{و}$ = صفر

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = صفرًا فإما :

• $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ أحدهما أو كلاهما متجه صفرى.

• وإما $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان.

مثال (١)

أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٥ سم أوجد :

(١) $\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{حـ ء}$ (٢) $\overrightarrow{أ ء} \cdot \overrightarrow{حـ ب}$ (٣) $\overrightarrow{أ ء} \cdot \overrightarrow{ب أ}$ (٤) $\overrightarrow{أ ء} \cdot \overrightarrow{أ حـ}$ (٥) $\overrightarrow{أ حـ} \cdot \overrightarrow{ب أ}$

∵ $\overrightarrow{أ ء}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ متوازيان وفى اتجاه واحد.

∴ θ (قياس الزاوية بينهما) = ٠°

∴ $\overrightarrow{أ ء} \cdot \overrightarrow{حـ ء} = \|\overrightarrow{ب أ}\| \|\overrightarrow{حـ ء}\|$ جتا ٠° = ٥ × ٥ × ١ = ٢٥

∵ $\overrightarrow{أ ء}$ ، $\overrightarrow{حـ ب}$ متوازيان وفى اتجاهين متضادين.

∴ θ (قياس الزاوية بينهما) = ١٨٠°

∴ $\overrightarrow{أ ء} \cdot \overrightarrow{حـ ب} = \|\overrightarrow{أ ء}\| \|\overrightarrow{حـ ب}\|$ جتا ١٨٠° = ٥ × ٥ × -١ = -٢٥

∵ $\overrightarrow{أ ء}$ ، $\overrightarrow{ب أ}$ متعامدان. ∴ $\overrightarrow{أ ء} \cdot \overrightarrow{ب أ}$ = صفرًا

∵ $\overrightarrow{أ ء}$ ، $\overrightarrow{أ حـ}$ يحصران بينهما الزاوية الصغرى ء أ حـ التى قياسها = ٤٥°

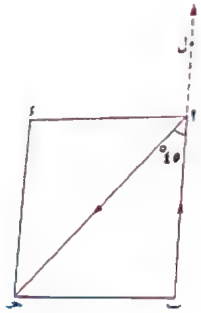
∵ $\|\overrightarrow{أ حـ}\| = ٥\sqrt{٢}$ سم (قطر المربع)

∴ $\overrightarrow{أ ء} \cdot \overrightarrow{أ حـ} = \|\overrightarrow{أ ء}\| \|\overrightarrow{أ حـ}\|$ جتا ٤٥° = ٥ × ٥ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ٢٥

لإيجاد الزاوية الصغرى بين المتجهين $\overrightarrow{أ حـ}$ ، $\overrightarrow{ب أ}$

نرسمهما خارجين من نقطة (أ) فتكون ∠ ل أ حـ

هى الزاوية الصغرى بينهما وقياسها = ١٣٥°



∴ $\overrightarrow{أ حـ} \cdot \overrightarrow{ب أ} = \|\overrightarrow{أ حـ}\| \|\overrightarrow{ب أ}\|$ جتا ١٣٥°

= ٥ $\sqrt{٢}$ × ٥ × $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = -٢٥

∵ $\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{أ حـ} = -(\overrightarrow{أ حـ} \cdot \overrightarrow{ب أ}) = -\|\overrightarrow{أ حـ}\| \|\overrightarrow{ب أ}\|$ جتا ٤٥°

= -٥ $\sqrt{٢}$ × ٥ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = -٢٥

ملاحظة

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص)$ فى المستوى الإحداثى فى بعدين

فإن : $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = أ_س ب_س + أ_ص ب_ص$

مثال 4

أوجد $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب}$ فى كل من الحالات الآتية :

(١) $\overrightarrow{أ} = (-٢ ، ٣ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٧ ، ٢ ، -١)$

(٢) $\overrightarrow{أ} = ٣ \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ع}$

(٣) $\overrightarrow{أ} = (-٥ ، ١ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = ٤ \overrightarrow{س} + ٥ \overrightarrow{ص}$

(٤) $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -٢ ، ١)$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٥$ ، $\theta = ٦٠°$

الحل

(١) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = (-٢ ، ٣ ، ٥) . (٧ ، ٢ ، -١) = -٢ \times ٧ + ٣ \times ٢ + ٥ \times -١ = -١٣$

(٢) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = (٣ ، -٤ ، ١) . (-١ ، ٠ ، ٤) = ٣ \times -١ + -٤ \times ٠ + ١ \times ٤ = ١$

(٣) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = (-٥ ، ١ ، -٢) . (٤ ، ٥ ، ٠) = -٥ \times ٤ + ١ \times ٥ + -٢ \times ٠ = -١٥$

(٤) $\because \overrightarrow{أ} = (٢ ، -٢ ، ١)$ $\therefore \|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٢^٢ + (-٢)^٢ + ١} = ٣$

$\therefore \overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\| \text{ جتا } \theta = ٣ \times ٥ \times \text{جتا } ٦٠° = ٧.٥$

* **الزاوية بين متجهين :** إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين قياس الزاوية الصغرى بينهما θ

$\therefore \overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\| \text{ جتا } \theta$

$\therefore \boxed{\text{جتا } \theta = \frac{\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\|}}$ حيث $٠° \leq \theta \leq ١٨٠°$

$\boxed{\text{جتا } \theta = ١}$ ← فإن ← $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ وليهما نفس الاتجاه

لاحظ أنه إذا كانت :

$\boxed{\text{جتا } \theta = -١}$ ← فإن ← $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ وكل منهما فى عكس اتجاه الآخر

$\boxed{\text{جتا } \theta = ٠}$ ← فإن ← $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

مثال 5

أوجد قياس الزاوية بين المتجهين : $\overrightarrow{أ} = ٣ \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص} + \sqrt{١١} \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = (-١ ، -٢ ، ٢)$

الحل

$\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٣^٢ + (-٤)^٢ + (\sqrt{١١})^٢} = ٦$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{(-١)^٢ + (-٢)^٢ + ٢^٢} = ٣$

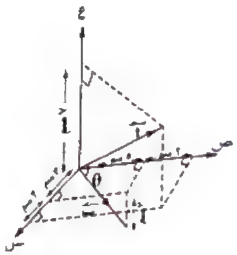
$\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = (٣ ، -٤ ، \sqrt{١١}) . (-١ ، -٢ ، ٢) = -٣ + ٨ + ٢\sqrt{١١} = ٥ + ٢\sqrt{١١}$

$\text{جتا } \theta = \frac{\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\|} = \frac{٥ + ٢\sqrt{١١}}{٦ \times ٣}$ $\therefore \theta \simeq ٦٥° ٤٤' ٤٩''$

مثال 6

فى الشكل المقابل :

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$



الحل

$\overrightarrow{أ} = (٥ ، ٧ ، ٧)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ٥ ، -٣)$

$\text{جتا } \theta = \frac{(٥ ، ٧ ، ٧) . (٣ ، ٥ ، -٣)}{\sqrt{٢٥ + ٤٩ + ٤٩} \times \sqrt{٩ + ٢٥ + ٩}} = \frac{١٥ + ٣٥ - ٢١}{\sqrt{١٢٣} \times \sqrt{٤٣}} = \frac{٢٩}{\sqrt{١٢٣ \times ٤٣}}$

$\therefore \theta = ٥٨° ٢٩' ٦٦''$

مثال 7

إذا كان : Δ أ ب حـ هو مثلث قائم الزاوية فى ب حيث :

أ $(-١ ، ٣)$ ، ب $(-٢ ، ٥ ، ١)$ ، حـ $(-٤ ، ٤ ، ٢)$

الحل

$\overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (٢ ، -١ ، ٣) - (-٢ ، ٥ ، ١) = (٤ ، -٦ ، ٢)$

$\overrightarrow{ب حـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{ب} = (-٤ ، ٤ ، ٢) - (-٢ ، ٥ ، ١) = (-٢ ، -١ ، ١)$

∴ جتا ب = $\frac{\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب حـ}}}{\|\overrightarrow{\text{ب أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب حـ}}\|}$ = $\frac{(٤ ، -٦ ، ٢) \cdot (-٢ ، -١ ، ١)}{\sqrt{١٦ + ٣٦ + ٤} \times \sqrt{٤ + ١ + ١}}$ = $\frac{-٨ + ٦ + ٢}{\sqrt{٥٦} \times \sqrt{٦}}$ = صفر

∴ ق (∠ب) = ٩٠° ∴ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

ملاحظات

① سبق وبينا أن مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ ويرمز لها بالرمز

ا = $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا θ حيث θ هى قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

، ∵ جتا θ = $\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$ ∴ ا = $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \times \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$ ∴ ا = $\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$

أى أن : مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ هى : $\boxed{\text{ا} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}}$

وتسمى أيضًا بالمركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$

أو مسقط المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$

② المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$

= (المركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$) × (متجه وحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$)

= $\left(\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}\right) \left(\frac{\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}\right) = \left(\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}\right) \overrightarrow{\text{ب}}$

مثال ٨

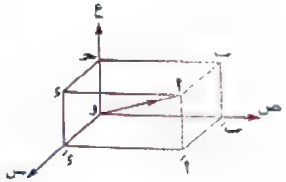
فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء أَ بَ حـَ ءَ هو متوازى مستطيلات ، أ (٣ ، ٤ ، ٥)

أوجد :

① مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{وأ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ءَبَ}}$

② المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{وأ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ءَبَ}}$



الحل

من الشكل نجد أن : أ (٣ ، ٤ ، ٥) ، ب (٠ ، ٤ ، ٥) ، ءَ (٣ ، ٠ ، ٠)

$\overrightarrow{\text{ءَبَ}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{ءَ}}$ = (٠ ، ٤ ، ٥) − (٣ ، ٠ ، ٠) = (−٣ ، ٤ ، ٥)

مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{وأ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ءَبَ}}$ = $\frac{\overrightarrow{\text{وأ}} \cdot \overrightarrow{\text{ءَبَ}}}{\|\overrightarrow{\text{ءَبَ}}\|}$ = $\frac{(٣ ، ٤ ، ٥) \cdot (-٣ ، ٤ ، ٥)}{\sqrt{٩ + ١٦ + ٢٥}}$

= $\frac{-٩ + ١٦ + ٢٥}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{٣٢}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{١٦}{٥}\sqrt{٢}$

المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{وأ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ءَبَ}}$

= $\left(\frac{\overrightarrow{\text{وأ}} \cdot \overrightarrow{\text{ءَبَ}}}{\|\overrightarrow{\text{ءَبَ}}\|}\right) \left(\overrightarrow{\text{ءَبَ}}\right)$ = $\frac{١٦}{٢٥}$ (−٣ ، ٤ ، ٥) = $\left(\frac{-٤٨}{٢٥} ، \frac{٦٤}{٢٥} ، \frac{١٦}{٥}\right)$

مثال ٩

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ

ء ∈ $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ ، ء ∈ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، أ ء = ٣ سم ، ب ء = ٢ سم

أوجد : $\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ء حـ}}$

الحل

$\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ء حـ}}$ = $\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot (\overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}})$ = $\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ حـ}}$

= ٥ × ٣ جتا صفر + صفر = ١٥

لاحظ أن

تم الحل بدون إيجاد قياس الزاوية بين $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء حـ}}$

أو

$\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ء حـ}}$ = $\|\overrightarrow{\text{ب أ}}\|$ × (مسقط $\overrightarrow{\text{ء حـ}}$ على $\overrightarrow{\text{ب أ}}$)

= ب أ × ء أ = ٥ × ٣ = ١٥

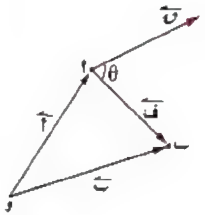
عمل المبذول من قوة :

إذا أثرت قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ على جسم ما فحركته

من $\overrightarrow{\text{أ}}$ إلى $\overrightarrow{\text{ب}}$ فإننا نقول إن القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ قد بذلت شغلًا (ش)

حيث ش = $\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ف}}$

= $\|\overrightarrow{\text{ق}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ف}}\|$ جتا θ



ملاحظات

- إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ فى نفس اتجاه الإزاحة (θ = صفر°) فإن : $ش = \|\overleftarrow{ق}\| \, \|\overleftarrow{ف}\|$!
- إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ عكس اتجاه الإزاحة (θ = ١٨٠°) فإن : $ش = -\|\overleftarrow{ق}\| \, \|\overleftarrow{ف}\|$
- إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ عمودية على اتجاه الإزاحة (θ = ٩٠°) فإن : $ش = ٠$
- إذا كانت وحدة قياس مقدار القوة بالنيوتن ، مقدار الإزاحة بالمتر فإن الشغل المبذول يكون بالچول «الچول = نيوتن. متر»
- إذا كانت وحدة قياس مقدار القوة بالداين ، مقدار الإزاحة بالسم فإن الشغل المبذول يكون بالإرج «الإرج = داين. سم»

مثال ١٠

أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ مقدارها $٢\sqrt{٦}$ نيوتن وجيوب تمام الاتجاه لها $\left(\frac{١}{\sqrt{٦}} ، \frac{٢}{\sqrt{٦}} ، \frac{-١}{\sqrt{٦}}\right)$ على جسيم فحركته من نقطة أ (٢ ، −٣ ، ١) إلى نقطة ب (٤ ، −١ ، ٥)

أوجد الشغل المبذول من القوة $\overleftarrow{ق}$ علمًا بأن الإزاحة مقدرة بالمتر.

الحل

$\overleftarrow{ق} = ٢\sqrt{٦}\left(\frac{١}{\sqrt{٦}} ، \frac{٢}{\sqrt{٦}} ، \frac{-١}{\sqrt{٦}}\right) = (٢ ، ٤ ، -٢)$

، $\overleftarrow{ف} = \overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ} = (٤ ، -١ ، ٥) - (٢ ، -٣ ، ١) = (٢ ، ٢ ، ٤)$

$\therefore ش = \overleftarrow{ق} \cdot \overleftarrow{ف} = (٢ ، ٤ ، -٢) \cdot (٢ ، ٢ ، ٤) = ٤ + ٨ - ٨ = ٤$ چول.

مثال ١١

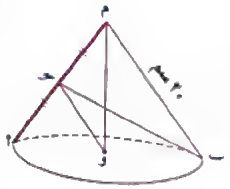
فى الشكل المقابل :

مخروط دائرى قائم محيط قاعدته = ٢٤π سم

، طول راسمه = ٢٠ سم

، $\overline{أب}$ قطر فى القاعدة التى مركزها (و)

أوجد : $\overleftarrow{بحـ} \cdot \overleftarrow{حـو}$



الحل

محيط قاعدة المخروط = ٢٤π

$\therefore ٢\pi$ نق = ٢٤π

$\therefore$ نق = ١٢ سم

من هندسة الشكل :

$\therefore$ و = $\sqrt{(٢٠)^٢ - (١٢)^٢} = ١٦$ سم

$\therefore$ و منتصف $\overline{أب}$ ، حـ منتصف $\overline{أم}$

$\therefore$ جتا(دم ب و) = $\frac{١٢}{٢٠} = \frac{٣}{٥}$

$\therefore \overleftarrow{بحـ} \cdot \overleftarrow{حـو} = (\overleftarrow{بو} + \overleftarrow{وحـ}) \cdot \overleftarrow{حـو}$

$= \overleftarrow{بو} \cdot \overleftarrow{حـو} + \overleftarrow{وحـ} \cdot \overleftarrow{حـو}$

$= \overleftarrow{بو} \cdot \overleftarrow{حـو} - \overleftarrow{وحـ} \cdot \overleftarrow{وحـ}$

$= \|\overleftarrow{بو}\| \, \|\overleftarrow{حـو}\| \, جتا(دحـ و ب) - \|\overleftarrow{وحـ}\|^٢$

$= ١٢ \times ١٠ \times \frac{-٣}{٥} - (١٠)^٢ = -١٧٢$

لاحظ أن

جتا(دحـ و ب) = −جتا(دم ب و)

$= -\frac{٣}{٥} = \frac{-٣}{٥}$

لأن $\overline{أم}$ // $\overline{وحـ}$

طريقة أخرى

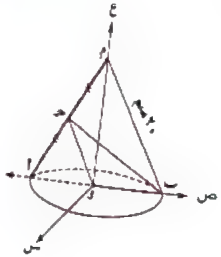
$\overleftarrow{بحـ} \cdot \overleftarrow{حـو} = \left[\frac{١}{٢}(\overleftarrow{بم} + \overleftarrow{بأ})\right] \cdot \left[-\frac{١}{٢}\overleftarrow{بم}\right]$

$= -\frac{١}{٤}\left[\|\overleftarrow{بم}\|^٢ + \overleftarrow{بأ} \cdot \overleftarrow{بم}\right]$

$= -\frac{١}{٤}\left[٤٠٠ + ٢٤ \times ٢٠ \text{ جتا ب}\right]$

$= -\frac{١}{٤}\left[٤٠٠ + ٢٤ \times ٢٠ \times \frac{١٢}{٢٠}\right] = -١٧٢$

طريقة باستخدام الإحداثيات



م(٠ ، ١٢ ، ٠) ، و(٠ ، ٠ ، ٠)

أ(٠ ، −١٢ ، ٠) ، حـ(٠ ، −٦ ، ٨)

$\overleftarrow{بحـ} = \overleftarrow{حـ} - \overleftarrow{ب} = (٠ ، -١٨ ، ٨)$

$\overleftarrow{حـو} = \overleftarrow{و} - \overleftarrow{حـ} = (٠ ، ٦ ، -٨)$

$\overleftarrow{بحـ} \cdot \overleftarrow{حـو} = (٠ ، -١٨ ، ٨) \cdot (٠ ، ٦ ، -٨) = -١٧٢$

درس 3 على الضرب القياسى لمتجهين

اختبار تفاعلى

• مهم • للتفوق ∴ مستويات عليا ▭ من أسئلة الكتاب المدرسى

١ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين ، قياس الزاوية بينهما ١٣٥°

وكان : $\|\overleftarrow{أ}\| = ٦\sqrt{٢}$ ، $\|\overleftarrow{ب}\| = ١٠\sqrt{٢}$ أوجد : $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$ ٦٠

٢ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين ، قياس الزاوية بينهما ٦٠° وكان $\|\overleftarrow{أ}\| = ٣$ ، $\|\overleftarrow{ب}\| = ٦$

أوجد : $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$ ٩

٣ أوجد $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$ فى كل من الحالات الآتية :

١) $\overleftarrow{أ} = (٥ ، ١ ، -٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٤ ، -٤ ، ٣)$

٢) $\overleftarrow{أ} = (-٢ ، ٤ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = ٥\overleftarrow{س} - ٣\overleftarrow{ص} + ٦\overleftarrow{ع}$

٣) $\overleftarrow{أ} = -٣\overleftarrow{س} - ٢\overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ب} = ٦\overleftarrow{س} + ٤\overleftarrow{ص} + ٢\overleftarrow{ع}$

٤) $\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = ٢\overleftarrow{س} - ٣\overleftarrow{ع}$

٥) $\overleftarrow{أ} = ٢\overleftarrow{س} - ٥\overleftarrow{ص} + ٣\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ب} = ٣\overleftarrow{س} - ٦\overleftarrow{ع}$

٤ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$ إذا كان :

١) $\|\overleftarrow{أ}\| = ١٦$ ، $\|\overleftarrow{ب}\| = ١٠$ ، $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = ٨٠$ ٦٠°

٢) $\|\overleftarrow{أ}\| = ٢٥$ ، $\|\overleftarrow{ب}\| = ١٨$ ، $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = -٢٢٥\sqrt{٢}$ ١٣٥°

٣) $\|\overleftarrow{أ}\| = ٦$ ، $\|\overleftarrow{ب}\| = \frac{٥}{٢}\|\overleftarrow{أ}\|$ ، $\overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{أ} = ٨١$ ٥١° ٢٥′

٤) $\|\overleftarrow{أ}\| = ٣٢$ ، $\|\overleftarrow{ب}\| = ٢٥$ ، $\overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{أ} = -٤٨٠$ ١٢٦° ٥٢′

٥ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين فى كل من الحالات الآتية :

١) (٥ ، ١ ، -٢) ، (١ ، ١ ، -١)

(٢ ، ٢ ، -١٠) ، (٧ ، ٦ ، ٤)

٢) (٤ ، ١ ، ٢) ، (٠ ، -٢ ، ١)

٣) $٤\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص} + ٧\overleftarrow{ع}$ ، $٢\overleftarrow{س} + ٥\overleftarrow{ص} + ٤\overleftarrow{ع}$

$-٢\overleftarrow{ص} + ٨\overleftarrow{ع}$ ، $١٠\overleftarrow{س} - ٥\overleftarrow{ع}$

٦ إذا كانت : $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع}$ متجهات الوحدة لمجموعة يمينية ، فأوجد كلاً من :

$\overleftarrow{س} \cdot \overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص} \cdot \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع} \cdot \overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{س} \cdot \overleftarrow{ص}$ ، $(٣\overleftarrow{س}) \cdot (٤\overleftarrow{ع})$

، $(٥\overleftarrow{س}) \cdot (٢\overleftarrow{س})$

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(دورتان ٢٠١٧) إذا كان : $\overleftarrow{أ} = ٢\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ب} = ٤\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$

فإن : $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} =$ .....

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٨

إذا كان : $\|\overleftarrow{أ}\| = ٥$ ، $\overleftarrow{ب} = (-١ ، ٢ ، ٢)$ وقياس الزاوية بين المتجهين ٣٠°

فإن : $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} =$ .....

(أ) (-٥ ، ١٠ ، ١٠) (ب) $٧.٥\sqrt{٣}$

(جـ) ٧.٥ (د) -٧.٥

إذا كان : $\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص} - ٢\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ب} = ٢\overleftarrow{س} + ٢\overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع}$

فإن : $(\overleftarrow{أ} + ٣\overleftarrow{ب}) \cdot (٢\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}) =$ .....

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

إذا كان : أ (٢ ، ١ ، ٣) ، ب (٣ ، ٥ ، -٢) ، حـ (-١ ، ٤ ، ٠)

فإن : $\overleftarrow{أب} \cdot \overleftarrow{أحـ} =$ .....

(أ) ٢٥ (ب) ٢٤ (جـ) ١٧ (د) ١٢

⑤ إذا كان : ٢ $\overleftarrow{أ}$ = −٦ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$ ، ٣ $\overleftarrow{ب}$ = ٩ $\overleftarrow{س}$ − ١٥ $\overleftarrow{ع}$

فإن : ٣ $\overleftarrow{أ}$. ٢ $\overleftarrow{ب}$ = ...

(أ) −٥٤ (ب) صفر (جـ) ٦ (د) ٥٤

⑥ $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجها وحدة قياس الزاوية بينهما ٤٥° فإن : $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$ = ...

(أ) ٤٥ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) −$\sqrt{٢}$

⑦ إذا كان : ‖$\overleftarrow{أ}$‖ = ١٥ ، ‖$\overleftarrow{ب}$‖ = ٢٠ ، $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$ = −١٥٠ $\sqrt{٣}$

فإن : قياس الزاوية بين المتجهين = ...

(أ) ٣٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٥٠°

⑧ إذا كان : θ قياس الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، ٠ ، ٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٠ ، ٠ ، ٤)

فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

⑨ إذا كان : θ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ = (−٢ ، −٦ ، ١)

، $\overleftarrow{ب}$ = (٢ ، ٦ ، −١) فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

⑩ قياس الزاوية بين المتجهين (٢ ، −٢ ، ٢) ، (١ ، ١ ، ٤) يساوى .....

(أ) ٥٧,٠٢° (ب) ٣٥,٢٦° (جـ) ١٣٤,٣٧° (د) ٠°

⑪ قياس الزاوية بين المتجهين : $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$ هو .....

(أ) جتا$^{-1}$ $\frac{١}{\sqrt{١٥}}$ (ب) جتا$^{-1}$ $\frac{٤}{\sqrt{١٥}}$ (جـ) جتا$^{-1}$ $\frac{٤}{١٥}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

⑫ جيب تمام الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ = (١ ، −٣ ، ٠) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٢ ، ٠ ، ١)

يساوى .....

(أ) $\frac{\sqrt{٢}}{٥}$ (ب) ٥ $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{٥}{\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

⑬ قياس الزاوية بين المتجهين ٢ $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ ، −٤ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$

يساوى .....

(أ) ٣٥° ٤٠َ (ب) ١٠٨° ٤٢َ (جـ) ٣٧° ٥٢َ ٤٠ً (د) ١٤٢° ٢٠َ ٤٠ً

⑭ إذا كان : ‖$\overleftarrow{أ}$‖ = ٤ ، ‖$\overleftarrow{ب}$‖ = ٦ وكان قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$

يساوى ٦٠° فإن : (٢ $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$) . ($\overleftarrow{أ}$ − $\overleftarrow{ب}$) = ...

(أ) ٤٨ (ب) ٣٦ (جـ) ١٢ (د) −١٢

⑮ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين غير صفريين وكان $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$ = صفر

فإن المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ .....

(أ) متوازيان. (ب) يقعان فى المستوى الإحداثى س ص

(جـ) متعامدان. (د) لهما نفس المعيار.

⑯ المتجهان $\overleftarrow{أ}$ = (١ ، ٣ ، −٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (−٢ ، −٦ ، ٤) .....

(أ) متوازيان ولهما نفس الاتجاه. (ب) متوازيان ومتضادان فى الاتجاه.

(جـ) متعامدان. (د) قياس الزاوية بينهما ٦٠°

⑰ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهى وحدة متعامدين فإن : ($\overleftarrow{أ}$ − ٢ $\overleftarrow{ب}$) . (٢ $\overleftarrow{أ}$ + ٥ $\overleftarrow{ب}$) = ...

(أ) −٨ (ب) −٧ (جـ) ٢٤ (د) ٠

⑱ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ + ك $\overleftarrow{ع}$

، $\overleftarrow{ب}$ = −٦ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$ + ٦ $\overleftarrow{ع}$ وكان $\overleftarrow{أ}$ ⊥ $\overleftarrow{ب}$ فإن : ك = ...

(أ) −٤ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٢٤

⑲ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (ك ، −٣ ، ١) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٢ ، ٢ ، −ك) متعامدين

فإن : قيمة ك = ...

(أ) −٩ (ب) −٣ (جـ) ٩ (د) ١٨

⑳ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$. $\overleftarrow{ب}$ = ٤ وكان $\overleftarrow{أ}$ = ك $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ + ٤ $\overleftarrow{ع}$

، $\overleftarrow{ب}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$ + ٢ $\overleftarrow{ع}$ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) −٤ (د) −٧

(٢١) إذا كان : $(٣\,\overleftarrow{أ} \cdot ٢\,\overleftarrow{ب}) = ١٢$ فإن : $(-\overleftarrow{ب} \cdot ٥\,\overleftarrow{أ}) =$ .....

(أ) -١٠ (ب) -٥ (جـ) ٥ (د) ١٠

(٢٢) إذا كان : $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = ١٣$ فإن الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ تكون .....

(أ) حادة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) مستقيمة.

(٢٣) إذا كان : $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$ وكان $[(٢\,\overleftarrow{أ} - ٤\,\overleftarrow{جـ}) \cdot ٣\,\overleftarrow{ب}] = ١٠٨$

فإن : $\overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{جـ} =$ .....

(أ) -٧ (ب) -٨ (جـ) -٩ (د) -١٢

٨ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم أوجد كلاً من :

(١) $\overleftarrow{أب} \cdot \overleftarrow{دجـ}$ (٢) $\overleftarrow{أب} \cdot \overleftarrow{بجـ}$

(٣) $\overleftarrow{أب} \cdot \overleftarrow{جـأ}$

(١٠٠ ، صفر ، -١٠٠)

٩ أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم أوجد كلاً من :

(١) $\overleftarrow{أب} \cdot \overleftarrow{أجـ}$ (٢) $\overleftarrow{أجـ} \cdot \overleftarrow{جـب}$

(٣) $(٤\,\overleftarrow{أب}) \cdot (٣\,\overleftarrow{جـب})$

(٧٢٠ ، -٧٢ ، ٨٦٤)

١٠ (دور أول ٢٠١٧) أ ب جـ د مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم أوجد :

(١) $\overleftarrow{أب} \cdot \overleftarrow{أجـ}$ (٢) $\overleftarrow{أب} \cdot \overleftarrow{جـد}$

(٣) مركبة $\overleftarrow{جـد}$ فى اتجاه $\overleftarrow{بجـ}$

(٣٦ ، -٣٦ ، صفر)

١١ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٨ سم أوجد :

(١) $\overleftarrow{أب} \cdot \overleftarrow{جـد}$ (٢) $(٢\,\overleftarrow{بجـ}) \cdot (\frac{١}{٤}\,\overleftarrow{أد})$ (٣) $\overleftarrow{أب} \cdot \overleftarrow{أجـ}$

(٤) $\overleftarrow{بجـ} \cdot (٢\,\overleftarrow{دب})$ (٥) $\overleftarrow{أجـ} \cdot \overleftarrow{بد}$

(٦٤ ، ٣٢ ، ٦٤ ، -١٢٨ ، صفر)

١٢ أ ب جـ د مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم أوجد :

(١) $٣\,\overleftarrow{أد} \cdot ٢\,\overleftarrow{جـد}$ (٢) $(-٢\,\overleftarrow{أب}) \cdot \overleftarrow{أجـ}$

(٣) $\overleftarrow{بجـ} \cdot (\frac{٥}{٢}\,\overleftarrow{دب})$ (٤) $\overleftarrow{أجـ} \cdot \overleftarrow{بد}$

(صفر ، -٧٢ ، ١٦٠ ، ٢٨)

٧ أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه : ق (∠ب أ جـ) = ٩٠° ، ب جـ = ٢ أ ب = ٨ سم أوجد :

(١) $\overleftarrow{جـأ} \cdot \overleftarrow{جـب}$ (٢) $(\frac{١}{٣}\,\overleftarrow{أد}) \cdot (\frac{١}{٢}\,\overleftarrow{دجـ})$

(٣) $\overleftarrow{أب} \cdot (٣\,\overleftarrow{أد})$ (٤) $(٧\,\overleftarrow{بد}) \cdot \overleftarrow{أجـ}$

(٤٨٠ ، $-\frac{١}{٢}$ ، $-١٦\sqrt{٣}$ ، ٣٣٦)

٨ أ ب جـ د معين طولا قطريه $\overleftarrow{أجـ}$ ، $\overleftarrow{بد}$ هما ٢٤ ، ٣٢ من السنتيمترات أوجد :

(١) $\overleftarrow{أب} \cdot (-٢\,\overleftarrow{دجـ})$ (٢) $(\frac{١}{٢}\,\overleftarrow{أجـ}) \cdot \overleftarrow{دب}$

(٣) $\overleftarrow{أد} \cdot \overleftarrow{بد}$ (٤) $\overleftarrow{بأ} \cdot \overleftarrow{بجـ}$

(-٨٠٠ ، صفر ، -١٢٠ ، ١٦٢)

٩ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، د منتصف $\overleftarrow{أجـ}$ أوجد :

(١) $\overleftarrow{أب} \cdot \overleftarrow{أجـ}$ (٢) $\overleftarrow{بجـ} \cdot (\frac{١}{٢}\,\overleftarrow{بأ})$

(٣) $\overleftarrow{بأ} \cdot \overleftarrow{بد}$ (٤) $\overleftarrow{دب} \cdot (\frac{١}{٤}\,\overleftarrow{بجـ})$

(٢٥٠ ، صفر ، $-\frac{١}{٢}$ ١٢ ، ١٩)

١٠ أ ب جـ د شبه منحرف فيه : $\overleftarrow{أد} \,//\, \overleftarrow{بجـ}$ ، ق (∠د) = ق (∠ب) = ٩٠°

، أ د = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٢٤ سم ، جـ د = ٢٦ سم أوجد :

(١) $\overleftarrow{جـد} \cdot \overleftarrow{جـب}$ (٢) $\overleftarrow{دب} \cdot \overleftarrow{بجـ}$

(٣) $\overleftarrow{دجـ} \cdot \overleftarrow{أب}$

(١١٥٢٠ ، -١١٥٢٠ ، ١٠٠)

١١ أ ب جـ د هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ٨ سم أوجد :

(١) $(\overleftarrow{جـأ} + \overleftarrow{أو}) \cdot \overleftarrow{أد}$

(٢) $(\overleftarrow{أب} - \overleftarrow{هـو}) \cdot \overleftarrow{أد}$

(-١٢٨ ، ١٩٢)

١٢ إذا كان : $\overleftarrow{أ} = ٤\,\overleftarrow{س} - ٣\,\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = \overleftarrow{س} + ٢\,\overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع}$ ،

$\overleftarrow{جـ} = -\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص} + ٢\,\overleftarrow{ع}$ أوجد :

(١) $\overleftarrow{أ} + \frac{٢}{٣}\,[(٢\,\overleftarrow{جـ}) \cdot (-٣\,\overleftarrow{ب})]\,\overleftarrow{أ}$

(٢) $٢\,\overleftarrow{جـ} - (\frac{١}{٥}\,\overleftarrow{أ} \cdot [(٢\,\overleftarrow{ب}) + (٣\,\overleftarrow{جـ})])\,\overleftarrow{ب}$

١٩ أثبت أن : Δ أ ب حـ قائم الزاوية حيث : أ (٢ ، −١ ، ١) ، ب (١ ، −٣ ، −٥) ، حـ (٣ ، −٤ ، −٤)

٢٠ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} - ٣\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٣\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} + ٢\overrightarrow{ع}$

أثبت أن : المتجه $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب})$ عمودى على المتجه $(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب})$

٢١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدين ، $\overrightarrow{أ} = (٥ ، -٤ ، ٠)$

فإن : $\overrightarrow{ب}$ يمكن أن يكون .....

(أ) (٣ ، ٤ ، ٣) (ب) (٨ ، ١٠ ، −٧)

(جـ) (١ ، ١ ، ٥) (د) (٠ ، ١ ، ٠)

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-١ ، ٢ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجه وحدة

فإن : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ يمكن أن تساوى .....

(أ) ٧ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) −٤

(٣) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجها وحدة حاصل ضربهما القياسى $\left(-\frac{١}{٢}\right)$

فإن قياس الزاوية بينهما .....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهى وحدة فإن : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \in$ .....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]−١ ، ١[(جـ) [−١ ، ١] (د) $ح^+$

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين وحدة قياس الزاوية بينهما θ

فإن : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ يكون متجه وحدة إذا كان .....

(أ) $\theta = \frac{\pi}{٣}$ (ب) $\theta = \frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\theta = \frac{٢\pi}{٣}$ (د) $\theta = \pi$

(٦) مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ حيث θ هو قياس الزاوية بينهما تساوى .....

(أ) $(\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب})$ جتا θ (ب) $\|\overrightarrow{ب}\| \|\overrightarrow{أ}\|$

(جـ) $\|\overrightarrow{أ}\|$ جتا θ (د) $\|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\|$ جتا θ

(٧) إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = ٤$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٦$ ، قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين ٣٠°

فإن مركبة المتجه $\overrightarrow{ب}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ}$ هى .....

(أ) $١٢\sqrt{٣}$ (ب) $٩\sqrt{٣}$ (جـ) $٣\sqrt{٣}$ (د) $٢\sqrt{٣}$

(٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-١ ، ٤ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٢ ، ١)$

فإن : مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٨}{٣}$ (جـ) $\frac{٨}{٣}$ (د) ٥

(٩) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٤\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$ فإن مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور ع

تساوى .....

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) ٥

(١٠) مسقط المتجه $\overrightarrow{أ} = (٢ ، ٣ ، -١)$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب} = ٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$

هو .....

(أ) ١٨ (ب) $\frac{١٨}{٥}$ (جـ) $-\frac{١٨}{٥}$ (د) $\frac{١٨}{٢٥}$

(١١) المركبة الجبرية للقوة $\overrightarrow{ق} = ٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$ فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$

حيث أ (١ ، ٤ ، ٠) ، ب (−١ ، ٢ ، ٣) هى .....

(أ) ٢١ (ب) ١٧ (جـ) $١٣\sqrt{٣}$ (د) $١٧\sqrt{٣}$

(١٢) إذا كان المتجه $\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ عمودى على المتجه $\overrightarrow{ى} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$ فإن : .....

(أ) $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ (ب) $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ (جـ) $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ (د) $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\|$

(١٣) أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ = $٦\sqrt{٣}$ سم ، ق(∠أ) = ١٢٠°

فإن : $\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{ب حـ}$ = ...

(أ) $٥٤\sqrt{٣}$ (ب) ١٠٨ (جـ) ٨١ (د) ١٦٢

(١٤) أ ب حـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم فإن : $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{حـأ}$ = ...

(أ) ١٠٠ (ب) $١٠٠\sqrt{٢}$ (جـ) −١٠٠ (د) $-١٠٠\sqrt{٢}$

(١٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٢\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = ١٢\,\overrightarrow{س} + ٥\,\overrightarrow{ص}$ ، θ قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ فإن : ظا θ = ...

(أ) $\frac{١٦}{٦٥}$ (ب) $\frac{٦٣}{٦٥}$ (جـ) $\frac{٦٣}{١٦}$ (د) $\frac{١٦}{٦٣}$

(١٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (١ ، -٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ١ ، ٢)$

فإن المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ = ...

(أ) $\left(\frac{٤}{٩} ، \frac{-٢}{٩} ، \frac{-٤}{٩}\right)$ (ب) $\left(\frac{٤}{٩} ، \frac{٢}{٩} ، \frac{٤}{٩}\right)$

(جـ) $\left(\frac{-٤}{٩} ، \frac{-٢}{٩} ، \frac{-٢}{٩}\right)$ (د) $\left(\frac{٤}{٩} ، \frac{٢}{٩} ، \frac{-٤}{٩}\right)$

(١٧) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ء منتصف $\overline{أحـ}$ فإن مركبة المتجة $\overrightarrow{ب ء}$ فى اتجاه $\overrightarrow{أ ب}$ = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٤ (د) −٤

(١٨) الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{ق} = ٣\,\overrightarrow{س} + ٧\,\overrightarrow{ع}$ لتحريك جسيم من نقطة أ (١ ، ١ ، ٢) إلى نقطة ب (٧ ، ٣ ، ٥) يساوى .....

(أ) ٤٠ (ب) ٣٩ (جـ) ٣٢ (د) ١٧

(١٩) أثرت القوة $\overrightarrow{ق} = ٥\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ على جسيم ما فسببت له إزاحة $\overrightarrow{ف} = ٢\,\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - ٣\,\overrightarrow{ع}$ فإذا كانت القوة مقدرة بالنيوتن والإزاحة بالمتر فإن الشغل المبذول من القوة = ... جول.

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ١٠

(٢٠) قوة مقدارها ١٥ نيوتن أثرت على جسيم فحركته من أ (٢ ، ٣ ، −١) إلى ب (٣ ، ٥ ، ١) فى عكس اتجاه القوة فإن الشغل المبذول من القوة = ...

(أ) ٤٥ (ب) ٣٠ (جـ) −٤٥ (د) ± ١٥

(٢١) إذا كان : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{٠}$ ، $\|\overrightarrow{أ}\| = ٢$ فإن : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{حـ}$ = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) −٤ (د) −٨

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين وكان $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = صفر فإن مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ تساوى .....

(أ) $\|\overrightarrow{أ}\|$ (ب) $\|\overrightarrow{ب}\|$ (جـ) ١ (د) صفر

(٢) إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = ٦$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٤$ ومركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ تساوى ٣ فإن مركبة $\overrightarrow{ب}$ فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$ تساوى .....

(أ) −٢ (ب) ٢ (جـ) −٨ (د) ٨

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين فى الفراغ فإن .....

(أ) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ك}$ حيث $\overrightarrow{ك} \in \overrightarrow{ح}$

(ب) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{حـ}$ حيث $\overrightarrow{ك}$ متجه غير صفرى.

(جـ) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{٠}$ إذا كان : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$

(د) جميع ما سبق صحيح.

(٤) إذا كان : $(\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{حـ}))$ = صفر ، $\overrightarrow{أ} = ٢\,\overrightarrow{ب}$ ، $|\overrightarrow{حـ}| = ٢\,|\overrightarrow{ب}|$ فإن قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ يساوى .....

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) $\frac{٥\pi}{٦}$

(٥) إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = ٢$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٣$ ، جتا $\theta = \frac{٢}{٣}$ حيث θ قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ فإن : $\|٢\,\overrightarrow{أ} - ٣\,\overrightarrow{ب}\|$ = ...

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ٦ (د) ٥

(٦) إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = ٢$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٣$ ، $\|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\| = \sqrt{١٩}$ فإن قياس الزاوية بين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ وكان $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = ١٢$ فإن : $\|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\|$ =

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) $١٢\sqrt{٢}$ (د) $\frac{١٢}{\sqrt{٢}}$

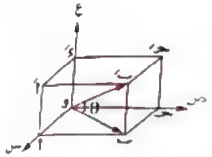
(٢٩) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ثلاث متجهات غير صفرية وكان $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{حـ}$
وكان $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\|$ ، $\|\overrightarrow{حـ}\| = \sqrt{٣}\,\|\overrightarrow{أ}\|$ فإن قياس الزاوية بين $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$
يساوى .....

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

(٣٠) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهان غير صفريان وكان : $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ}\|$
فإن $٢\,\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يكونان .....

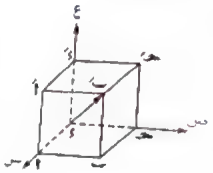
(أ) متوازيان. (ب) متعامدان.
(جـ) قياس الزاوية بينهما ٣٠° (د) قياس الزاوية بينهما ٦٠°

(٣١) فى الشكل المقابل :
أ ب جـ د أَ بَ جـَ دَ متوازى مستطيلات
، بَ (٣ ، ٥ ، ٤)
فإن : θ = ... (لأقرب درجة)



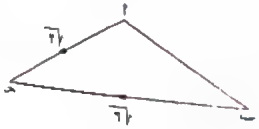
(أ) ٢٧° (ب) ٣٤° (جـ) ٤٨° (د) ٦٤°

(٣٢) فى الشكل المقابل :
أ ب جـ د أَ بَ جـَ دَ مكعب
طول ضلعه الوحدة
فإن : $\overrightarrow{أبَ} \cdot \overrightarrow{بَدَ}$ = ...



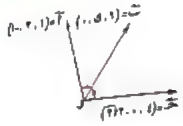
(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣٣) فى الشكل المقابل :
إذا كان : $\|\overrightarrow{بجـ}\| = \sqrt{٦}$
، $\|\overrightarrow{أجـ}\| = \sqrt{٢}$ ، $\overrightarrow{بأ} = (-١ ، ٠ ، ١)$
فإن : $\overrightarrow{بأ} \cdot \overrightarrow{بجـ}$ = ...



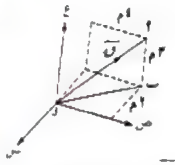
(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

من الشكل الموضح :
قيمة : ك = ...



(أ) −٣ (ب) ٣
(جـ) $\sqrt{٣}$ (د) ٢

فى الشكل المقابل :
مركبة القوة ق التى مقدارها
١٢ $\sqrt{٢٩}$ نيوتن وتؤثر فى $\overrightarrow{أ}$ فى
اتجاه $\overrightarrow{ب}$ = ... نيوتن.



(أ) ٢٤ $\sqrt{٢٩}$ (ب) ٢٤ $\sqrt{٥}$ (جـ) −٤٨ $\sqrt{٢٩}$ (د) ٦ $\sqrt{٢٩}$

فى الشكل المقابل :
$\overrightarrow{حـأ} \cdot \overrightarrow{حـب}$ = ...

(أ) ١٠٠ (ب) ٧٥
(جـ) ٥٠ (د) ٢٥

فى الشكل المقابل :
$\overrightarrow{أع} \cdot (\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أحـ})$ = ...

(أ) ٣٦ (ب) ٢٤
(جـ) ١٢ (د) ٦

فى الشكل المقابل :
$\overrightarrow{أع} \cdot \overrightarrow{أحـ}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٦
(جـ) ٨ (د) ١٠

❖ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

إذا كان : $\|\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}}\| = \|\overrightarrow{\text{أ ب}} - \overrightarrow{\text{أ حـ}}\|$

فإن : ق (∠ ب أ حـ) =

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{3}$ (حـ) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{\pi}{6}$

❖ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة م طول نصف قطرها ١٠ سم

، ق ($\widehat{\text{أ حـ}}$) = ق ($\widehat{\text{حـ ء}}$) = ق ($\widehat{\text{ء ب}}$) فإن

أولًا : $\overrightarrow{\text{حـ أ}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ ب}}$ =

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ١٠٠ (د) ٤٠٠

ثانيًا : $\overrightarrow{\text{ب حـ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب ء}}$ =

(أ) صفر (ب) ١٠٠ (حـ) [illegible] (د) ٣٠٠

❖ في الشكل المقابل :

ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أ ء = ٤ سم

فإن $\overrightarrow{\text{أ ء}} \cdot (\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ حـ}})$ =

(أ) ١٦ (ب) ٢٤ (حـ) [illegible] (د) ٣٢

❖ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شبه منحرف

قائم الزاوية في ب ، $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

فإن $\overrightarrow{\text{حـ ء}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ ب}}$ =

(أ) ٢٠ (ب) ٤٠ (حـ) [illegible] (د) ٨٠

في الشكل المقابل :

و أ ب حـ شبه منحرف متساوى الساقين

$\overrightarrow{\text{و ب}} \cdot \overrightarrow{\text{و حـ}}$ =

(أ) ١٦ (ب) ١٨ (حـ) ٢١ (د) ٢٤

في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع

طول ضلعه ٤ سم

، م ملتقى متوسطاته

فإن $\overrightarrow{\text{م ب}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ م}}$ =

(أ) $\frac{8}{3}$ (ب) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (حـ) $\frac{8}{2}$ (د) $\frac{16}{2}$

في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل ، ل ∈ $\overline{\text{أ ء}}$

فإن $\overrightarrow{\text{ل ب}} \cdot \overrightarrow{\text{ل حـ}}$ =

(أ) ٧ (ب) ٨ (حـ) ٩ (د) ١٠

في الشكل المقابل :

مخروط دائرى قائم محيط قاعدته = ١٢ π سم

فإن $\overrightarrow{\text{ب حـ}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ ء}}$ =

(أ) −٤٣ (ب) −٤٠ (حـ) −٣٧ (د) −٣٣

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (ل ، م ، ن) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (لَ ، مَ ، نَ) متجهى وحدة

فأثبت أن : جتا θ = ل لَ + م مَ + ن نَ حيث θ قياس الزاوية بين المتجهين.

٣٨ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ متجهات وحدة بحيث $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{و}$

أوجد قيمة : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{حـ} + \overrightarrow{حـ} \cdot \overrightarrow{أ}$

٣٩ إذا كانت المتجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ تحقق أن $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + ٢\overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{٠}$ وكان $\|\overrightarrow{أ}\| = ١$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٤$ ، $\|\overrightarrow{حـ}\| = ٢$ أوجد قيمة : $م = \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{حـ} + \overrightarrow{حـ} \cdot \overrightarrow{أ}$

٤٠ إذا كان $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{و}$ ، $\|\overrightarrow{أ}\| = ٣$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٥$ ، $\|\overrightarrow{حـ}\| = ٧$

أثبت أن : قياس الزاوية بين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ هي ٦٠°

٤١ في Δ أ ب حـ إذا كانت $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ هي أطوال أضلاع المثلث

أثبت أن : $\overrightarrow{حـ أ} \cdot \overrightarrow{حـ ب} = \frac{١}{٢} (أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢)$

٤٢ باستخدام المتجهات أثبت أن : في Δ أ ب حـ يكون

$(أ ب)^٢ = (أ حـ)^٢ + (ب حـ)^٢ - ٢ (أ حـ) (ب حـ) جتا حـ$

٤٣ أثبت بالمتجهات أن مجموع مربع طولي قطري [illegible] الأضلاع تساوي مجموع مربعات أطوال أضلاعه.

٤٤ إذا كان ء منتصف $\overline{ب حـ}$ في Δ أ ب حـ أثبت باستخدام المتجهات أن :

$(أ ب)^٢ + (أ حـ)^٢ = ٢ (أ ء)^٢ + ٢ (ب ء)^٢$

٤٥ باستخدام المتجهات أثبت أن : $\overrightarrow{م أ} + \overrightarrow{م ب} + \overrightarrow{م حـ} = \overrightarrow{صفر}$

حيث م نقطة تلاقي متوسطات المثلث أ ب حـ

ثم أثبت أن : $\overrightarrow{أ م} \cdot \overrightarrow{م ب} + \overrightarrow{ب م} \cdot \overrightarrow{م حـ} + \overrightarrow{حـ م} \cdot \overrightarrow{م أ} = \frac{١}{٢} (\|\overrightarrow{م أ}\|^٢ + \|\overrightarrow{م ب}\|^٢ + \|\overrightarrow{م حـ}\|^٢)$

٤٦ (دور أول ٢٠١٨) أ ب حـ مثلث فيه :

أ (٢ ، ٣ ، ١) ، ب (٣ ، ٥ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب حـ} = (-١ ، ٤ ، ٠)$

أوجد : (١) ق (∠ أ ب حـ)

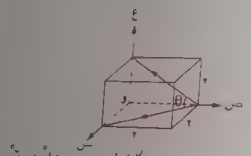
(٢) المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أ حـ}$ في اتجاه $\overrightarrow{أ ب}$

كان $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = -١$ ، $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{حـ} = ٦$ ، $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ء} = ٥$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ٠ ، ٥)$ ،

$\overrightarrow{حـ} = (٢ ، ٧ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ء} = (١ ، ١ ، ١)$ أوجد : $\overrightarrow{أ}$

أوجد θ في كل مما يأتي :

شكل (١)



شكل (٢)

في الشكل المقابل :

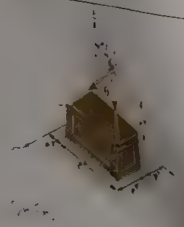
إذا كانت حـ هي نقطة تجمع قطري قاعدة الصندوق

أوجد قياس الزاوية المحصورة

بين $\overrightarrow{ب أ}$ ، $\overrightarrow{ب حـ}$

في الشكل المقابل :

صندوق خشبي موضوع على أرضيه غرفة في أحد أركانها مبتعدًا ٢ م عن كل من حائطي الركن مربوط بحبلين من الرأسين ب ، حـ إلى نقطة أ على الحائط أوجد قياس الزاوية θ بين $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{أ حـ}$



٥١ الشكل المقابل :

يمثل مكعبًا طول ضلعه ٢ وحدة طول.

أوجد : مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ على المتجه $\overrightarrow{حـ ب}$

٥٢ أوجد المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أ ب}$ [illegible] ، ب (٣ ، ١ ، [illegible]) في اتجاه المتجه $\overrightarrow{م}$ حيث $\overrightarrow{م}$ = (٣ ، ٢ ، ٢ ، ٣)

٥٣ أوجد الشعل المبذول من القوة $\overrightarrow{ق}$ = (٤ ، [illegible] ، [illegible]) [illegible] من نقطة أ (٢ ، ١ ، [illegible]) إلى نقطة ب (٣ ، ٦ ، ١)

٥٤ أثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ = $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ + ٣ $\overrightarrow{ع}$ [illegible] من نقطة أ (٣ ، ١ ، ٠) إلى نقطة ب (٢ ، ٠ ، ٢) [illegible] من القوة $\overrightarrow{ق}$ حيث الإزاحة مقدرة بالمتر.

٥٥ أوجد الشعل المبذول من وزن جسم مقداره ٥٠ نيوتن [illegible] مسافة ١٥ مترًا فوق سطح الأرض إذا كان

- الجسم يتحرك رأسيًا لأعلى.
- الجسم يتحرك رأسيًا لأسفل.

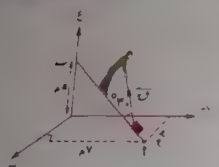
٥٦ في الشكل المقابل :

شخص يسحب صندوقًا بقوة شد مقدارها ١٦٠ نيوتن ، ويعمل على الأفقي بزاوية ظل قياسها $\frac{٣}{٤}$ ليحركه مسافة أفقية قدرها ٥ أمتار.

أوجد الشغل المبذول من قوة الشد.

[illegible] الشكل المقابل :

[illegible] مربوط يحمل يعمل على المستوى المائل [illegible] قياسها ٣٠° يتم سحبه لأعلى عن [illegible] قوة شد مقدارها ٢٠ نيوتن [illegible] الشعل المبذول من قوة الشد [illegible] لجسم من نقطة أ إلى ب



[illegible] الشكل المقابل :

[illegible] قوة الشد في [illegible] ب حـ [illegible] مقدارها ٥٠ نيوتن [illegible] الشعل المبذول من قوة الشد لرفع [illegible] من نقطة [illegible] إلى نقطة ب

[illegible] تفكير

٥ ضع الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

إذا كان $|\overrightarrow{أ}|$ = [illegible] ، $|\overrightarrow{ب}|$ = ٣ ، $|\overrightarrow{حـ}|$ = ١٢ وكان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ متعامدة مثنى مثنى فإن $|\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{حـ}|$ =

(أ) ١٧ (ب) ١٣ (جـ) $\sqrt{١٥٧}$ (د) ١٣

إذا كان $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ متجهي وحدة وكان $|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}| = \sqrt{٣}$

فإن $(٣\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}) \cdot (٢\overrightarrow{أ} - ٥\overrightarrow{ب})$ =

(أ) $\frac{١٧}{٢}$ (ب) $\frac{٢١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢٥}{٢}$ (د) -١٤

إذا كان $|\overrightarrow{أ}|$ = ١١ ، $|\overrightarrow{ب}|$ = ٢٣ ، $|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}| = ٣٠$

فإن $|\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}|$ =

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

الدرس 4 الضرب الاتجاهى والضرب القياسى

الضرب الاتجاهى لمتجهين

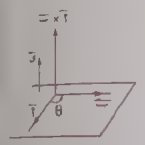
تعريف حاصل الضرب الاتجاهى

إذا كان : $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهين غير صفريين ، θ قياس الزاوية الصغرى التى يحصرها هذ
المتجهان عند رسمهما خارجين من نقطة واحدة

فإن حاصل الضرب الاتجاهى للمتجه $\vec{أ}$ فى المتجه $\vec{ب}$ ويرمز له بالرمز $\vec{أ} \times \vec{ب}$

يعرف كالآتى

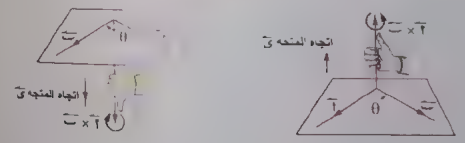
$$\vec{أ} \times \vec{ب} = (\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\| \, \text{جا}\,\theta)\,\vec{ى}$$



حيث $\vec{ى}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يحتويه المتجهين
$\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ويتحدد اتجاهه (لأعلى أو لأسفل) بقاعدة اليد اليمنى
كما يلى :

قاعدة اليد اليمنى :

عندما تشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلى اتجاه الدوران من المتجه $\vec{أ}$ إلى المتجه $\vec{ب}$
عبر الزاوية الصغرى المحصورة بينهما فيشير الإبهام إلى اتجاه المتجه $\vec{ى}$



ملاحظات

إذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهين غير صفريين قياس الزاوية الصغرى بينهما θ فإن

وإذا كان $\vec{أ} \times \vec{ب}$ فى اتجاه متجه الوحدة $\vec{ى}$

فإن $\vec{ب} \times \vec{أ}$ يكون فى اتجاه متجه الوحدة $-\vec{ى}$ أى أن $\vec{أ} \times \vec{ب} = -\vec{ب} \times \vec{أ}$

حاصل الضرب الاتجاهى $\vec{أ} \times \vec{ب}$ هو متجه وليس كمية قياسية كما فى الضرب القياسى $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$

$\vec{أ} \times \vec{ب} = -\vec{ب} \times \vec{أ}$ بينما $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \vec{ب} \cdot \vec{أ}$

$\|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = \|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\| \, \text{جا}\,\theta$ ، $\text{جا}\,\theta = \dfrac{\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|}$

متجه الوحدة فى اتجاه $\vec{أ} \times \vec{ب}$ هو $\vec{ى} = \dfrac{\vec{أ} \times \vec{ب}}{\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|} = \dfrac{\vec{أ} \times \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\| \, \text{جا}\,\theta}$

إذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{جـ}$ ثلاثة متجهات غير صفرية

فإن $\vec{أ} \times \vec{ب} = \vec{أ} \times \vec{جـ}$ فهذا لا يعنى بالضرورة أن $\vec{ب} = \vec{جـ}$

خواص حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين :

إذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهين قياس الزاوية بينهما θ فإن

$\vec{أ} \times \vec{ب} = -\vec{ب} \times \vec{أ}$ (أى أن الضرب الاتجاهى عملية ليست إبدالية)

$\vec{أ} \times (\vec{ب} + \vec{جـ}) = \vec{أ} \times \vec{ب} + \vec{أ} \times \vec{جـ}$ ، $(\vec{ب} + \vec{جـ}) \times \vec{أ} = \vec{ب} \times \vec{أ} + \vec{جـ} \times \vec{أ}$

(خاصية التوزيع محققة)

$(ك\,\vec{أ}) \times \vec{ب} = \vec{أ} \times (ك\,\vec{ب}) = ك\,(\vec{أ} \times \vec{ب})$ حيث $ك \in ح$

$\vec{أ} \times \vec{أ} = \vec{ب} \times \vec{ب} = \vec{و}$

حاصل الضرب الاتجاهى لأى متجه فى نفسه يساوى المتجه الصفرى وذلك لأن $\theta = 0$

إذا كان $\vec{أ} \times \vec{ب} = \vec{و}$ فإن $\vec{أ} \parallel \vec{ب}$ أ، أحد المتجهين أو كلاهما $= \vec{و}$

الحل

∵ جا θ = $\frac{\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|}$ = $\frac{٣٥\sqrt{٣}}{١٤ \times ٥}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ θ = ٦٠° أ، ١٢٠°

مثال ٣

إذا كان $\vec{أ}$ = (١ ، ٢ ، ١) ، $\vec{ب}$ = ٣ $\vec{س}$ + $\vec{ص}$ + ٢ $\vec{ع}$

أوجد : ١) $\vec{أ} \times \vec{ب}$ ٢) $\vec{ب} \times \vec{أ}$

٣) متجه وحدة عمودى على كل من المتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

الحل

١) $\vec{أ} \times \vec{ب}$ = $\begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$

= (٢ × ٢ − ١ × ١) $\vec{س}$ − (١ × ٢ − ٣ × ١) $\vec{ص}$ + (١ × ١ − ٣ × ٢) $\vec{ع}$

= ٣ $\vec{س}$ + $\vec{ص}$ − ٥ $\vec{ع}$

٢) $\vec{ب} \times \vec{أ}$ = $\begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$

= (١ × ١ − ٢ × ٢) $\vec{س}$ − (٣ × ١ − ١ × ٢) $\vec{ص}$ + (٣ × ٢ − ١ × ١) $\vec{ع}$

= −٣ $\vec{س}$ − $\vec{ص}$ + ٥ $\vec{ع}$

لاحظ أن

$\vec{ب} \times \vec{أ}$ = −$\vec{أ} \times \vec{ب}$

٣) يوجد متجها وحدة فى اتجاه عمودى على كل من $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

$\frac{\vec{أ} \times \vec{ب}}{\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|}$ = $\frac{٣\vec{س} + \vec{ص} - ٥\vec{ع}}{\sqrt{٩ + ١ + ٢٥}}$ = $\frac{٣}{٣٥\sqrt{}}\vec{س} + \frac{١}{٣٥\sqrt{}}\vec{ص} - \frac{٥}{٣٥\sqrt{}}\vec{ع}$

، $\frac{\vec{ب} \times \vec{أ}}{\|\vec{ب} \times \vec{أ}\|}$ = $\frac{٣\vec{س} - \vec{ص} + ٥\vec{ع}}{\sqrt{٣٥}}$ = $\frac{٣}{٣٥\sqrt{}}\vec{س} - \frac{١}{٣٥\sqrt{}}\vec{ص} + \frac{٥}{٣٥\sqrt{}}\vec{ع}$

أى أن المتجهين هما ± ($\frac{٣}{٣٥\sqrt{}}\vec{س} + \frac{١}{٣٥\sqrt{}}\vec{ص} - \frac{٥}{٣٥\sqrt{}}\vec{ع}$)

توازى متجهين

عندما يتوازى متجهان فإن قياس الزاوية بينهما يكون :

صفر وعندما يكون المتجهان فى نفس الاتجاه.

، ١٨٠° وعندها يكون كل من المتجهين فى عكس اتجاه الآخر.

، ∵ $\vec{أ} \times \vec{ب}$ = $\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|$ جا θ $\vec{ى}$ وحيث أن : جا ٠° = جا ١٨٠° = صفر

∴ فى حالة التوازى يكون : $\vec{أ} \times \vec{ب}$ = $\vec{و}$

، من تعريف الضرب الاتجاهى فى الإحداثيات الكارتيزية

∴ (أ$_{ص}$ ب$_{ع}$ − أ$_{ع}$ ب$_{ص}$) $\vec{س}$ + (أ$_{ع}$ ب$_{س}$ − أ$_{س}$ ب$_{ع}$) $\vec{ص}$

+ (أ$_{س}$ ب$_{ص}$ − أ$_{ص}$ ب$_{س}$) $\vec{ع}$ = $\vec{و}$

∴ أ$_{ص}$ ب$_{ع}$ − أ$_{ع}$ ب$_{ص}$ ومنها $\frac{أ_{ص}}{ب_{ص}}$ = $\frac{أ_{ع}}{ب_{ع}}$

، أ$_{ع}$ ب$_{س}$ − أ$_{س}$ ب$_{ع}$ ومنها $\frac{أ_{ع}}{ب_{ع}}$ = $\frac{أ_{س}}{ب_{س}}$

، أ$_{س}$ ب$_{ص}$ − أ$_{ص}$ ب$_{س}$ ومنها $\frac{أ_{س}}{ب_{س}}$ = $\frac{أ_{ص}}{ب_{ص}}$

من (١) ، (٢) ، (٣)

∴ $\frac{أ_{س}}{ب_{س}}$ = $\frac{أ_{ص}}{ب_{ص}}$ = $\frac{أ_{ع}}{ب_{ع}}$ ، بفرض أى من النسب = ك

∴ أ$_{س}$ = ك ب$_{س}$ ، أ$_{ص}$ = ك ب$_{ص}$ ، أ$_{ع}$ = ك ب$_{ع}$

، ∵ $\vec{أ}$ = أ$_{س}$ $\vec{س}$ + أ$_{ص}$ $\vec{ص}$ + أ$_{ع}$ $\vec{ع}$

∴ $\vec{أ}$ = ك ب$_{س}$ $\vec{س}$ + ك ب$_{ص}$ $\vec{ص}$ + ك ب$_{ع}$ $\vec{ع}$

= ك (ب$_{س}$ $\vec{س}$ + ب$_{ص}$ $\vec{ص}$ + ب$_{ع}$ $\vec{ع}$)

∴ $\vec{أ}$ = ك $\vec{ب}$ ∴ $\vec{أ}$ // $\vec{ب}$

، فى حالة ك > ٠ يكون $\vec{أ}$ // $\vec{ب}$ وفى نفس الاتجاه.

، فى حالة ك < ٠ يكون $\vec{أ}$ // $\vec{ب}$ وكل منهما فى عكس اتجاه الآخر.

إذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهين غير صفريين وكان

- $\vec{أ} \parallel \vec{ب}$ و فإن $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ و العكس صحيح
- $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = |\vec{أ}| \, |\vec{ب}| \, \cos\theta$ فإن $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ ، العكس صحيح

مثال ٤

إذا كان المتجه $\vec{أ} = ٥ \, \vec{س} + ٤ \, \vec{ص} - ٣ \, \vec{ع}$ ، $\vec{ب} = \vec{س} - ٢ \, \vec{ص}$ ، $\vec{ع} = ٢ \, \vec{س} + \vec{ص}$

وكان $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ أوجد كلًا من : ل ، م

مثال ٥

إذا كان $\vec{أ} = (-١ ، ٣ ، ٢)$ ، $|\vec{ب}| = ٤$ ، $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ أوجد : $\vec{ب}$

ملاحظة

إذا كان أ ، ب ، جـ ثلاث نقاط في الفراغ ثلاثي الأبعاد

وكان ١ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{جـب}$ و فإن أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة.

٢ $\overrightarrow{أب} \parallel \overrightarrow{جـب}$ فإن أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة.

مثال ٦

إذا كان أ = (١ ، ٢ ، ٣) ، ب = (٣ ، ٢ ، ١)

$\overrightarrow{أب} = ب - أ = (٢ ، ٠ ، -٢)$

$\overrightarrow{أجـ} = جـ - أ = (٤ ، ٢ ، ٠)$

$\overrightarrow{ب} = \vec{س} - ٢ \, \vec{ص} + ٦ \, \vec{ع}$

$\overrightarrow{جـ} = \vec{س} + \vec{ص} - ٢ \, \vec{ع}$

أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة

باستخدام الهندسي لمعيار الضرب الاتجاهي لمتجهين

إذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهين غير منعدمين في مستوى فإن

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = |\vec{أ}| \, |\vec{ب}| \, \cos\theta$

حيث θ قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

مما سبق فإن

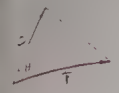
مساحة سطح الأضلاع الذي فيه

$\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ضلعان متجاوران

= طول القاعدة × الارتفاع = $|\vec{أ}| \, |\vec{ب}| \, \sin\theta$

= $|\vec{أ} \times \vec{ب}|$ معيار حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين.

- مساحة المثلث الذى فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ضلعان متجاوران



= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين متجاورين

× جيب الزاوية بينهما = $\frac{1}{2} \|\overleftarrow{أ}\| \times \|\overleftarrow{ب}\|$ جا θ

= $\frac{1}{2} \|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\|$ = $\frac{1}{2}$ معيار حاصل الضرب الاتجاهى للمتجهين.

- مساحة الشكل الرباعى الذى فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ قطران

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى القطرين × جيب الزاوية بينهما

= $\frac{1}{2} \|\overleftarrow{أ}\| \times \|\overleftarrow{ب}\|$ جا θ

= $\frac{1}{2} \|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\|$ = $\frac{1}{2}$ معيار حاصل الضرب الاتجاهى للمتجهين.

مثال ٧

أوجد مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه : $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ضلعان متجاوران حيث

$\overleftarrow{أ} = (٣ ، ٦ ، ٣)$ ، $\overleftarrow{ب} = (-٦ ، -٢ ، -٤)$

الحل

$$\therefore \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٣ & ٦ & ٣ \\ -٦ & ٢ & -٤ \end{vmatrix} = [illegible] \overleftarrow{ص} + ٣٠ \overleftarrow{ع}$$

$\therefore$ مساحة متوازى الأضلاع = $\|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\| = \sqrt{(-١٨)^2 + (٦)^2 + (٣٠)^2} = ٦\sqrt{٣٥}$ وحدة مربعة

الضرب الثلاثى القياسى

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{حـ}$ متجهات فى الفراغ ثلاثى الأبعاد فإن حاصل الضرب القياسى للمتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $(\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ})$ يعرف بحاصل الضرب الثلاثى القياسى للمتجهات $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{حـ}$ ويكتب $\overleftarrow{أ} \cdot (\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ})$ وحيث أنه لا معنى لإجراء الضرب القياسى أولاً فيمكن الاستغناء عن القوسين ويكون حاصل الضرب الثلاثى القياسى $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ}$

$\therefore \overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ ، $\overleftarrow{حـ} = (حـ_س ، حـ_ص ، حـ_ع)$

$$\therefore \overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ} = (أ_س \overleftarrow{س} + أ_ص \overleftarrow{ص} + أ_ع \overleftarrow{ع}) \cdot \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ حـ_س & حـ_ص & حـ_ع \end{vmatrix}$$

$$= (أ_س \overleftarrow{س} + أ_ص \overleftarrow{ص} + أ_ع \overleftarrow{ع}) \cdot \begin{vmatrix} ب_ص & ب_ع \\ حـ_ص & حـ_ع \end{vmatrix} \overleftarrow{س} - \begin{vmatrix} ب_س & ب_ع \\ حـ_س & حـ_ع \end{vmatrix} \overleftarrow{ص} + \begin{vmatrix} ب_س & ب_ص \\ حـ_س & حـ_ص \end{vmatrix} \overleftarrow{ع}$$

$$= أ_س \begin{vmatrix} ب_ص & ب_ع \\ حـ_ص & حـ_ع \end{vmatrix} - أ_ص \begin{vmatrix} ب_س & ب_ع \\ حـ_س & حـ_ع \end{vmatrix} + أ_ع \begin{vmatrix} ب_س & ب_ص \\ حـ_س & حـ_ص \end{vmatrix}$$

$$\therefore \overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ حـ_س & حـ_ص & حـ_ع \end{vmatrix}$$

- خواص الضرب الثلاثى القياسى

١- قيمة الضرب الثلاثى القياسى لا تتغير إذا تم تبديل المتجهات مع احتفاظهم بنفس الترتيب الدورى

$\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ} = \overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{حـ} \times \overleftarrow{أ} = \overleftarrow{حـ} \cdot \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$

٢- يمكن تبديل علامتى الضرب القياسى والاتجاهى مع الحفاظ على الترتيب الدورى للمتجهات دون أن تتغير قيمة حاصل الضرب الثلاثى القياسى.

$\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ} = \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{حـ}$

الاستخدام الهندسي لداخل الضرب الثلاثي القياسي

مقارنة بين تكامل الضرب القياسي والاتجاهي

الضرب القياسي لمتجهين

الضرب الاتجاهي لمتجهين

ملاحظات

٨ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٢ ، ٣ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (١ ، ٣ ، ١)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (١ ، ٢ ، ٥)$ أوجد

$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ $\overrightarrow{حـ} \times \overrightarrow{حـ}$ $(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}) \times (\overrightarrow{حـ} \cdot \overrightarrow{أ})$

٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٣ ، ٠ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع}$

فإن $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} =$

(أ) (٨ ، ٥ ، ٦) (ب) (٨ ، ٥ ، ٦)

(حـ) (٨ ، -٥ ، ٦) (د) (٨ ، ٥ ، -٦)

إذا كان $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$

فإن $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| =$

(أ) $٤\sqrt{٢}$ (ب) $٣\sqrt{٢}$ (حـ) [illegible] (د) $٢\sqrt{٣}$

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين [illegible] ٣٠° ، $\|\overrightarrow{أ}\| =$ [illegible]

، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٤$ فإن $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| =$

(أ) ٢٠ ى (ب) ١٠ ى (حـ) [illegible] (د) -٢٠

إذا كان $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ فإن $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) [illegible] (د) $\|\overrightarrow{ب}\|$

إذا كان $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = ٣٦\sqrt{٣}$ ، $\|\overrightarrow{أ}\|$ [illegible] $\|\overrightarrow{ب}\| = ٩$

فإن قياس الزاوية بين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يمكن أن تكون

(أ) ٣٠° (ب) ١٢٠° (حـ) [illegible] (د) ٤٥°

إذا كان $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$

فإن $\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}) =$

(أ) $\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ع}$ (ب) $٣\overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع}$

(حـ) $-٣\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ (د) $٣\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$

إذا كان المتجهان (٢ ، ك ، -٣) ، (٤ ، ٦ ، -٦) متوازيين فإن . ك =

(أ) ٦ (ب) ٣ (حـ) ٣٠ (د) ١

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٤ ، -ك ، ٦)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٢ ، م)$ وكان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$

فإن ك + م

(أ) ٣٠ (ب) ٢ (حـ) -١٠ (د) صفر

$\overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{ص} =$

(أ) [illegible] (ب) ٠ (حـ) ١ (د) $\overrightarrow{ع}$

إذا كان $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة فإن =

(أ) $\overrightarrow{ص} = ١$ (ب) $\overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{س}$ ١

[illegible] $\overrightarrow{ص} = ١$ (ب) $\overrightarrow{س} \cdot (\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع})$ ١

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٤ ، ٥ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ك ، ٢)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (٤ ، ٤ ، م - ٢)$

وكان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} // \overrightarrow{حـ}$ فإن ك م

(أ) [illegible] (ب) ٧ (حـ) ٨ (د) ٩

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (١ ، ٠ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، -١ ، ٣)$

فإن $(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}) =$

(أ) [illegible] (ب) ٣١ (حـ) ٣١ (د) ٤١

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهي وحدة متعامدين

فإن $\|(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}) \times (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب})\| =$

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ٩ (د) ٢

إذا كان $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = ٤$ فإن متجه وحدة عمودي على كل من $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$.

(أ) $\frac{١}{٨} (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$ (ب) $-\frac{١}{٤} (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$

(حـ) $\frac{١}{٢} (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$ (د) $-٤ (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$

• ١٥ إذا كانت : $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة

فإن : $(\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص}) \cdot \overrightarrow{ع} + \overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{ص} =$

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

• ١٦ إذا كان : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{حـ}$ فإن

(أ) $\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{أ}$ (ب) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{ب}$

(جـ) $\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ}) = \overrightarrow{حـ}$ (د) $\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{حـ}$

• ١٧ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ متجه غير صفرى فإن المقدار

$\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{س}\|^2 + \|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ص}\|^2 + \|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ع}\|^2 =$

(أ) $\|\overrightarrow{أ}\|^2$ (ب) صفر (جـ) $2\|\overrightarrow{أ}\|^2$ (د) $2\|\overrightarrow{أ}\|^2$

• ١٨ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين متوازيان فأى من العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) $\overrightarrow{أ} = ك\,\overrightarrow{ب}$ ، $ك \neq 0$ (ب) $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

(جـ) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} =$ صفر (د) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} =$ صفر

• ١٩ إذا كان $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\|\overrightarrow{أ}\| = 9$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = 16$

، $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = -72\sqrt{3}$ فإن : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} =$

(أ) $\pm 26\,\overrightarrow{ى}$ (ب) $\pm 36\,\overrightarrow{ى}$ (جـ) $\pm 72\,\overrightarrow{ى}$ (د) $\pm 72\sqrt{3}\,\overrightarrow{ى}$

• ٢٠ (دور أول ٢٠٢١) إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{13}$ ، $\overrightarrow{أ} \,//\, \overrightarrow{ء}$ ، $\overrightarrow{حـ}$

$\overrightarrow{ء}(1 ، 3 ، -2)$ ، $\overrightarrow{حـ}(1 ، -1 ، 4)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-2 ، 3 ، 5)$

فإن : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} =$ .....

(أ) $-19\,\overrightarrow{س} + 6\,\overrightarrow{ص} + 4\,\overrightarrow{ع}$ (ب) $-28\,\overrightarrow{س} - 12\,\overrightarrow{ص} - 8\,\overrightarrow{ع}$

(جـ) $-28\,\overrightarrow{س} + 12\,\overrightarrow{ص} - 8\,\overrightarrow{ع}$ (د) $-19\,\overrightarrow{س} - 6\,\overrightarrow{ص} - 4\,\overrightarrow{ع}$

١٠ أوجد ناتج : $[(1 ، -2 ، 3) \times (2 ، 1 ، -3)] \times (-3 ، 1 ، 2)$

١١ إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = 6$ وكانت جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى على الترتيب

$\frac{2}{3}$ ، $\frac{-2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$ وكان المتجه $\overrightarrow{ب} = (-2 ، 3 ، 5)$ أوجد : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$

١٢ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم ، $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على مستواه لأعلى أوجد :

(١) $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{حـأ}$ (٢) $\overrightarrow{ب ء} \times \overrightarrow{أحـ}$ (٣) $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{ب حـ}$

١٣ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم تقاطع قطراه فى م

، $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على مستواه لأعلى أوجد :

$\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أحـ}$ | (٢) $\overrightarrow{أء} \times \overrightarrow{ب حـ}$ | (٣) $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{ب ء}$

$\overrightarrow{حـم} \times \overrightarrow{حـب}$ | (٥) $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{حـب}$ | (٦) $\overrightarrow{ء م} \times \overrightarrow{ء حـ}$

١٤ أوجد متجه وحدة عموديًا على كل من $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ حيث :

(١) $\overrightarrow{أ} = 4\,\overrightarrow{س} - 6\,\overrightarrow{ص} + 2\,\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = -2\,\overrightarrow{س} + 4\,\overrightarrow{ص} - 6\,\overrightarrow{ع}$

(٢) $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} - 2\,\overrightarrow{ص} + 2\,\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = 3\,\overrightarrow{س} - 4\,\overrightarrow{ص}$

١٥ إذا كان : أ (٠ ، ٠ ، ١) ، ب (١ ، ٠ ، ٠) ، حـ (٠ ، ١ ، ٠)

أوجد متجه وحدة عمودى على المستوى أ ب حـ

١٦ أوجد المتجه $\overrightarrow{ء}$ العمودى على المستوى الذى يحوى النقاط :

♣ أ (١ ، −١ ، ٤) ، ب (٢ ، ٠ ، ١) ، حـ (٠ ، ٢ ، ٣)

١٧ أوجد المتجه الذى معياره ٣ وحدات وعمودى على كل من المتجهين :

♣ $\overrightarrow{أ} = 3\,\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - 4\,\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = 6\,\overrightarrow{س} + 5\,\overrightarrow{ص} - 2\,\overrightarrow{ع}$

١٨ أثبت أن : المتجه $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ يكون عموديًا على كل من المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ حيث

♣ $\overrightarrow{أ} = (1 ، 3 ، -1)$ ، $\overrightarrow{ب} = (2 ، 0 ، 1)$ باستخدام الضرب الثلاثى القياسى.

١٩ أوجد : ل ، م إذا كان : $(٢\overrightarrow{س} + ٦\overrightarrow{ص} - ٢٧\overrightarrow{ع}) \times (\overrightarrow{س} + ل\overrightarrow{ص} + م\overrightarrow{ع}) = \overrightarrow{و}$

ل = ٢٠ ، م = $\frac{-٢٧}{٢}$

٢٠ احسب مساحة متوازى الأضلاع ل م ن هـ فى كل مما يأتى :

١ ل (١ ، ١) ، م (٢ ، ٣) ، ن (٥ ، ٤)

٢ ل (٢ ، ١ ، ٣) ، م (١ ، ٤ ، ٥) ، ن (٢ ، ٥ ، ٣)

٣ ل (٣ ، -١ ، ٢) ، م (١ ، -١ ، -٣) ، ن (٤ ، -٣ ، ١)

٤ ل (٢ ، ٢ ، ٥) ، م (٤ ، ٦ ، ٥) ، ن (٧ ، ٤ ، ٩)

[illegible] ، ٢٤ وحدة مساحة

٢١ أوجد مساحة Δ أ ب حـ حيث :

١ أ (٥ ، ١ ، -٢) ، ب (٤ ، -٤ ، ٣) ، حـ (٣ ، ٤ ، ٠)

٢ أ (٤ ، ٠ ، ٢) ، ب (٢ ، ١ ، ٥) ، حـ (١ ، ٠ ، -١)

٣ أ (١ ، ٢ ، ٣) ، ب (-١ ، ٠ ، ٠) ، حـ (٠ ، ١ ، ٢)

[illegible] وحدة مساحة

٢٢ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-٣ ، ١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، [illegible])$ وجد مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران.

٣٠ وحدة مساحة

٢٣ أوجد مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران حيث :

$\overrightarrow{أ} = ٣\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + ٤\overrightarrow{ع}$

٢$\sqrt{٦١}$ وحدة مساحة

٢٤ أوجد مساحة المثلث الذى فيه : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان حيث

$\overrightarrow{أ} = ٣\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} + ٤\overrightarrow{ع}$

٥٠$\sqrt{٣}$ وحدة مساحة

٢٥ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (١ ، ٢ ، -٤)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٠ ، ٥ ، -١)$ أوجد مساحة المثلث الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان.

$\frac{٥}{٢}\sqrt{١٤}$ وحدة مساحة

٢٦ فى كل مما يأتى بين ما إذا كان المتجهان متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك :

١ $\overrightarrow{أ} = (٠ ، ٢ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ٠ ، -٤)$

٢ $\overrightarrow{أ} = -٢\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٨\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص} + ٨\overrightarrow{ع}$

٢٧ أثبت أن النقاط : أ (٥ ، ٦ ، ٧) ، ب (٧ ، -٨ ، ٩) ، حـ (٣ ، ٢٠ ، ٥) على استقامة واحدة.

٢٨ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (١ ، ٦ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ك ، ٣ ، م)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (ك ، م ، ك + م)$

وكان : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ أوجد : $\|\overrightarrow{حـ}\|$

$\frac{\sqrt{١٤}}{٢}$

٢٩ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ (٢ ، ٣ ، ٠) ، $\overrightarrow{ب} = (م ، ٢ ، ٠)$ فعين قيمة م فى الحالات الآتية :

١ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ [illegible] $\overrightarrow{ع}$ ٢ $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

٣ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٤٥°$

٣ ، -٣ ، $\frac{-٢}{٥}$ أ ، ١٠

٣٠ إذا كان : (٢ ، ٣) وكان $\overrightarrow{ب} // \overrightarrow{أ}$ فإذا كان : $\|\overrightarrow{ب}\| = ٣\sqrt{١٣}$ أوجد : $\overrightarrow{ب}$

(٦ ، -٩)

٣١ (دورثانى ٢٠١٨) أ ب حـ ء شكل رباعى حيث أ = (٣ ، ٠ ، ٢) ، ب = (٦ ، ٢ ، ٥) ، حـ = (٤ ، ٤ ، ٥) ، ء = (١ ، ٢ ، ٢)

١ اثبت أن الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع وأوجد مساحته.

٢ أوجد متجه وحدة عمودى على مستوى الشكل الرباعى.

٢٠ $\sqrt{٤٣}$ وحدة مربعة ، $\pm\left(\frac{-٣}{٤٣\sqrt{}} ، \frac{-٣}{٤٣\sqrt{}} ، \frac{-٥}{٤٣\sqrt{}}\right)$

٣٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت θ هى الزاوية بين المتجهين : $\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ ، $٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} + ٢\overrightarrow{ع}$

فإن : جا θ =

(أ) $\frac{١}{٣\sqrt{}}$ (ب) $\frac{٢}{٣}\sqrt{}$ (جـ) $\frac{٢\sqrt{}}{٣}$ (د) ليس مما سبق.

٢) إذا كان : $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{حـ} =$ صفر فإن $\overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{حـ} = \ldots$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\overleftarrow{أ}$ (د) $\|\overleftarrow{ب}\|$

متجه الوحدة العمودى على كل من المتجهين $(\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص})$ ، $(\overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ع})$ هو

(أ) $\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ع}$ (ب) $\frac{\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ع}}{\sqrt{٣}}$

(جـ) $\frac{\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ع}}{\sqrt{٣}}$ (د) $\frac{\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع}}{\sqrt{٣}}$

إذا كان : $\overleftarrow{أ} = ٣\overleftarrow{س} - ٦\overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ب} - \overleftarrow{س} + ٤\overleftarrow{ص} - ٢\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{حـ} = ٣\overleftarrow{س} - ٤\overleftarrow{ص} - ١٢\overleftarrow{ع}$ فإن مسقط المتجه $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ على المتجه $\overleftarrow{حـ}$ هو ..

(أ) ١٤ (ب) −١٤ (جـ) ١٢ (د) ١٥

٥) إذا كان : $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = \|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\|$ فإن قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ يساوى

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٣٥°

Δ أ ب حـ مساحته ٢٤ سم٢ فإن $\|\overleftarrow{ب أ} \times \overleftarrow{ب حـ}\| =$ ..

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٠ (د) ٤٨

إذا كان مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء تساوى ١٢ سم٢

فإن : $\|\overleftarrow{أ حـ} \times \overleftarrow{ب ء}\| =$ ..

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

٨) إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م

فإن : $\|\overleftarrow{م ء} \times \overleftarrow{م حـ}\| =$ ..

(أ) و (ب) $\|\overleftarrow{أ ب} \times \overleftarrow{أ ء}\|$

(جـ) $\|\overleftarrow{م حـ} \times \overleftarrow{م ب}\|$ (د) $\overleftarrow{م ء} \cdot \overleftarrow{م حـ}$

(دورتان ٢٠١٩) أ) أ ب حـ ء متوازى أضلاع وكان : $\overleftarrow{أ ب} = (٢ ، ٢ ، -١)$ ، $\overleftarrow{أ ء} = (-١ ، ٢ ، -٣)$ فإن مساحة متوازى الأضلاع = ... وحدة مربعة.

(أ) ٦ (ب) $٧\sqrt{٢}$ (جـ) $٣\sqrt{١١}$ (د) $\sqrt{١٠١}$

مساحة متوازى الأضلاع الذى قطراه $\overleftarrow{م} = ٢\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ن} = -٤\overleftarrow{س} - ٥\overleftarrow{ص}$ تساوى وحدة مساحة.

(أ) $٣\sqrt{٢}$ (ب) $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ (جـ) $٦\sqrt{٢}$ (د) ٣

مساحة متوازى أضلاع أ ب حـ ء تقاطع قطراة فى م تساوى

(أ) $\|\overleftarrow{أ م} \times \overleftarrow{ب م}\|$ (ب) $\|\overleftarrow{أ ب} \times \overleftarrow{أ م}\|$

(جـ) $\|\overleftarrow{أ ب} \times \overleftarrow{أ حـ}\|$ (د) $\|\overleftarrow{أ حـ} \times \overleftarrow{ب ء}\|$

إذا كان $\overleftarrow{أ ء}$ متوسط فى المثلث أ ب حـ

فإن $\|\overleftarrow{أ ء} \times \overleftarrow{أ ب}\| =$ مساحة Δ أ ب حـ

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ١ (د) ٢

إذا كان $\overleftarrow{أ} = (١ ، -١ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٣ ، ٢ ، ٠)$ ، $\overleftarrow{حـ} = (٠ ، ٢ ، ٤)$

فإن $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ} =$

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ١٦

$\overleftarrow{أ} \cdot (\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ}) =$

(أ) $\overleftarrow{أ} \cdot (\overleftarrow{حـ} \times \overleftarrow{ب})$ (ب) $\overleftarrow{حـ} \cdot (\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ})$

(جـ) $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ}$ (د) $\overleftarrow{حـ} \cdot (\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب})$

$\overleftarrow{ب} \cdot (\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{حـ}) =$

(أ) $(\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ}) \cdot \overleftarrow{حـ}$ (ب) $\overleftarrow{أ} \cdot (\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ})$

(جـ) $(\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}) \times \overleftarrow{حـ}$ (د) $\overleftarrow{حـ} \cdot (\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{حـ})$

$\overleftarrow{س} \cdot (\overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ع}) + \overleftarrow{ص} \cdot (\overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{س}) + \overleftarrow{ع} \cdot (\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ص}) =$

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) صفر

حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف متجاورة يمثلهما المتجهات $\vec{أ}$ (٢ ، ٠ ، ٠) ، $\vec{ب}$ = (٠ ، -٤ ، ٣) ، $\vec{حـ}$ = (٠ ، ٠ ، ٥) يساوى وحدة مكعب

(أ) ١٢ (ب) ٥٠ (حـ) ٦٠ (د) ١٢٥

إذا كانت $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{حـ}$ تمثل ثلاثة أحرف متجاورة فى متوازى سطوح حيث $\|\vec{أ}\|$ = ٢ ، زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{أ}$ هى (١٣٥° ، ٦٠° ، ١٢٠°) ، $\vec{ب}$ = (١ ، $\sqrt{٢}$ ، ٠) ، $\vec{حـ}$ = ($\sqrt{٢}$ ، ٣ ، ٥)

فإن حجم متوازى السطوح ..... وحدة مكعبة.

(أ) ١٦ (ب) ٦$\sqrt{٢}$ (حـ) ١١ (د) ١٦$\sqrt{٢}$

(دور ٢٠٠٨) فى المستوى الاحداثى س ص ص إذا كان قياس الزاوية بين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ هو θ

فإن $\frac{|\vec{أ} \cdot \vec{ب}|}{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}$ =

(أ) جا θ (ب) جتا θ (حـ) ظا θ (د) ظتا θ

إذا كان $\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|^2 + (\vec{أ} \cdot \vec{ب})^2$ = ١٤٤ ، $\|\vec{أ}\|$ = ٤ فإن $\|\vec{ب}\|$ =

(أ) ١٦ (ب) ٨ (حـ) ٣ (د) ٥

إذا كان : $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهين غير صفريين وقياس الزاوية بينهما θ

فإن : $\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|^2 + (\vec{أ} \cdot \vec{ب})^2$

(أ) $أ^2 ب^2$ (ب) ١ (جـ) $أ^2 ب^2$ جا θ (د) صفر

إذا كان كل من $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهى وحدة قياس الزاوية بينهما θ

فإن : ٢ $\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|$ ($\vec{أ} \cdot \vec{ب}$) =

(أ) جا θ جتا θ (ب) ٢ جا θ (حـ) جا ٢ θ (د) جا ٢ θ

إذا كان $\vec{أ} \times \vec{ب} = \vec{أ} \times \vec{حـ}$ فإن

(أ) $\vec{ب} = \vec{حـ}$ (ب) $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متوازيان.

(جـ) $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{حـ}$ متعامدة مثنى مثنى. (د) $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{حـ}$ فى نفس المستوى

إذا كان $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ ، $\vec{أ} \perp \vec{حـ}$ وكان : $\vec{ب}$ = (٢ ، ٣ ، ٢) ، $\vec{حـ}$ = (١ ، ٢ ، ١) وكان $\|\vec{أ}\|$ = ٤$\sqrt{٣}$ فإن $\vec{أ}$ يمكن أن يساوى

(أ) (٢ ، ٣ ، ١) (ب) (-٤ ، ٠ ، ٤) (حـ) (٤ ، ٤ ، ١٠) (د) (-١٠ ، ٠ ، ٤)

إذا كان $\vec{أ}$ = (٢ ، ١ ، ٣) ، $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \vec{أ} \cdot \vec{ب}$ فإن $\vec{ب}$

(أ) (٢ ، ١ ، ٣) (ب) (٢ ، ١ ، ٣)

(حـ) (-٢ ، ١ ، ٣) (د) (-٢ ، -١ ، ٣)

إذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهين غير صفريين فى الفراغ فإن

(أ) $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$ = أ ب جتا θ = ح

(ب) $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$ = $\vec{حـ}$ حيث $\vec{حـ}$ متجه غير صفرى

(حـ) $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$ = ٠ إذا كان $\vec{أ} \perp \vec{ب}$

(د) جميع ما سبق صحيح

إذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{حـ}$ متجهات وحدة فى أكبر قيمة للمقدار $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ}$ تساوى وحدة مكعبة

(أ) ١ (ب) -٣ (حـ) ٣ (د) -٣$\sqrt{٢}$

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ}$ = ($\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ}$)

(أ) صفر (ب) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ}$ (حـ) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ}$ (د) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ}$

إذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{حـ}$ ثلاثة متجهات غير صفرية

فإن $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ}$ = $\|\vec{أ}\| \|\vec{ب}\| \|\vec{حـ}\|$ يتحقق إذا

(أ) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ}$ = صفر (ب) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ}$ = صفر

(حـ) $\vec{ب} \cdot \vec{حـ} \times \vec{أ} \cdot \vec{حـ}$ = صفر (د) $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \vec{ب} \cdot \vec{حـ} \times \vec{أ} \cdot \vec{حـ}$ = صفر

إذا كان $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$ ، $\vec{حـ}$ متجهات وحدة وكان $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \vec{أ} \cdot \vec{حـ}$ = صفر وكان قياس الزاوية بين $\vec{ب}$ ، $\vec{حـ}$ يساوى ٤ فإن $\vec{أ}$

(أ) ٢ ($\vec{ب} \times \vec{حـ}$) (ب) ٣٠ ($\vec{ب} \times \vec{حـ}$)

(حـ) ٢$\sqrt{٢}$ ($\vec{ب} \times \vec{حـ}$) (د) ٤$\sqrt{٢}$ ($\vec{ب} \times \vec{حـ}$)

• النقط أ ، ب ، حـ ، ء فى نفس المستوى ، فإن

(أ) $\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}) =$ صفر (ب) $\overrightarrow{أ ب} \cdot (\overrightarrow{أ حـ} \times \overrightarrow{أ ء}) =$ صفر

(جـ) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{حـ} \times \overrightarrow{ء}$ (د) $\overrightarrow{أ ب} \cdot (\overrightarrow{ب حـ} \times \overrightarrow{ب ء}) \neq$ صفر

• حجم الهرم الثلاثى الذى فيه المتجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ تمثل ثلاثة أحرف غير مستوية يساوى ..... وحدة مكعبة.

(أ) $\frac{1}{2} |\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}|$ (ب) $\frac{1}{3} |\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}|$

(جـ) $\frac{1}{4} |\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}|$ (د) $\frac{1}{6} |\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}|$

(٣٢) متوازى سطوح مكون من المتجهات $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٥\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} + ك\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{حـ} = ك\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ أصغر حجم له عندما ك =

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٣٣ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (١ ، ١ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ١ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (٥ ، ١ ، -٢)$

أوجد : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}$

٣٤ إذا كان $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{حـ} = ٣\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + ٢\overrightarrow{ع}$ أوجد : $\overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{حـ} \times \overrightarrow{أ}$

٣٥ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{حـ} = ٣\overrightarrow{س}$ حقق أن :

• $\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}) \neq (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) \times \overrightarrow{حـ}$ • $(\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}) \times \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{حـ} \times (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ})$

• $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{حـ} \times \overrightarrow{أ}$

٣٦ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} - ٤\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ أوجد : $(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{حـ})$

٣٧ إذا كان $\overrightarrow{أ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{س} + \frac{3}{7}\overrightarrow{ص} + \frac{6}{7}\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = \frac{3}{7}\overrightarrow{س} - \frac{6}{7}\overrightarrow{ص} + \frac{2}{7}\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{حـ} = \frac{6}{7}\overrightarrow{س} - \frac{2}{7}\overrightarrow{ص} - \frac{3}{7}\overrightarrow{ع}$ أثبت أن :

$\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ متجهات وحدة متعامدة مثنى مثنى ثم أثبت أن : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{حـ}$

٣٨ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = -\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٣\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$

أوجد : $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{حـ}) \cdot [(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) \times (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ})]$ ٦٠

٣٩ أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف غير متوازية ، يمثلها المتجهات :

$\overrightarrow{أ} = (٣ ، -٤ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٠ ، ٢ ، -٣)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (٣ ، ٢ ، ٢)$ ٦٠٠ وحدة حجم

٤٠ أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه المتجهات : $\overrightarrow{أ} = (-٣ ، ٧ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٥ ، ٧ ، -٣)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (٧ ، -٥ ، -٣)$ هى ثلاثة أحرف خارجه من أحد رؤوسه. ٢٦٤٠ وحدة حجم

٤١ (دور أول ٢٠١٨) متوازى سطوح فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ثلاثة أحرف متجاورة حيث $\overrightarrow{أ} = (١ ، ٤ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٣ ، ٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (-١ ، ١ ، ٤)$

أوجد : (أ) حجم متوازى السطوح.

(ب) ارتفاع متوازى السطوح المرسوم على القاعدة المحددة بـ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

٤٩٠ وحدة حجم ، $\frac{147}{5}$ وحدة طول

٤٢ إذا كان حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف متجاورة ممثلة بالمتجهات $(-١٢\overrightarrow{س} + ل\overrightarrow{ع})$ ، $(٣\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع})$ ، $(٢\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - ١٥\overrightarrow{ع})$ هى ٥٤٦ أوجد : ل

١٧٩ أ ، -٣

٤٣ فى الشكل المقابل :

إذا كانت : أ (١ ، ١ ، ١) ، ب (٢ ، ١ ، ٣) ، حـ (٣ ، ٢ ، ٢) ، ء (٣ ، ٢ ، ٤)

أوجد حجم متوازى السطوح. ٥٠ وحدة حجم

٤٤ أثبت أن المتجهات : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = -٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} - ٤\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$ تقع فى مستوى واحد.

٤٥ إذا كانت : أ (٤ ، ٨ ، ١٢) ، ب (٢ ، ٤ ، ٦) ، حـ (٣ ، ٥ ، ٤) ، ء (٥ ، ٨ ، ٥)
أثبت أن النقاط : أ ، ب ، حـ ، ء تقع فى مستوى واحد.

٤٦ أوجد قيمة ل لكى تصبح المتجهات : $\overrightarrow{أ}$ (١ ، -١ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ١ ، ٢) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (١ ، ل ، -٣) فى مستوى واحد. ١٠

٤٧ أوجد ك التى تجعل النقاط أ ، ب ، حـ ، ء تقع فى نفس المستوى حيث :
أ (٣ ، -٢ ، -١) ، ب (٢ ، ٣ ، -٤) ، حـ (-١ ، ١ ، ٢) ، ء (٤ ، ٥ ، ك) $\frac{-١٤٦}{١٧}$

٤٨ برهن كلًا مما يأتى حيث : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب} \in ع^٣$
(١) $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|^٢ + |\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}|^٢ = \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \|\overrightarrow{ب}\|^٢$
(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = صفر ، $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ فإن إما $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ أو $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

٤٩ أثبت أن : لأى ثلاثة متجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ يكون :
$\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}) + \overrightarrow{ب} \times (\overrightarrow{حـ} + \overrightarrow{أ}) + \overrightarrow{حـ} \times (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) = \overrightarrow{و}$

٥٠ أثبت أن : $(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}) \times (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) = ٢ (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$

٥١ إذا كان : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{حـ} \times \overrightarrow{ء}$ ، $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ء}$ أثبت أن : المتجه $(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ء})$ ، المتجه $(\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{حـ})$ متوازيان حيث $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ، $\overrightarrow{ء}$ متجهات ليست صفرية.

٥٢ أوجد قيمة : $\frac{\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|^٢ + |\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}|^٢}{٢ \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \|\overrightarrow{ب}\|^٢}$ $\frac{١}{٢}$

٥٣ أثبت أن : $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \sqrt{(\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{أ})(\overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{ب}) - (\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب})^٢}$

٥٤ أثبت بالمتجهات أنه لأى Δ أ ب حـ يكون : $\frac{ب حـ}{جا أ} = \frac{أ حـ}{جا ب} = \frac{أ ب}{جا حـ}$

٥٥ أثبت بالمتجهات أن مساحة الشكل الرباعى المستوى أ ب حـ ء هى : $\frac{١}{٢} \|\overrightarrow{أ حـ} \times \overrightarrow{ب ء}\|$

٥٦ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهى وحدة فى $ع^٣$ تحت أى شرط يكون حاصل الضرب الاتجاهى $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ يمثل متجه وحدة فى $ع^٣$ (فسر إجابتك)

٥٧ إذا كان مجموع متجهى وحدة هو متجه وحدة أيضًا أثبت أن الفرق بين المتجهين هو متجه معياره يساوى $\sqrt{٣}$

٥٨ أثبت أنه لأى ثلاث متجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ يكون :
(١) $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{حـ}) \times (\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}) = (٢ \overrightarrow{أ}) \times (\overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{ب})$
(٢) $(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{حـ}) \times (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}) = (٢ \overrightarrow{أ}) \times (\overrightarrow{حـ} + \overrightarrow{ب})$

مسائل خمس مهارات التفكير

٥٩ إذا كانت : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ثلاث متجهات وحدة، $\overrightarrow{حـ}$ لا يقع فى مستوى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ بحيث كان قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ تساوى قياس الزاوية بين $(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$ ، $\overrightarrow{حـ}$ تساوى θ
فأثبت أن : $(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) \cdot \overrightarrow{حـ} = \frac{١}{٢}$ جا ٢ θ

٦٠ إذا كانت : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ثلاث متجهات غير متوازية فى مستوى واحد بحيث : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{و}$ فأثبت أن : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{حـ} \times \overrightarrow{أ}$ وفسر ذلك هندسيًا.

٦١ إذا كان : $\overrightarrow{أ} \neq \overrightarrow{ب} \neq \overrightarrow{٠}$ ، $\overrightarrow{أ} \times [\overrightarrow{ب} \times (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})] = \overrightarrow{٠}$
أثبت أنه إما : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ أو $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

الدرس 1 معادلة المستقيم فى الفراغ

متجه اتجاه المستقيم فى الفراغ

نعلم أن زوايا الاتجاه لأى مستقيم فى الفراغ يمر بنقطة الأصل هى قياسات الزوايا التى يصنعها هذا المستقيم مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

• ولإيجاد زوايا الاتجاه لأى مستقيم فى الفراغ لا يمر بنقطة الأصل نرسم مستقيمًا يوازيه ويمر بنقطة الأصل ونحسب زوايا الاتجاه له.

ومن الشكل المقابل :

فإن $\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$ هى زوايا اتجاه المستقيم فى الفراغ.

• جتا $\theta_{س}$ ، جتا $\theta_{ص}$ ، جتا $\theta_{ع}$ هى جيوب تمام الاتجاه لهذا المستقيم ويرمز لها بالرموز ل ، م ، ن على الترتيب حيث

ل = جتا $\theta_{س}$ ، م = جتا $\theta_{ص}$ ، ن = جتا $\theta_{ع}$

• المتجه $\overleftarrow{ى}$ = ل $\overleftarrow{س}$ + م $\overleftarrow{ص}$ + ن $\overleftarrow{ع}$ هو متجه وحدة فى اتجاه المستقيم.

، $ل^2 + م^2 + ن^2 = 1$

• متجه الاتجاه للمستقيم هو أى متجه يوازى متجه الوحدة في اتجاه المستقيم ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{هـ}$

∴ $\overleftarrow{هـ}$ = ك $\overleftarrow{ى}$ = ك (ل $\overleftarrow{س}$ + م $\overleftarrow{ص}$ + ن $\overleftarrow{ع}$) «حيث ك ∈ ح*»

∴ يمكن كتابته $\overleftarrow{هـ}$ = (أ ، ب ، حـ) حيث : أ = ك ل ، ب = ك م ، حـ = ك ن

، ∵ أ ، ب ، حـ تتناسب مع ل ، م ، ن

فإن : أ ، ب ، حـ تسمى نسب اتجاه المستقيم.

فمثلًا : إذا كانت زوايا الاتجاه لمستقيم فى الفراغ هى : ٦٠° ، ١٣٥° ، ٦٠° فإن :

• $\left(\frac{1}{2} ، -\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{2}\right)$ هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيم.

• $\overleftarrow{ى} = \left(\frac{1}{2} ، -\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{2}\right)$ متجه وحدة فى اتجاه المستقيم.

• $\overleftarrow{هـ} = ك \left(\frac{1}{2} ، -\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{2}\right)$ متجه اتجاه المستقيم حيث ك ∈ ح*

المستقيمة
ويات فى الفراغ

قناة ٣ث
سير من الخير
صلى على النبى

يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

الدرس 1 معادلة المستقيم فى الفراغ.

الدرس 2 معادلة المستوى فى الفراغ.

الدرس 3 الأوضاع النسبية لمستويين فى الفراغ.

∴ لكل ك ∈ ح* يوجد متجه اتجاه للمستقيم.

أي أن الخط المستقيم له عدد لانهائي من متجهات الاتجاه المتوازية وكل منها يوازي هذا المستقيم

• $\frac{1}{2}$ ك ، $-\frac{ك}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{2}$ ك هي نسب الاتجاه للمستقيم

ملاحظات

١ إذا علمت نقطتان أ ، ب على المستقيم فإن

• متجه اتجاه المستقيم $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

• ك $\overrightarrow{أب}$ حيث ك ∈ ح* هو أيضا متجه اتجاه لنفس المستقيم.

متجه اتجاه المستقيم المار بالنقطتين أ (٣ ، ٢ ، ٤) ، ب (١ ، ١ ، -٢)

هو $\overrightarrow{أب}$ = (-١ ، ١ ، -٢) - (٣ ، ٢ ، ٤) = (-٤ ، -١ ، -٦)

لاحظ أيضا أن ك (-٤ ، ٣ ، -٦) ، ك ∈ ح* هو أيضا متجه اتجاه لنفس المستقيم.

٢ المستقيم المار بنقطة الأصل وبالنقطة أ (س١ ، ص١ ، ع١) متجه اتجاه لنفس المستقيم.

فإن : $\overrightarrow{أ}$ = (س١ ، ص١ ، ع١) متجه اتجاه لنفس المستقيم

٣ (أ ، ٠ ، ٠) متجه اتجاه للمحور س أو (أى مستقيم يوازيه) ، (٠ ، ب ، ٠) متجه اتجاه للمحور ص أو (أى مستقيم يوازيه) ، (٠ ، ٠ ، حـ) متجه اتجاه للمحور ع أو (أى مستقيم يوازيه)

٤ المستقيم الذى متجه اتجاه له $\overrightarrow{ك}$ (أ ، ب ، ٠) يوازى المستوى س ص

وكذلك المستقيم الذى متجه اتجاه له $\overrightarrow{ك}$ (أ ، ٠ ، حـ) يوازى المستوى س ع

والمستقيم الذى متجه اتجاه له $\overrightarrow{ك}$ (٠ ، ب ، حـ) يوازى المستوى ص ع

٥ إذا كان $\overrightarrow{ك}$ متجه اتجاه لمستقيم فإن $\overrightarrow{ك}$ متجه اتجاه لنفس المستقيم وعلى ذلك تكون الزاويا (θس ، θص ، θع) ، (π - θس ، π - θص ، π - θع) هى زوايا اتجاه لنفس المستقيم.

٦ لاحظ الفرق بين جيوب تمام الاتجاه للمستقيم ونسب الاتجاه للمستقيم

• ل ، م ، ن هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيم حيث (ل ، م ، ن) هو متجه وحدة فى اتجاه المستقيم ، $ل^2 + م^2 + ن^2 = 1$

• أ ، ب ، حـ هى نسب اتجاه للمستقيم حيث : (أ ، ب ، حـ) هو متجه اتجاه للمستقيم ، (أ ، ب ، حـ) = ك (ل ، م ، ن) ، ك ≠ ٠

• (ل ، م ، ن) = $\frac{(أ ، ب ، حـ)}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + حـ^2}}$

الصور المختلفة لمعادلة المستقيم فى الفراغ

إذا كان ل مستقيم فى الفراغ حيث ء (س١ ، ص١ ، ع١) نقطة معلومة عليه

، $\overrightarrow{ك}$ = (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه له

فإن متجه موضع أى نقطة أخرى عليه $\overrightarrow{ن}$ هو

$\overrightarrow{ر}$ = (س ، ص ، ع)

يتعين من العلاقة $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{ء}$ + $\overrightarrow{ن}$ «من Δ ء ن»

، ∵ $\overrightarrow{ك}$ // $\overrightarrow{ء ن}$ ∴ $\overrightarrow{ء ن}$ = ك $\overrightarrow{ك}$ حيث ك ∈ ح*

∴ $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{ء}$ + ك $\overrightarrow{ك}$ | الصورة المتجهة لمعادلة الخط المستقيم

متجه موضع أى نقطة على المستقيم ، متجه موضع نقطة معلومة على المستقيم ، عدد حقيقى ، متجه اتجاه المستقيم

لاحظ أن

فى حالة ك = ٠ نحصل على متجه موضع النقطة ء نفسها

∴ (س ، ص ، ع) = (س١ ، ص١ ، ع١) + ك (أ ، ب ، حـ)

حيث ك عدد حقيقى لا يعبر عن عدد ثابت وحيد بل يأخذ قيمًا حقيقية مختلفة ويسمى فى هذه الحالة بارامتر وعند كل قيمة للبارامتر (ك) يمكن إيجاد نقطة على المستقيم.

∴ س = س١ + ك أ ، ص = ص١ + ك ب ، ع = ع١ + ك حـ | المعادلات البارامترية للخط المستقيم

∴ ك = $\frac{س - س_1}{أ}$ ، ك = $\frac{ص - ص_1}{ب}$ ، ك = $\frac{ع - ع_1}{حـ}$

∴ $\frac{س - س_1}{أ}$ = $\frac{ص - ص_1}{ب}$ = $\frac{ع - ع_1}{حـ}$ | الصورة الإحداثية لمعادلة الخط المستقيم

ملاحظات

• بالتعويض فى الصورة البارامترية واستنتاج الصورة الإحداثية لمعادلة الخط المستقيم

نجد أن فى حالة أ = ٠ تصبح المعادلة : $\frac{ص - ص_1}{ب}$ = $\frac{ع - ع_1}{حـ}$ ، س = $س_1$

وفى حالة ب = ٠ تصبح المعادلة $\frac{س - س_1}{أ}$ = $\frac{ع - ع_1}{حـ}$ ، ص = $ص_1$

، وفى حالة حـ = ٠ تصبح المعادلة $\frac{س - س_1}{أ}$ = $\frac{ص - ص_1}{ب}$ ، ع = $ع_1$

- حيث أن نسب الاتجاه أ ، ب ، حـ تتناسب مع جيوب تمام الاتجاه ل ، م ، ن فإنه يمكن كتابة الصورة الإحداثية لمعادلة الخط المستقيم كالتالى :

$$\frac{س - س_1}{ل} = \frac{ص - ص_1}{م} = \frac{ع - ع_1}{ن}$$

- معادلة المحور س هى ص = ٠ ، ع = ٠
- ، معادلة المحور ص هى : س = ٠ ، ع = ٠
- ، معادلة المحور ع هى : س = ٠ ، ص = ٠
- معادلة أى مستقيم يوازى المحور س ويمر بالنقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) هى ص = $ص_1$ ، ع = $ع_1$
- معادلة أى مستقيم يوازى المحور ص ويمر بالنقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) هى س = $س_1$ ، ع = $ع_1$
- معادلة أى مستقيم يوازى المحور ع ويمر بالنقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) هى س = $س_1$ ، ص = $ص_1$
- الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ، متجه اتجاه له (أ ، ب ، حـ)
  - * $\overleftarrow{ر}$ = ك (أ ، ب ، حـ) «الصورة الاتجاهية»
  - - س = ك أ ، ص = ك ب ، ع = ك حـ «المعادلات البارامترية»
  - * $\frac{س}{أ} = \frac{ص}{ب} = \frac{ع}{حـ}$ «الصورة الإحداثية»
  - * تستخدم المعادلات البارامترية للمستقيم فى ايجاد نقطة أو نقط تقاطع مستقيم مع منحنى أو أى سطح أخر (مستوى - كرة - ...)

مثال ١

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم :

(١) المار بالنقطة (٢ ، ٣ ، −١) والمتجه (−١ ، ٢ ، ٣) متجه اتجاه له.

(٢) المار بالنقطتين (−٥ ، ٢ ، ٣) ، (٧ ، ٠ ، −١)

(٣) المار بالنقطة (−٣ ، ٤ ، ٥) وزوايا الاتجاه له (٣٠° ، ٩٠° ، ٦٠°)

(٤) المار بالنقطة (٣ ، ٤ ، ١) موازيا المحور س

(٥) المار بالنقطة (−٢ ، ١ ، ٣) ويصنع زوايا متساوية مع الاتجاهات الموجبة لمحور الإحداثيات

الحل

- المعادلة المتجهة : $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٣ ، −١) + ك (−١ ، ٢ ، ٣)
- المعادلات البارامترية : س = ٢ − ك ، ص = ٣ + ٢ ك ، ع = −١ + ٣ ك
- المعادلة الإحداثية : $\frac{س - ٢}{-١} = \frac{ص - ٣}{٢} = \frac{ع + ١}{٣}$

- متجه اتجاه المستقيم = (٧ ، ٠ ، −١) − (−٥ ، ٢ ، ٣) = (١٢ ، −٢ ، −٤)
- المعادلة المتجهة : $\overleftarrow{ر}$ = (٧ ، ٠ ، −١) + ك (١٢ ، −٢ ، −٤)
- المعادلات البارامترية : س = ٧ + ١٢ ك ، ص = −٢ ك ، ع = −١ − ٤ ك
- المعادلة الإحداثية : $\frac{س - ٧}{١٢} = \frac{ص}{-٢} = \frac{ع + ١}{-٤}$

- متجه وحدة فى اتجاه المستقيم = (جتا ٣٠° ، جتا ٩٠° ، جتا ٦٠°) = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ٠ ، \frac{١}{٢}\right)$

∴ ($\sqrt{٣}$ ، ٠ ، ١) متجه اتجاه لنفس المستقيم أيضًا

- المعادلة المتجهة : $\overleftarrow{ر}$ = (−٣ ، ٤ ، ٥) + ك ($\sqrt{٣}$ ، ٠ ، ١)
- المعادلات البارامترية : س = −٣ + $\sqrt{٣}$ ك ، ص = ٤ ، ع = ٥ + ك
- المعادلة الإحداثية : ص = ٤ ، $\frac{س + ٣}{\sqrt{٣}} = \frac{ع - ٥}{١}$

ص = ٤ ، س + ٣ = $\sqrt{٣}$ (ع − ٥)

- متجه اتجاه المستقيم = (١ ، ٠ ، ٠)
- المعادلة المتجهة : $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، ٤ ، ١) + ك (١ ، ٠ ، ٠)
- المعادلات البارامترية : س = ٣ + ك ، ص = ٤ ، ع = ١
- المعادلة الإحداثية : ص = ٤ ، ع = ١

∵ المستقيم يصنع زوايا متساوية مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات

∴ جتا $\theta_س$ = جتا $\theta_ص$ = جتا $\theta_ع$

، ∵ جتا² θ س + جتا² θ ص + جتا² θ ع = ١

∴ جتا² θ س = جتا² θ ص = جتا² θ ع = $\frac{١}{٣}$

∴ جتا θ س = جتا θ ص = جتا θ ع = ± $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ متجه اتجاه للمستقيم = ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$)

∴ (١ ، ١ ، ١) متجه اتجاه لنفس المستقيم أيضًا.

• المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = (-٢ ، ١ ، ٣) + ك (١ ، ١ ، ١)

• المعادلات البارامترية : س = -٢ + ك ، ص = ١ + ك ، ع = ٣ + ك

• المعادلة الإحداثية : س + ٢ = ص - ١ = ع - ٣

مثال ٢

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم وإحداثيات نقطة عليه فى كل من الحالات الآتية:

(١) المار بنقطة الأصل ونسب الاتجاه له ٢ ، -١ ، ٧

(٢) الذى معادلته الاتجاهية : $\overrightarrow{ر}$ = (-١ ، ٢ ، ٥) + ك (-١ ، ٤ ، ٣)

(٣) الذى معادلته الكارتيزية : ٣ س = ٤ ص = $\frac{-ع + ١}{٥}$

(٤) الذى معادلته الكارتيزية : ص = ٥ ، $\frac{س - ٤}{٣}$ = $\frac{٢ ع - ١}{٦}$

الحل

(١) • المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = ك (٢ ، -١ ، ٧)

• المعادلات البارامترية : س = ٢ ك ، ص = -ك ، ع = ٧ ك

• المعادلة الإحداثية : $\frac{س}{٢}$ = $\frac{ص}{-١}$ = $\frac{ع}{٧}$

• وبوضع س = ٢ ∴ ص = -١ ، ع = ٧

∴ (٢ ، -١ ، ٧) إحداثيات نقطة على المستقيم.

(٢) • المعادلات البارامترية : س = -١ - ك ، ص = ٢ + ٤ ك ، ع = ٥ + ٣ ك

• المعادلة الإحداثية : $\frac{س + ١}{-١}$ = $\frac{ص - ٢}{٤}$ = $\frac{ع - ٥}{٣}$

• وبوضع س = -١ ∴ ص = ٢ ، ع = ٥

∴ (-١ ، ٢ ، ٥) إحداثيات نقطة على المستقيم.

(٣) • بوضع ٣ س = ٤ ص = $\frac{-ع + ١}{٥}$ = ك نستنتج أن :

• س = $\frac{١}{٣}$ ك ، ص = $\frac{١}{٤}$ ك ، ع = ١ - ٥ ك وهى المعادلات البارامترية للمستقيم.

• $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٠ ، ١) + ك ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، -٥) وهى المعادلة المتجهة للمستقيم.

• وبوضع ك = ٢٤ ∴ س = ٨ ∴ ص = ٦ ، ع = -١١٩

∴ (٨ ، ٦ ، -١١٩) إحداثيات نقطة على المستقيم.

(٤) • بوضع $\frac{س - ٤}{٣}$ = $\frac{٢ ع + ١}{٦}$ = ك

• س = ٤ + ٣ ك ، ص = ٥ ، ع = -$\frac{١}{٢}$ + ٣ ك وهى المعادلات البارامترية للمستقيم.

• $\overrightarrow{ر}$ = (٤ ، ٥ ، -$\frac{١}{٢}$) + ك (٣ ، ٠ ، ٣) وهى المعادلة المتجهة للمستقيم.

• وبوضع ك = ١ ∴ س = ٧ ، ع = ٢$\frac{١}{٢}$ ، ص = ٥

∴ (٧ ، ٥ ، ٢$\frac{١}{٢}$) إحداثيات نقطة على المستقيم.

مثال ٣

أوجد معادلة الخط المستقيم :

(١) المار بالنقطة أ (٢ ، ٣ ، -٥) موازيًا المستقيم المار بالنقطتين :

ب (-١ ، ٣ ، ٢) ، حـ (٢ ، -١ ، ٣) وأثبت أنه يمر بالنقطة (١٧ ، -١٧ ، ٠)

(٢) المار بالنقطة (-٢ ، ٣ ، ٤) موازيًا المستقيم $\frac{س - ٢}{٣}$ = $\frac{٢ ص + ١}{٦}$ = $\frac{ع - ٤}{٢}$

(٣) المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ل١ : $\overrightarrow{ر}_١$ = (١ ، -١ ، ٢) + ك١ (٣ ، -٢ ، ٥)

ل٢ : $\overrightarrow{ر}_٢$ = (٨ ، -٢ ، ١٤) + ك٢ (١ ، ٣ ، ٢) والنقطة (٢ ، -٣ ، ١)

الحل

(١) ∵ المستقيم المطلوب يوازى $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ هو متجه اتجاه للمستقيم.

، $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = (٢ ، −١ ، ٣) − (−١ ، ٣ ، ٢) = (٣ ، −٤ ، ١)

• المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، ٣ ، −٥) + ك (٣ ، −٤ ، ١)

• المعادلات البارامترية : س = ٢ + ٣ ك ، ص = ٣ − ٤ ك ، ع = −٥ + ك

• المعادلة الإحداثية : $\frac{\text{س} - ٢}{٣} = \frac{\text{ص} - ٣}{-٤} = \text{ع} + ٥$

، ∵ $\frac{١٧ - ٢}{٣} = ٥$ ، $\frac{-١٧ - ٣}{-٤} = ٥$ ، ٠ + ٥ = ٥

∴ المستقيم يمر بالنقطة (١٧ ، −١٧ ، ٠)

(٢) ∵ معادلة المستقيم المعطى هى :

$\frac{\text{س} - ٢}{٣} = \frac{٢\text{ص} + ١}{٦} = \frac{\text{ع} - ٤}{٢}$

أى أن $\frac{\text{س} - ٢}{٣} = \frac{\text{ص} + \frac{١}{٢}}{٣}$

$= \frac{\text{ع} - ٤}{٢}$

لاحظ أن

يمكن وضع المعادلة الإحداثية على الصورة :

$\frac{\text{س} - \text{س}_١}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_١}{\text{حـ}}$

، لجعل معاملات س ، ص ، ع هى الواحد الصحيح، فيكون (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه للمستقيم ، (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) نقطة عليه.

∴ (٣ ، ٣ ، ٢) متجه اتجاه للمستقيم المعطى.

، ∵ المستقيم المطلوب يوازيه. ∴ (٣ ، ٣ ، ٢) متجه اتجاه للمستقيم المطلوب.

• المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (−٢ ، ٣ ، ٤) + ك (٣ ، ٣ ، ٢)

• المعادلات البارامترية : س = −٢ + ٣ ك ، ص = ٣ + ٣ ك ، ع = ٤ + ٢ ك

• المعادلة الإحداثية : $\frac{\text{س} + ٢}{٣} = \frac{\text{ص} - ٣}{٣} = \frac{\text{ع} - ٤}{٢}$

(٣) عند نقطة تقاطع المستقيمين يكون : $\overrightarrow{\text{ر}}_١ = \overrightarrow{\text{ر}}_٢$

∴ (١ ، −١ ، ٢) + ك$_١$ (٣ ، −٢ ، ٥) = (٨ ، −٢ ، ١٤) + ك$_٢$ (١ ، ٣ ، ٢)

∴ ١ + ٣ ك$_١$ = ٨ + ك$_٢$ ∴ ٣ ك$_١$ − ك$_٢$ = ٧ (١)

، −١ − ٢ ك$_١$ = −٢ + ٣ ك$_٢$ ∴ ٢ ك$_١$ + ٣ ك$_٢$ = ١ (٢)

، ٢ + ٥ ك$_١$ = ١٤ + ٢ ك$_٢$ ∴ ٥ ك$_١$ − ٢ ك$_٢$ = ١٢ (٣)

بحل (١) ، (٢) : ∴ ك$_١$ = ٢ ، ك$_٢$ = −١

، نجد أن الحلين يحققان المعادلة (٣) أيضًا وبالتعويض عن ك$_١$ فى معادلة المستقيم ل$_١$

∴ نقطة التقاطع هى :

(س ، ص ، ع) = (١ ، −١ ، ٢) + ٢ (٣ ، −٢ ، ٥) = (٧ ، −٥ ، ١٢)

∴ المتجه (٢ ، −٣ ، ١) − (٧ ، −٥ ، ١٢) = (−٥ ، ٢ ، −١١) متجه اتجاه للمستقيم المطلوب.

• المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −٣ ، ١) + ك (−٥ ، ٢ ، −١١)

• المعادلات البارامترية : س = ٢ − ٥ ك ، ص = −٣ + ٢ ك ، ع = ١ − ١١ ك

• المعادلة الإحداثية : $\frac{\text{س} - ٢}{-٥} = \frac{\text{ص} + ٣}{٢} = \frac{\text{ع} - ١}{-١١}$

الزاوية بين مستقيمين فى الفراغ

قياس الزاوية بين مستقيمين فى الفراغ هو قياس الزاوية الصغرى بينهما

فإذا كان : ل$_١$ ، ل$_٢$ مستقيمين فى الفراغ متجها اتجاهيهما

$\overrightarrow{\text{هـ}}_١$ = (أ$_١$ ، ب$_١$ ، حـ$_١$) ، $\overrightarrow{\text{هـ}}_٢$ = (أ$_٢$ ، ب$_٢$ ، حـ$_٢$)

فإن جيب تمام الزاوية الصغرى (θ) بين المستقيمين ل$_١$ ، ل$_٢$

تعطى بالعلاقة : $\boxed{\text{جتا } \theta = \frac{|\overrightarrow{\text{هـ}}_١ \cdot \overrightarrow{\text{هـ}}_٢|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}_١\| \, \|\overrightarrow{\text{هـ}}_٢\|}}$

وإذا كان : (ل$_١$ ، م$_١$ ، ن$_١$) ، (ل$_٢$ ، م$_٢$ ، ن$_٢$) هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين

فإن : $\boxed{\text{جتا } \theta = |\text{ل}_١ \text{ل}_٢ + \text{م}_١ \text{م}_٢ + \text{ن}_١ \text{ن}_٢|}$

مثال ٤

أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين :

① $ل_١$ يمر بالنقطتين (٥ ، ٣ ، ٥) ، (−١ ، ٧ ، ٣)

، $ل_٢$ يمر بالنقطتين (٢ ، ٥ ، ٤) ، (−٢ ، ٣ ، ١)

② $ل_١ : \overleftarrow{ر} = (٢ ، −٣ ، ٤) + ك\,(١ ، ٢ ، ٥)$ ، $ل_٢ : \frac{س − ٣}{٢} = \frac{ص + ٤}{١} = \frac{ع + ٦}{٤}$

③ إذا كانت جيوب تمام اتجاهما هى : $\left(\frac{١}{٢} ، −\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{٢}\right)$ ، $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢\sqrt{٢}} ، \frac{−١}{٢\sqrt{٢}}\right)$

الحـــل

① $\overleftarrow{هـ_١} = (−١ ، ٧ ، ٣) − (٥ ، ٣ ، ٥) = (−٦ ، ٤ ، −٢)$

، $\overleftarrow{هـ_٢} = (−٢ ، ٣ ، ١) − (٢ ، ٥ ، ٤) = (−٤ ، −٢ ، −٣)$

$\because جتا\,θ = \frac{|\overleftarrow{هـ_١} . \overleftarrow{هـ_٢}|}{\|\overleftarrow{هـ_١}\|\,\|\overleftarrow{هـ_٢}\|}$

$\therefore جتا\,θ = \frac{|(−٦ ، ٤ ، −٢) . (−٤ ، −٢ ، −٣)|}{\sqrt{(−٦)^٢ + (٤)^٢ + (−٢)^٢}\,\sqrt{(−٤)^٢ + (−٢)^٢ + (−٣)^٢}}$

$= \frac{|٢٤ − ٨ + ٦|}{٢\sqrt{١٤} \times \sqrt{٢٩}} = \frac{١١}{٤\sqrt{٠٦}}$

$\therefore θ \simeq ٤٥° \; ٥٤' \; ٥٦''$

② $\overleftarrow{هـ_١} = (١ ، ٢ ، ٥)$ ، $\overleftarrow{هـ_٢} = (٢ ، ١ ، ٤)$ $\quad \because جتا\,θ = \frac{|\overleftarrow{هـ_١} . \overleftarrow{هـ_٢}|}{\|\overleftarrow{هـ_١}\|\,\|\overleftarrow{هـ_٢}\|}$

$\therefore جتا\,θ = \frac{|(١ ، ٢ ، ٥) . (٢ ، ١ ، ٤)|}{\sqrt{١ + ٤ + ٢٥}\,\sqrt{٤ + ١ + ١٦}} = \frac{|٢ + ٢ + ٢٠|}{\sqrt{٣٠}\,\sqrt{٢١}} = \frac{٨}{\sqrt{٧٠}}$

$\therefore θ \simeq ٢٦° \; ١' \; ١٧''$

③ $(ل_١ ، م_١ ، ن_١) = \left(\frac{١}{٢} ، −\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{٢}\right)$

، $(ل_٢ ، م_٢ ، ن_٢) = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢\sqrt{٢}} ، −\frac{١}{٢\sqrt{٢}}\right)$

$\because جتا\,θ = |ل_١ ل_٢ + م_١ م_٢ + ن_١ ن_٢|$

$\therefore جتا\,θ = \left|\left(\frac{١}{٢}\right)\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) + \left(−\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)\left(\frac{١}{٢\sqrt{٢}}\right) + \left(\frac{١}{٢}\right)\left(\frac{−١}{٢\sqrt{٢}}\right)\right|$

$= \left|\frac{\sqrt{٦} − \sqrt{٢} − ١}{٤\sqrt{٢}}\right|$

$\therefore θ \simeq ٤٤° \; ٤٨' \; ٨٩''$

المستقيمان المتوازيان فى الفراغ

إذا كان $\overleftarrow{هـ_١} = (أ_١ ، ب_١ ، جـ_١)$ ، $\overleftarrow{هـ_٢} = (أ_٢ ، ب_٢ ، جـ_٢)$

هما متجها اتجاه المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ فإن : $\boxed{ل_١ // ل_٢}$ إذا وفقط إذا كان $\boxed{\overleftarrow{هـ_١} // \overleftarrow{هـ_٢}}$

وهذا الشرط يمكن تحققه بصور مختلفة :

(١) $\overleftarrow{هـ_١} = ك\,\overleftarrow{هـ_٢}$ ، $ك \in ح^*$ $\qquad$ (٢) $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$

(٣) $\overleftarrow{هـ_١} \times \overleftarrow{هـ_٢} = \overleftarrow{و}$

ملاحظات

① إذا توازى مستقيمان وكانت نقطة على أحدهما تحقق معادلة المستقيم الآخر فإن المستقيمين منطبقان.

② إذا لم يحقق المستقيمان إحدى شروط التوازى السابقة فإن المستقيمين إما متقاطعان أو متخالفان.

مثال ٥

إذا كان المستقيمان : $ل_١ : \overleftarrow{ر} = (٢ ، ٣ ، −٤) + ك\,(٢ ، ٣ ، أ)$

$ل_٢ : \frac{س − ٥}{ب} = \frac{ص + ٤}{٦} = \frac{ع − ٤}{٢}$ متوازيين.

أوجد : أ ، ب

الحل

(٢ ، ٣ ، أ) متجه اتجاه للمستقيم $ل_١$ ، (ب ، ٦ ، ٣) متجه اتجاه للمستقيم $ل_٢$

∵ $ل_١ // ل_٢$ ∴ $\frac{٢}{ب} = \frac{٣}{٦} = \frac{أ}{٣}$

∴ ب = ٤ ، أ = ١

المستقيمان المتعامدان في الفراغ

إذا كان $\overrightarrow{ق_١} = (أ_١ ، ب_١ ، جـ_١)$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = (أ_٢ ، ب_٢ ، جـ_٢)$

فما متجها اتجاه المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ فإن $ل_١ \perp ل_٢$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{ق_١} \cdot \overrightarrow{ق_٢} = صفر$

$أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + جـ_١ جـ_٢ = صفر$

ويمكن استخدام جيوب التمام الاتجاهية لكل من المستقيمين كمتجه اتجاه.

ملاحظات

١ المستقيمان المتوازيان يجمعهما مستوى واحد.

٢ المستقيمان المتقاطعان يجمعهما مستوى واحد.

٣ المستقيمان المتعامدان

أما أن يكونا متقاطعين على التعامد وعندها يجمعهما مستوى واحد

أ، متخالفين وعندها لا يمكن أن يجمعهما مستوى واحد.

مثال ٦

أثبت أن المستقيمين : $ل_١ : \overrightarrow{ر} = (١ ، ٢ ، ٤) + ك_١ (٤ ، -٢ ، ٢)$

، $ل_٢$: س = ١ − ٦ $ك_٢$ ، ص = ١ + ٢١ $ك_٢$ ، ع = ١ + ٣٣ $ك_٢$

متعامدان ومتخالفان.

الحل

∵ متجه اتجاه المستقيم $ل_١$ = (٤ ، −٢ ، ٢)

، متجه اتجاه المستقيم $ل_٢$ = (−٦ ، ٢١ ، ٣٣)

∴ $\overrightarrow{ق_١} \cdot \overrightarrow{ق_٢}$ = (٤ ، −٢ ، ٢) . (−٦ ، ٢١ ، ٣٣)

= ٤ × −٦ + −٢ × ٢١ + ٢ × ٣٣ = صفر

∴ المستقيمان متعامدان.

[illegible]

∵ $ل_١$: س = ١ + ٤ $ك_١$ ، ص = ٢ − ٢ $ك_١$ ، ع = ٤ + ٢ $ك_١$

∵ $ل_٢$: س = ١ − ٦ $ك_٢$ ، ص = ١ + ٢١ $ك_٢$ ، ع = ١ + ٣٣ $ك_٢$

∴ ٤ + ٤ $ك_١$ = ١ − ٦ $ك_٢$

وبما ٢ $ك_١$ + ٣ $ك_٢$ = ٠

، ٢ − ٢ $ك_١$ = ١ + ٢١ $ك_٢$

وبما ٢ $ك_١$ + ٢١ $ك_٢$ = ١

، ٤ + ٢ $ك_١$ = ١ + ٣٣ $ك_٢$

وبما ٢ $ك_١$ − ٣٣ $ك_٢$ = ٣

وبحل (١) ، (٢) [illegible]

$ك_١$ = [illegible] ، $ك_٢$ = [illegible]

وبالتعويض في [illegible]

∴ ٢ × [illegible] + ٣٣ × [illegible] = ٣

∴ لا يوجد $ك_١$ ، $ك_٢$ تحقق المعادلات (١) ، (٢) معا

∴ المستقيمان لا يتقاطعان

، ∵ المستقيمان متعامدان

∴ المستقيمان متعامدان ومتخالفان

لاثبات أن المستقيمين متخالفان

∵ $ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٢ ، ٤) + $ك_١$ (٤ ، −٢ ، ٢)

[illegible]

تحذير

في المعادلات التي من الصورة للمستقيم

حالما ان معاملات س ، ص ، ع في

و حد الصحيح في معادلات $ك_١$ هي

مركبات متجه اتجاه المستقيم

ملاحظة

في المستقيمين الغير متوازيين $ل_١$ (س ، ص ، ع)

، $ك_١$ (أ ، ب ، جـ)

و $ل_٢$ (س ، ص ، ع) ، $ك_٢$ (أ ، ب ، جـ)

إذا وجدت قيمة لكل من $ك_١$ ، $ك_٢$ تحقق أن $ل_١$ ، $ل_٢$

فإن المستقيمين متقاطعان

إذا لم توجد قيمة لكل من $ك_١$ ، $ك_٢$ تحقق أن $ل_١$ ، $ل_٢$

فإن المستقيمين متخالفان

ملاحظة

المستقيمان $ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{ق_١}$ + $ك_١$ $\overrightarrow{ق_١}$

، $ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{ق_٢}$ + $ك_٢$ $\overrightarrow{ق_٢}$

يكونان متخالفين إذا كان $\overrightarrow{ق_١} \cdot \overrightarrow{ق_٢}$ ≠ صفر

∵ $\overrightarrow{ق} = (١ ، ١ ، ١) \times \overrightarrow{هـ} = (-٦ ، ٢١ ، ٣٣)$

$\overrightarrow{ءك} = (١ - ١ ، ٢ - ١ ، ٤ - ١) = (٠ ، -١ ، -٣)$

∴ $\overrightarrow{ءك} \cdot (\overrightarrow{ق} \times \overrightarrow{هـ}) = \begin{vmatrix} ٠ & -١ & -٣ \\ ٤ & -٢ & ٢ \\ ٦ & ٢١ & ٣٣ \end{vmatrix} = (٤ \times ٣٣ + ٦ \times ٢) - ٣ (٤ \times ٢١ + ٦ \times ٢)$

$= ٧٢ \neq$ صفر

∴ المستقيمان متخالفان.

طول العمود الساقط من نقطة على مستقيم في الفراغ

بفرض مستقيم ل في الفراغ معادلته هي $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ب} + ك \overrightarrow{ق}$ يمر بالنقطة ب ومتجه اتجاهه $\overrightarrow{ق}$ فإنه لإيجاد بعد نقطة حـ في الفراغ عن المستقيم ل وليكن (حـ ، ء) حيث $\overline{حـ ء} \perp ل$ ، $ء \in ل$ نتبع إحدى الطرق التالية :

الطريقة الأولى

١ نوجد $ب حـ = \|\overrightarrow{ب حـ}\|$

٢ نوجد $ب ء$ = طول مسقط $\overrightarrow{ب حـ}$ في اتجاه $\overrightarrow{ق}$ $= \dfrac{|\overrightarrow{ب حـ} \cdot \overrightarrow{ق}|}{\|\overrightarrow{ق}\|}$

٣ نوجد طول العمود (حـ ، ء) $= \sqrt{(ب حـ)^٢ - (ب ء)^٢}$ باستخدام فيثاغورس.

الطريقة الثانية

١ نوجد $ب حـ = \|\overrightarrow{ب حـ}\|$

٢ نوجد قياس الزاوية θ من القانون : جتا θ $= \dfrac{|\overrightarrow{ب حـ} \cdot \overrightarrow{ق}|}{\|\overrightarrow{ب حـ}\| \, \|\overrightarrow{ق}\|}$

٣ نوجد طول العمود (حـ ، ء) = $ب حـ$ جا θ

الطريقة الثالثة

١ ∵ $ء \in ل$ ∴ ء تحقق معادلة المستقيم. ∴ نكتب ء بدلالة ك

٢ ∵ $\overline{حـ ء} \perp ل$ ∴ $\overrightarrow{حـ ء} \cdot \overrightarrow{ق}$ = صفر ومنها نوجد ك وبالتالي نوجد النقطة ء

٣ نوجد طول العمود حـ ء = $\|\overrightarrow{حـ ء}\|$

الطريقة الرابعة

$|\overrightarrow{ب حـ} \times \overrightarrow{ق}| = |\overrightarrow{ق}| \, |\overrightarrow{ب حـ}|$ جا θ

∴ طول العمود = $|\overrightarrow{ب حـ}|$ جا θ

∴ طول العمود (حـ ، ء) = $\dfrac{|\overrightarrow{ب حـ} \times \overrightarrow{ق}|}{|\overrightarrow{ق}|}$

المثال التالي يوضح ذلك

مثال ٧ أوجد بعد النقطة أ (٢ ، ٢√٥ ، ٣) عن المستقيم ل الذي معادلته الاتجاهية :

$\overrightarrow{ر} = (-٢ ، ٣√٥ ، ١٠) + ك (٨ ، -٢√٥ ، ٢)$

الحل

∵ ب (-٢ ، ٣√٥ ، ١٠) نقطة على المستقيم ل

∴ $\overrightarrow{ب أ} = (٢ ، ٢√٥ ، ٣) - (-٢ ، ٣√٥ ، ١٠)$

$= (٤ ، -√٥ ، ٧)$

∴ $ب أ = \|\overrightarrow{ب أ}\| = \sqrt{٤^٢ + (-√٥)^٢ + ٧^٢} = ٥$ وحدة طول.

، $ب حـ$ = طول مسقط $\overrightarrow{ب أ}$ على المستقيم ل

، ∵ $\overrightarrow{ق} = (٨ ، -٢√٥ ، ٢)$ متجه اتجاه المستقيم ل

∴ $ب حـ = \dfrac{|\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{ق}|}{|\overrightarrow{ق}|} = \dfrac{|(٤ ، -√٥ ، ٧) \cdot (٨ ، -٢√٥ ، ٢)|}{\sqrt{٨^٢ + (-٢√٥)^٢ + ٢^٢}}$

$= \dfrac{|٣٢ + ١٠ + ١٤|}{\sqrt{٦٤ + ٢٠ + ٤}} = \dfrac{٥٦}{√٨٨} = ٥√٢$ وحدة طول

∴ بعد النقطة أ عن المستقيم ل = أحـ = $\sqrt{٥^٢ - (٥√٢)^٢} = ٥$ وحدة طول

∵ متجه اتجاه المستقيم ل هو $\overrightarrow{ق} = (٨ ، -٢√٥ ، ٢)$

، ∵ متجه اتجاه $\overrightarrow{ب أ}$ هو $\overrightarrow{ق} = (٤ ، -√٥ ، ٧)$

∴ جتا θ $= \dfrac{|(٨ ، -٢√٥ ، ٢) \cdot (٤ ، -√٥ ، ٧)|}{\sqrt{٦٤ + ٢٠ + ٤} \, \sqrt{١٦ + ٥ + ٤٩}}$

2

∴ ق (د θ) = ١٩ أ ١٦″ ، ∵ أ ب = ٥ وحدة طول.

∴ طول العمود = أ ب جا θ = ٥ جا ١٩ أ ١٦″ ≈ ١.٤ وحدة طول.

بفرض حـ موقع العمودى المرسوم من أ إلى المستقيم.

أى حـ هى مسقط النقطة أ على المستقيم ل

∴ حـ = (−٢ + ٨ ك ، ٢ √٥ − √٥ ك ، ١ + ٢ ك)

∴ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ = (−٤ + ٨ ك ، √٥ − √٥ ك ، −٢ + ٢ ك)

، ∵ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ⊥ ل ∴ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$. $\overrightarrow{\text{ق}}$ = صفر

∴ (−٤ + ٨ ك ، √٥ − √٥ ك ، −٢ + ٢ ك) . (٨ ، −√٥ ، ٢) = ٠

∴ −٣٢ + ٦٤ ك − ٥ + ٥ ك − ٤ + ٤ ك = ٠

∴ ٧٣ ك = ٤١ ، ك = $\frac{٤١}{٧٣}$

∴ طول العمود = $\|\overrightarrow{\text{أحـ}}\|$

= $\sqrt{(-٤ + ٨ \times \frac{٤١}{٧٣})^٢ + (\sqrt{٥} - \sqrt{٥} \times \frac{٤١}{٧٣})^٢ + (٢ + ٢ \times \frac{٤١}{٧٣})^٢}$

= $\frac{١٢}{\sqrt{٧٣}}$ وحدة طول.

∵ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = (٤ ، −√٥ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ × $\overrightarrow{\text{ق}}$ = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٤ & -\sqrt{٥} & ٢ \\ ٨ & -\sqrt{٥} & ٢ \end{vmatrix}$ = ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٤ √٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ طول العمود = $\frac{\|\overrightarrow{\text{ب أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}}\|}{\|\overrightarrow{\text{ق}}\|}$ = $\frac{\sqrt{(٨)^٢ + (٤\sqrt{٥})^٢}}{\sqrt{(٨)^٢ + (-\sqrt{٥})^٢ + (٢)^٢}}$ = $\frac{١٢}{\sqrt{٧٣}}$ ≈ ١.٤ وحدة طول

ملاحظة

عند وضع مستقيم بالنسبة لكرة نوجد المعادلات البارامترية للمستقيم ثم نعوض بها فى معادلة الكرة فإذا كانت ك

+ قيمة وحيدة فإن المستقيم يمس الكرة.

+ قيمتان فإن المستقيم يقطع الكرة

ليس لها قيمة حقيقية فإن المستقيم لا يقطع الكرة

مثال 8

مركز وضع المستقيم: ن = (١ ، ٣ ، ١) + ك (١ ، ٣ ، ٢)

المعادلة للكرة: س² + ص² + ع² − ٢ س − ٤ ص − ٢ ع − ٣٩ = ٠

الحل

∵ ن = (١ ، ٣ ، ١) + ك (١ ، ٣ ، ٢)

∴ س = ١ + ك ، ص = ٣ + ٣ ك ، ع = ١ + ٢ ك

وبالتعويض فى معادلة الكرة

∴ (١ + ك)² + (٣ + ٣ ك)² + (١ + ٢ ك)² − ٢ (١ + ك) − ٤ (٣ + ٣ ك) − ٢ (١ + ٢ ك) = ٣٩

∴ ١٤ ك² = ٥٦

∴ ك² = ٤

∴ ك = ٢ ، −٢

∴ المستقيم يقطع الكرة

5 الفصل

على معادلة المستقيم في الفراغ

♣ مستويات عليا

أولاً

١ أوجد متجه اتجاه كل من المستقيمين الآتيين

• مستقيم يمر بنقطة الأصل و نقطة (٢ ، ٣ ، ٢)

• مستقيم يمر بالنقطتين جـ (١ ، ٢ ، ٣) ، د (٠ ، ٠ ، ١)

٢ أوجد جيوب تمام الاتجاه للمستقيم الذي نسب اتجاهه

(٢ ، ٢ ، ٣)

٣ مستقيم يمر بالنقطتين (٢ ، ٢ ، ١) ، (٣ ، ٢ ، ٢) أوجد جيوب تمام اتجاه المستقيم

٤ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و متجهها لمعادلة مستقيم هو (٢ ، ٣ ، ٤) ثم أوجد نقطة أخرى على هذا المستقيم

٥ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم أ ب حيث أ (٢ ، ٣ ، ٢) ، ب (٥ ، ١ ، ٢)

٦ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم

ثم أوجد نقطة تقع على هذا المستقيم

٧ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ (٣ ، ٢ ، ٠) ، (٨ ، ٠ ، ١)

ثم أثبت أن أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة حيث جـ (١١ ، ١ ، ٢)

٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

• أي متجه تالي يعطي جيوب تمام اتجاه المستقيم

(أ) $\left(\frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$ (ب) $\left(\frac{٢}{٣} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

(جـ) (١ ، ١ ، ١) (د) (٠ ، ٠ ، ١)

(٩) إذا كانت جيوب تمام الاتجاه لمستقيم هى $\left(\frac{١}{\text{جـ}}، \frac{١}{\text{جـ}}، \frac{١}{\text{جـ}}\right)$ فإن : .....

(أ) جـ < ٠ (ب) ٠ < جـ < ١ (جـ) جـ = ± $\sqrt{٣}$ (د) جـ > ١

(١٠) معادلة المستقيم المار بالنقطة أ (−١ ، ٠ ، ٢) والمتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ = (١ ، −١ ، ٣) متجه اتجاه له هى .....

(أ) $\frac{\text{س} - ١}{٢} = \frac{\text{ص}}{١} = \frac{\text{ع} - ١}{-١}$ (ب) $\frac{\text{س} + ١}{١} = \frac{\text{ص}}{-١} = \frac{\text{ع} - ٢}{٣}$

(جـ) $\frac{\text{س} - ١}{٣} = \frac{\text{ص}}{-١} = \frac{\text{ع}}{١}$ (د) $\frac{\text{س} - ١}{١} = \frac{\text{ص} - ١}{-١} = \frac{\text{ع}}{٢}$

(١١) معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، −١ ، ٣) ، (٠ ، ٣ ، ١) هى .....

(أ) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (٢ ، −٤ ، ٢)

(ب) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (٢ ، ٢ ، ٤)

(جـ) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −٤ ، ٢) + ك (٢ ، −١ ، ٣)

(د) $\overleftarrow{\text{ر}}$. (٢ ، −٤ ، ٢) = صفر

(١٢) معادلة المستقيم المار بالنقطتين (−٢ ، ٤ ، ٢) ، (٧ ، −٢ ، ٥) هى .....

(أ) $\frac{\text{س} + ٢}{٣} = \frac{\text{ص} - ٤}{-٢} = \frac{\text{ع} - ٢}{١}$ (ب) $\frac{\text{س}}{٧} = \frac{\text{ص}}{-٢} = \frac{\text{ع}}{٥}$

(جـ) $\frac{\text{س}}{-٢} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٢}$ (د) $\frac{\text{س} - ١}{١} = \frac{\text{ص} - ٢}{٣} = \frac{\text{ع} + ١}{١}$

(١٣) المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطتين أ (−١ ، ٠ ، ٣) ، ب (١ ، −١ ، ٠) هى .....

(أ) س = −١ + ك ، ص = −ك ، ع = ٣ − ٣ ك

(ب) س = −١ + ٢ ك ، ص = −ك ، ع = −٢ ك

(جـ) س = ١ + ٢ ك ، ص = −١ − ك ، ع = −٢ ك

(د) س = ١ + ٢ ك ، ص = −١ + ك ، ع = ٣ − ٣ ك

(١٤) معادلة المستقيم الذى معادلته المتجهه : $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٣ ، ٩) + ك (٥ ، ٤ ، ٢) هى .....

(أ) س − ٥ = $\frac{\text{ص} - ٤}{٣} = \frac{\text{ع} - ٢}{٩}$ (ب) $\frac{\text{س} - ١}{٥} = \frac{\text{ص} - ٣}{٤} = \frac{\text{ع} - ٩}{٢}$

(جـ) س + ٥ = $\frac{\text{ص} + ٤}{٣} = \frac{\text{ع} + ٢}{٩}$ (د) $\frac{\text{س} + ١}{٥} = \frac{\text{ص} + ٣}{٤} = \frac{\text{ع} + ٩}{٢}$

(١٥) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى معادلته الإحداثية : $\frac{\text{س} + ٣}{٢} = \frac{٢\text{ص} - ١}{٥} = \frac{٣\text{ع} + ٢}{٤}$ هى .....

(أ) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = $\left(-٣ ، \frac{١}{٢} ، \frac{-٢}{٣}\right)$ + ك $\left(٢ ، \frac{٥}{٢} ، \frac{٤}{٣}\right)$

(ب) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (−٣ ، ١ ، −٢) + ك (٢ ، ٥ ، ٤)

(جـ) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، ٥ ، ٤) + ك (−٣ ، ١ ، −٢)

(د) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = $\left(٢ ، \frac{٥}{٢} ، \frac{٤}{٣}\right)$ + ك $\left(-٣ ، -\frac{١}{٢} ، \frac{-٢}{٣}\right)$

(١٦) أى من المستقيمات الآتية يمر بالنقطة (−٢ ، ٣ ، ٥) وموازى للمستقيم ل : $\frac{\text{س} - ١}{٢} = \frac{\text{ص} + ١}{٤} = \frac{\text{ع} - ٣}{٣}$ ؟

(أ) س = −٢ + ٢ ك ، ص = ٣ + ٤ ك ، ع = ٥ + ٣ ك

(ب) $\frac{\text{س} + ٢}{٢} = \frac{\text{ص} - ٣}{٤} = \frac{\text{ع} - ٥}{٣}$

(جـ) س = ١ + ٢ ك ، ص = −١ + ٤ ك ، ع = ٣ + ٣ ك

(د) س = ٢ + ٢ ك ، ص = −٣ + ٤ ك ، ع = −٥ + ٣ ك

(١٧) معادلة المحور ص فى الفراغ هى .....

(أ) س = ٠ ، ع = ٠ (ب) ع = ٠ ، ص = ٠

(جـ) س = ٠ (د) ع = ٠

(١٨) النقطة التى تقع على المستقيم $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (١ ، ٢ ، −١) هى .....

(أ) (١ ، ١ ، ١) (ب) (٠ ، ٢ ، −٢) (جـ) (٣ ، ١ ، ٢) (د) (٤ ، −٣ ، ٠)

(١٩) نقطة على المستقيم $\frac{س}{٣} = \frac{ص + ١}{١} = \frac{ع - ٣}{٢}$ بحيث يكون إحداثيها السينى ضعف إحداثيها الصادى .....

(أ) (-٦ ، -٣ ، -١) (ب) (٤ ، ٢ ، -١)

(جـ) (٦ ، ٣ ، -١) (د) (٢ ، ١ ، -١)

(٢٠) إذا كانت النقط (٥ ، ٢ ، ٤) ، (٦ ، -١ ، ٢) ، (٨ ، -٧ ، ك) تنتمى لنفس الخط المستقيم فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) -١ (جـ) ٣ (د) -٢

(٢١) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣ ، -٥) ويصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات هى .....

(أ) $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{ع}{-٥}$ (ب) س - ٢ = ص - ٣ = ع + ٥

(جـ) $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ١}{٣} = \frac{ع - ١}{-٥}$ (د) $\frac{س - ٢}{\sqrt{٣}} = \frac{ص - ٣}{\sqrt{٣}} = \frac{ع + ٥}{٣}$

(٢٢) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ويصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات هى كل ما يلى ما عدا .....

(أ) س = ص = ع (ب) $\frac{س}{\sqrt{٢}} = \frac{ص}{\sqrt{٢}} = \frac{ع}{\sqrt{٢}}$

(جـ) $\frac{س - ٤}{٢} = \frac{ص - ٤}{٢} = \frac{ع - ٤}{٢}$ (د) $\frac{س - ١}{\sqrt{٣}} = \frac{١ - ص}{\sqrt{٣}} = \frac{ع - ١}{\sqrt{٣}}$

(٢٣) إذا تحركت النقطة (٢ ، ٣ ، -٣) موازية لمحور السينات فإن مسارها يكون مستقيم معادلته هى .....

(أ) $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{ع}{-٣}$ (ب) ص = ٣ ، ع = -٣

(جـ) ٢ س + ٣ ص - ٣ ع = ٠ (د) س = ٠ ، ٣ ص - ٣ ع = ٠

(٢٤) النقطة (س ، ص ، ع) تتحرك موازية للمحور س فأى من المتغيرات س ، ص ، ع سيظل ثابتًا ؟

(أ) ع ، س (ب) س ، ص (جـ) ص ، ع (د) س

(٢٥) متجه اتجاه المستقيم : $س = \frac{ص + ٥}{-٢} = \frac{ع + ١}{٣}$ هو

(أ) (٤ ، ٥ ، ٦) (ب) (٣ ، -٥ ، -١)

(جـ) (-٣ ، ٥ ، ١) (د) (١ ، -٢ ، ٣)

(٢٦) أى مما يأتى يمثل متجه اتجاه للمحور ص ؟

(أ) (١ ، ٠ ، ١) (ب) (٠ ، -١ ، ٠)

(جـ) (٢ ، ٠ ، ٠) (د) (١ ، ١ ، ١)

(٢٧) مستقيم يمر بنقطة الأصل وبالنقطة (٣ ، -١ ، ٢) فإن : جتا $\theta_ع$ = حيث $\theta_ع$ قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور ع

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{\sqrt{١٤}}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{١٤}}$ (د) $\sqrt{١٤}$

(٢٨) متجه اتجاه المستقيم $\frac{٢ س - ٢}{٤} = \frac{ص + ٥}{٧} = \frac{٣ ع - ٨}{٦}$ هو

(أ) (٤ ، ٧ ، ٦) (ب) $(\frac{٣}{٢} ، -٥ ، \frac{٨}{٣})$

(جـ) (٢ ، ٧ ، ٢) (د) (٣ ، ٤ ، -٢)

(٢٩) متجه اتجاه المستقيم ل : $\frac{س - ٢}{٣} = \frac{ص + ٢}{٢}$ ، ع = ٤ يساوى

(أ) (٣ ، ٢ ، ٤) (ب) (٣ ، ٢ ، ٠) (جـ) (٤ ، ٢ ، ٣) (د) (٢ ، ٣ ، ٤)

(٣٠) متجه اتجاه المستقيم ٢ س + ٣ ص = ٥ ، ع = ٤ هو

(أ) (٢ ، ٣ ، ٤) (ب) (٣ ، ٢ ، ٤)

(جـ) (٣ ، -٢ ، ٠) (د) (-١ ، ١ ، ٠)

(٣١) إذا كانت : ل ، م ، ن جيوب تمام الاتجاه لمستقيم فى الفراغ فإن

(أ) ل = م = ن = ١ (ب) ل + م + ن = ١

(جـ) $ل^٢ + م^٢ + ن^٢$ = صفر (د) $ل^٢ + م^٢ = ١ - ن^٢$

(٣٢) معادلة المستقيم المار بالنقطة (أ ، ب ، جـ) موازيًا المحور ع هى

(أ) س = ٠ ، ص = ٠ (ب) ع = جـ

(جـ) ع = ٠ (د) س = أ ، ص = ب

٣٣ في الشكل المقابل :

معادلة المستقيم ل هي .....

(أ) س = $\frac{\text{ص} - ٢}{٢}$ = ع − ١

(ب) س = $\frac{\text{ص} + ٢}{٢}$ = $\frac{\text{ع} - ١}{٢}$

(ج) $\frac{\text{س}}{٢}$ = $\frac{\text{ص} - ٢}{-٢}$ = ع − ١

(د) س = $\frac{\text{ص} - ٢}{-٢}$ = ع − ١

٣٤ (دور أول ٢٠٢١) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ (١ ، ٢ ، ٤) ، ب (−٢ ، ٠ ، ٥) ، حـ (١ ، ٤ ، ٠) ، م نقطة تقاطع متوسطات المثلث ، فإن معادلة المستقيم $\overleftarrow{\text{أم}}$ هي .....

(أ) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٢ ، ٤) + ك (−١ ، ٤ ، ٥)

(ب) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٢ ، ٤) + ك (−١ ، ١ ، ١)

(ج) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٢ ، ٤) + ك (−١ ، ٠ ، −١)

(د) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٠ ، ٢ ، ٣) + ك (١ ، ٢ ، ٤)

٣٥ بوضع قيم حقيقية مختلفة للرمز ك في معادلة المستقيم $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، ١ ، −٣) + ك (١ ، −٢ ، ٤) نحصل على .....

(أ) متجهات اتجاه مختلفة لنفس الخط المستقيم.

(ب) نقط مختلفة تقع على الخط المستقيم.

(ج) متجهات اتجاه مختلفة عمودية على الخط المستقيم.

(د) جيوب تمام مختلفة لنفس الخط المستقيم.

٣٦ إذا قطع المستقيم $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٢ ، ٣) + ك (−٢ ، ١ ، −١) المستوى ع = ٢ في نقطة أ والمستوى س = ٣ في نقطة ب فإن طول $\overline{\text{أب}}$ = ... وحدة طول.

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٢ $\sqrt{٦}$ (د) ٦ $\sqrt{٢}$

٣٧ إذا قطع المستقيم الذي متجه اتجاهه (٢ ، ٠ ، −٢) الكرة (س − ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٤ في النقطتين أ ، ب حيث أ = (٠ ، −١ ، ٣) فإن : طول $\overline{\text{أب}}$ = ... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٢ $\sqrt{٢}$ (ج) ٢ $\sqrt{٦}$ (د) $\sqrt{٦}$

٩ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم :

١ المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ١) ، (−١ ، ٢ ، ٤)

٢ المار بالنقطتين (٢ ، −١ ، ٥) ، (−٣ ، ١ ، ٤)

٣ المار بنقطة الأصل ، والمتجه (−٢ ، ٣ ، ١) متجه اتجاه له.

٤ المار بالنقطة (٤ ، −٢ ، ٥) والمتجه $\overleftarrow{\text{هـ}}$ = (٢ ، ١ ، −١) متجه اتجاه له.

٥ المار بالنقطة (٢ ، ٠ ، −٣) وموازيًا للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، −٣ ، ٠)

٦ المار بالنقطة (٣ ، ٢ ، ٥) ويصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا متساوية.

٧ المار بالنقطة أ (١ ، −١ ، ٠) ويوازي المستقيم المار بالنقطتين ب (−٣ ، ٢ ، ١) ، حـ (٢ ، ١ ، ٠) ثم بين أن النقطة ء (−١٤ ، ٢ ، ٣) تقع على المستقيم.

٨ المار بالنقطة (−١ ، ٤ ، ٢) والموازي للمستقيم $\frac{\text{س} - ٢}{٤}$ = $\frac{\text{ص}}{٥}$ = $\frac{\text{ع} + ٢}{٣}$

٩ المار بالنقطة (١ ، ٥ ، −٢) والموازي للمستقيم :

س = ٣ + ٤ ك ، ص = ٧ − ٣ ك ، ع = −٦ + ٢١ ك

١٠ الذي يحمل المتوسط المرسوم من حـ في Δ أ ب حـ حيث أ (٣ ، ٦ ، −٧) ، ب (−٥ ، ٢ ، ٣) ، حـ (٤ ، −٧ ، −٢)

١١ المار بالنقطة (١ ، −١ ، ١) ومركز الكرة ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٢ ع^{٢} − ٢ س + ٤ ص − ٦ ع = ١

١٢ الذي معادلته المتجهة : $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٣ ، ٩) + ك (٥ ، ٤ ، ٢)

١٣ الذي معادلته المتماثلة : س − ٢ = $\frac{\text{ص} + ٤}{٥}$ = $\frac{٧ - \text{ع}}{٢}$

١٤ الذى معادلته المتماثلة $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{٢ص - ١}{٥} = \frac{٣ع + ٢}{٤}$

١٥ المار بالنقطة أ (١ ، -٢ ، ٥) والموازى لمنصف الربع الثانى من المستوى ص ع

١٠ مكعب إحدى رؤوسه تقع على نقطة الأصل وتقع الثلاثة أحرف المرسومة من هذه الرأس على الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات فإذا كان طول حرف المكعب ٥ وحدات طولية أوجد معادلة المستقيم الذى يحمل القطر الرئيسى المرسوم من نقطة الأصل

١١ أوجد مسقط النقطة أ (٠ ، ٩ ، ٦) على المستقيم المار بالنقطتين ب (١ ، ٢ ، ٣) ، جـ (٧ ، -٢ ، ٥)

١٢ ماذا يمكن أن نقول عن المستقيم الذى متجه الاتجاه هو (أ ، ب ، صفر)

١٣ اكتشف الخطأ :

١ مجموع مربعات نسب الاتجاه لأى مستقيم يساوى ١

٢ جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين (س١ ، ص١ ، ع١) ، (س٢ ، ص٢ ، ع٢) هى (س٢ - س١ ، ص٢ - ص١ ، ع٢ - ع١)

ثانيا تمارين على الزاوية بين مستقيمين فى الفراغ

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قياس الزاوية بين المستقيمين $\overrightarrow{ر_١}$ = (-٢ ، ٥ ، -٧) + ك (-٦ ، ٦ ، ٨) ، $\overrightarrow{ر_٢}$ = (١ ، -٢ ، ٣) + ك (٤ ، ١٢ ، -٦) يساوى .....

(أ) صفر° (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

٢ قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين نسب اتجاهيهما (١ ، ١ ، ٢) ، ($\sqrt{٣}$ - ١ ، -$\sqrt{٣}$ - ١ ، ٤) هى .....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

٣ إذا كانت جيوب تمام اتجاهات مستقيمين هى ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$) ، ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، ٠) فإن قياس الزاوية بين المستقيمين يساوى .....

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

٤ قياس الزاوية بين المستقيمين : ٢ س = ٣ ص = -ع ، ٦ س = -ص = -٤ ع يساوى

(أ) صفر (ب) ٤٥° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

٥ قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين نسب اتجاههما هى (١ ، ١ ، ٢) ، (١ ، ١ ، ٤) يساوى

(أ) جتا$^{-١}$ ($\frac{-٥\sqrt{٣}}{٩}$) (ب) جتا$^{-١}$ ($\frac{٥\sqrt{٣}}{٩}$) (جـ) جا$^{-١}$ ($\frac{٥\sqrt{٣}}{٩}$) (د) جتا$^{-١}$ ($\frac{\sqrt{٣}}{٩}$)

٦ قياس الزاوية بين المستقيمين : $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{ع + ١}{-٢}$ ، ص = ١ ، $\frac{س + ١}{١} = \frac{ص - ٢}{٢} = \frac{ع + ١}{-٢}$ يساوى .....

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

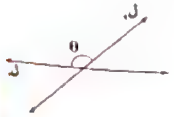
٧ قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم : $\frac{س - ١}{\sqrt{٢}} = \frac{ص - \sqrt{٢}}{١} = \frac{ع + ١}{١}$ مع الاتجاه الموجب لمحور ع يساوى

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

٨ إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : $\frac{س}{أ} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{١}$ ، $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{١} = \frac{ع}{-١}$ يساوى ٦٠° فإن : قيمة أ = ...

(أ) ١ أ ، $\frac{٢}{٥}$ (ب) ١ أ ، $\frac{-١٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ أ ، $\frac{-١٣}{٥}$ (د) ± $\frac{١٣}{٥}$

٩ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ل١ : س = ٠ ، ص = ع ، ل٢ : ص = ٠ ، س = ع

فإن : θ = ...

(أ) ١٢٠° (ب) ١٣٥° (جـ) ١٥٠° (د) ١٦٥°

١٠ قياس الزاوية بين المستقيمين ل١ : س = ٢ ص + ١ ، ٢ ص = ١ - ع ، ل٢ : ٢ س + ص + ع = ٠ ، ع + ٢ = ٠ يساوى .....

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

٢ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين جيوب تمام اتجاهيهما :

$\left(\frac{٥}{٢\sqrt{١٣}}، \frac{-١٢}{٢\sqrt{١٣}}\right)$ ، $\left(\frac{١}{٢\sqrt{}}، \frac{-٣}{٢\sqrt{٥}}\right)$ ، $\left(\frac{٤}{٢\sqrt{٥}}، \frac{١}{٢\sqrt{}}\right)$

٦٠°، ٨٩°

٣ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين :

$ل_١$: ٢ س = ٣ ص − ١ = ع − ٣ ، $ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −١ ، ٥) + $ك$ (−١ ، ١ ، ٢)

٦٠°

٤ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين : $ل_١$: $\overrightarrow{ر_١}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + $ك_١$ (−٢ ، ٠ ، ٢)

، $ل_٢$: س = ١ ، $\frac{ص - ٤}{٣} = \frac{ع + ٥}{-٣}$

٦٠°

٥ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين : $ل_١$: س = ٢ − ٥ $ك$ ، ص = ١ − $ك$

، ع = ٣ + ٤ $ك$ ، $ل_٢$: $\frac{س + ١}{٣} = \frac{٢ - ص}{٤} = \frac{ع}{٢}$

٤٠°، ٨٠°

٦ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين :

(١) $ل_١$: يمر بالنقطتين (−٣ ، ٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥ ، −٢)

$ل_٢$: يمر بالنقطتين (١ ، −٢ ، ٢) ، (٤ ، ٢ ، ٣)

(٢) $ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + $ك_١$ (−١ ، ٤ ، ٢)

$ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢ ، −١) + $ك_٢$ (١ ، ١ ، ٣)

(٣) $ل_١$: ٢ س = ٣ ص = ٤ ع

$ل_٢$: $\frac{س - ١}{٣} = \frac{ص + ٢}{-٢} = \frac{ع}{-٥}$

٧ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين :

$ل_١$: س = ٢ + ٤ $ك_١$ ، ص = ١ − $ك_١$ ، ع = ٢ + ٥ $ك_١$

$ل_٢$: س = −١ + $ك_٢$ ، ص = ٢ $ك_٢$ ، ع = ٤ − $ك_٢$

٨ أوجد قياس الزاوية بين المستقيم :

س = ١ ، ص = ٢ والمستقيم ص = −١ ، ع = ٠

أثبت أن قياس الزاوية بين قطرى المكعب = $جتا^{-١} \frac{١}{٣}$

٩ اكتشف الخطأ : إذا كان : ($أ_١$ ، $ب_١$ ، $جـ_١$) ، ($أ_٢$ ، $ب_٢$ ، $جـ_٢$) هى نسب الاتجاه للمستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ فإن قياس الزاوية بينهما تعطى بالعلاقة :

$جتا\ \theta = |أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + جـ_١ جـ_٢|$

ثالثا تمارين على أوضاع مستقيمين فى الفراغ

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، $ك$ ، −٣) يوازى متجه اتجاه المستقيم $\frac{س + ٢}{٤} = \frac{ص}{٨} = \frac{ع - ١}{٦}$ فإن : $ك$ = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) −١

(٢) إذا كان المستقيم : $\frac{س + ٣}{٢} = \frac{ص + ١}{-٦} = \frac{ع - ٢}{ك}$ يوازى المستقيم : $\frac{س + ٢}{٤} = \frac{ص - ٥}{م} = \frac{ع - ١}{٣}$ فإن : $ك + م$ = ...

(أ) $\frac{١٧}{٢}$ (ب) $\frac{١١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١٥}{٢}$ (د) $\frac{-٢١}{٢}$

(٣) إذا كان $ل_١$: $\frac{س - ٣}{١} = \frac{ص + ٢}{-٢} = \frac{ع + ١}{-٤}$ يوازى $ل_٢$: $\frac{س + ٥}{-٢} = \frac{ص}{ك - ١} = \frac{ع - ١}{٨}$

فإن : $ك$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٤) إذا كان المستقيم : $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص - ١}{٤} = \frac{ع - ١}{٥}$ عموديًا على المستقيم $\frac{س - ٤}{١} = \frac{ص - ٥}{٢}$ ، ع = ٣ فإن : م = ...

(أ) −١٣ (ب) صفر (جـ) ٦ (د) ١٣

(٥) إذا كان المستقيمان $\frac{س - ٢}{٤} = \frac{ص - ٣}{٢} = \frac{ع - ٤}{١}$ ، $\frac{س - ٤}{٢} = \frac{ص - ٥}{١} = \frac{ع - ٣}{٢}$ متعامدين فإن $ك$ = ...

(أ) −١ (ب) ٠ (جـ) ١ (د) ٤

(٦) إذا كان $ل_١$: $\frac{س + ٢}{-١} = \frac{ص + ٣}{٣} = \frac{ع + ٥}{٢}$ عموديًا على

$ل_٢$: $\frac{س}{٢} = \frac{ص - ٥}{ك} = \frac{ع - ٦}{م}$ فإن : ٣ ك + ٢ م = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) م (د) ٤

(٧) (دورثان ٢٠١٩) إذا كان المستقيمان $ل_١$: س = ٢ $ك_١$ − ١ ، ص = $ك_١$ + ١

، ع = $ك_١$ − ١ ، $ل_٢$: س = أ $ك_٢$ − ١ ، ص = ٢ $ك_٢$ + ١

، ع = ب $ك_٢$ − ٢ متوازيين فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) −٢

(٨) (دورأول ٢٠٢١) إذا كان المستقيمان $ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = $ك_١$ (−٢ ، م ، ٧)

، $ل_٢$: $\frac{س - ١}{ن} = \frac{١ - ص}{٤} = \frac{ع - ٢}{٢}$ متعامدين فإن : ن + ٢ م = ...

(أ) ٧ (ب) −٧ (جـ) ١٤ (د) −١٤

(٩) المستقيمان : $\frac{س - ١}{١} = \frac{ص - ٢}{٢} = \frac{ع - ٢}{٣}$ ، $\frac{س}{٢} = \frac{ص + ٢}{٢} = \frac{ع - ٢}{-٢}$ .....

(أ) متعامدان. (ب) منطبقان. (جـ) متوازيان. (د) متقاطعان.

(١٠) المستقيمان : $\overrightarrow{ر_١}$ = $\overrightarrow{أ_١}$ + $ك_١$ $\overrightarrow{ب_١}$ ، $\overrightarrow{ر_٢}$ = $\overrightarrow{أ_٢}$ + $ك_٢$ $\overrightarrow{ب_٢}$ متوازيان

إذا كان .....

(أ) $\overrightarrow{ب_١}$ = ل $\overrightarrow{ب_٢}$ ، ل ∈ ح* (ب) $\overrightarrow{ب_٢}$ // ($\overrightarrow{أ_٢}$ − $\overrightarrow{أ_١}$)

(جـ) $\overrightarrow{ب_١}$ // ($\overrightarrow{أ_٢}$ − $\overrightarrow{أ_١}$) (د) $\overrightarrow{ب_١}$ · $\overrightarrow{ب_٢}$ = صفر

(١١) إذا كان : (أ ، ب ، حـ) ، (أَ ، بَ ، حـَ) هما متجها اتجاه لمستقيمين متعامدين

فإن : .....

(أ) أ أَ + ب بَ + حـ حـَ = ١ (ب) أ أَ + ب بَ + حـ حـَ = ٠

(جـ) $\frac{أ}{أَ} = \frac{ب}{بَ} = \frac{حـ}{حـَ}$ (د) أ + ب + حـ = أَ + بَ + حـَ

(١٢) المستقيمان :

$\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{٤} = \frac{ع - ٣}{٧}$ ، $\frac{س - ١}{٤} = \frac{ص - ٢}{٥} = \frac{ع - ٣}{٧}$ .....

(أ) متعامدان. (ب) متقاطعان. (جـ) متخالفان. (د) متوازيان.

(١٣) المستقيمان س = ص = ع ، ٢ س = ٣ ص = ع .....

(أ) متخالفان. (ب) متقاطعان ومتعامدان.

(جـ) متوازيان. (د) متقاطعان وغير متعامدين.

(١٤) إذا كان المستقيمان $ل_١$: $\overrightarrow{ر_١}$ = (١ ، ٢ ، ٣) + $ك_١$ (١ ، ٢ ، ٣)

، $ل_٢$: (−١ ، ٢ ، ٠) + $ك_٢$ (م ، ٢ ، −١) متقاطعين. فإن : م = ...

(أ) $\frac{-٨}{٣}$ (ب) $\frac{-٥}{٣}$ (جـ) صفر (د) −٣

١ أثبت أن المستقيمين متقاطعين وأوجد نقطة تقاطعهما :

$ل_١$: س = $ك_١$ + ٤ ، ص = −٤ $ك_١$ − ٣ ، ع = ٧ $ك_١$ − ١

$ل_٢$: س = ٢ $ك_٢$ + ١ ، ص = −٣ $ك_٢$ − ١ ، ع = ٨ $ك_٢$ − ١٠ . (٥ ، −٧ ، ٦)

٢ أثبت أن المستقيمين : $\frac{س - ٦}{٢} = \frac{ص - ١}{٢} = \frac{ع - ٥}{٣}$ ، $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص - ٣}{-٢} = \frac{ع + ٤}{٣}$

متقاطعين وأوجد إحداثيات نقطة التقاطع. . (٤ ، −١ ، ٢)

٣ (دورثان ٢٠١٩) أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{ر_١}$ = $\overrightarrow{ص}$ + $ك_١$ ($\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ − $\overrightarrow{ع}$)

، $\overrightarrow{ر_٢}$ = ($\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$) + $ك_٢$ (−٢ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$)

متقاطعان فى نقطة وأوجد نقطة تقاطعهما. . (−١ ، −١ ، ١)

٥ أوجد قيمة ن التى تجعل المستقيمين :

$ل_١$: $\overrightarrow{ر_١}$ = (٣ ، −١ ، ن) + $ك_١$ (٤ ، ١ ، ٣) ، $ل_٢$: س = $\frac{ص - ٤}{-١} = \frac{ع + ١}{٢}$

متقاطعان فى نقطة ، وأوجد نقطة تقاطعهما. . ٧ ، ($\frac{٢٣}{٥}$ ، $\frac{٢٠}{٥}$ ، $\frac{٤١}{٥}$)

٦ أوجد أ لكى يتقاطع المستقيمان : $\frac{س + ٢}{٢} = \frac{ص}{-٣} = \frac{ع - ١}{٤}$ ، $\frac{س - ٢}{أ} = \frac{ص - ١}{٤} = \frac{ع - ٧}{٢}$

. ٣٠

٧ أثبت أن مجموعة المعادلات : $\frac{س - ١}{-٦} = \frac{ص - ٢}{-٨} = \frac{ع - ٣}{٢٤}$ ، $\frac{س - ٤}{٣} = \frac{ص - ٦}{٤} = \frac{ع + ٩}{-١٢}$ تمثلان نفس الخط المستقيم.

٨ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وبنقطة تقاطع المستقيمين :

$ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٣ ، ٤) + ك (−٤ ، −٤ ، ٥) ، $ل_٢$: س = −٦ ، $\frac{ص + ١٠}{١} = \frac{ع + ١}{٣}$

٩ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −١ ، ٣) ونقطة تقاطع المستقيمين :

$\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{٣} = \frac{ع - ٣}{٣}$ ، $\frac{س - ٣}{٤} = \frac{ص - ٥}{٥} = \frac{ع - ٦}{٣}$

١٠ اذكر الشرط (أو الشروط اللازمة) لكى يكون المستقيمان :

$ل_١$: $س = س_١ + أ_١ ك_١$ ، $ص = ص_١ + ب_١ ك_١$ ، $ع = ع_١ + جـ_١ ك_١$

$ل_٢$: $س = س_٢ + أ_٢ ك_٢$ ، $ص = ص_٢ + ب_٢ ك_٢$ ، $ع = ع_٢ + جـ_٢ ك_٢$

(١) متوازيين. (٢) متعامدين. (٣) متقاطعين فى نقطة.

١١ إذا كان : $\overrightarrow{و أ} = \overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{و ب} = -\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ع}$

، $\overrightarrow{و جـ} = ٣\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{و ء} = ٨\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + ٤\overrightarrow{ع}$

أوجد المعادلة المتجهة لكل من المستقيمات الآتية :

(١) المار بالنقطتين أ ، ب (٢) المار بالنقطة ء موازيًا $\overleftrightarrow{جـ}$

(٣) المار بالنقطة جـ يقطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ على التعامد.

١٢ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١ ، ٣) ، يقطع المستقيم

$\overrightarrow{ر_١} = (١ ، ١ ، ٢) + ك (٢ ، ٢ ، ١)$ على التعامد.

١٣ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل ويقطع المستقيم

$\overrightarrow{ر} = (٣ ، ١ ، ٤) + ك (٢ ، ١ ، ٣)$ على التعامد.

١٤ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١ ، ٠) ، عمودى على المستقيم

$\overrightarrow{ر} = (٢ ، ١ ، ١) + ك (١ ، ٢ ، ١)$

١٥ أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{ر_١} = (٣ ، ٣ ، ٥) + ك_١ (٠ ، ٥ ، ٥)$

، $\overrightarrow{ر_٢} = (٢ ، ٣ ، ١) + ك_٢ (٥ ، ١ ، ١)$ صعدمتان ومتقاطعان فى نقطة ، وأوجد

إحداثيات نقطة تقاطعهما.

١٦ أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{ر_١} = (٣ ، ١ ، ٢) + ك_١ (٤ ، ١ ، ٣)$

، $\overrightarrow{ر_٢} = (٠ ، ٤ ، ١) + ك_٢ (١ ، ١ ، ٢)$ متخالفان.

١٧ أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{ر_١} = (١ ، ٢ ، ٤) + ك_١ (٢ ، −١ ، ١)$

، $\overrightarrow{ر_٢} = (١ ، ١ ، ١) + ك_٢ (−٢ ، ٧ ، ١١)$ متعامدان ثم بين أن المستقيمين متخالفان.

١٨ أثبت أن المستقيمين : $\frac{س + ١}{−٥} = \frac{ص - ٤}{٧} = ع$ ، $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع}{٣}$

متعامدان وابحث كونهما متقاطعين أم متخالفين.

١٩ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣ ، ٤) ، (٣ ، ٤ ، ٥) يكون عموديًا على المستقيم

المار بالنقطتين (−٢ ، −٣ ، ٦) ، (٤ ، ٠ ، −٣) وابحث كونهما متقاطعان أم متخالفان.

٢٠ أوجد ن التى تجعل المستقيم المار بالنقطتين أ (ن ، ١ ، −١) ، ب (٢ ، ٠ ، ٢ ن)

عموديًا على المستقيم المار بالنقطتين جـ (٤ ، ٢ ن ، ١) ، ء (٢ ، ٣ ، ٢) «١٠»

رابعًا

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

بُعد النقطة (٣ ، ٤ ، ٥) عن المحور ص يساوى ..... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) $\sqrt{٣٤}$ (د) $\sqrt{٤١}$

بُعد النقطة (٣ ، ٤ ، ٥) عن المستقيم $\frac{س - ٣}{١} = \frac{ص - ٤}{٢} = \frac{ع - ٥}{٢}$ هو .....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٥

أقصر مسافة بين النقطة (أ ، ب ، جـ) والمحور س هى .....

(أ) |جـ| (ب) |أ| (جـ) |ب| (د) $\sqrt{ب^٢ + جـ^٢}$

طول العمود المرسوم من النقطة (−١ ، ٠ ، ١) على المستقيم

$\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ١}{١} = \frac{ع + ١}{-١}$ يساوى ..... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{٣٠}$ (ب) $\sqrt{٦}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣٠}}{٦}$ (د) $٢\sqrt{٦}$

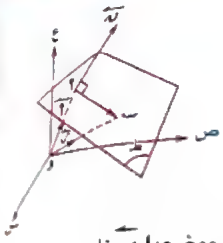
إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، −١ ، م) على المستقيم

$\frac{س - ١}{٢} = \frac{٣ - ص}{-٢} = \frac{ع}{٣}$ يساوى ٥ وحدة طول فإن عدد قيم م الممكنة تساوى .....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

الدرس 2 معادلة المستوى فى الفراغ

الصور المختلفة لمعادلة المستوى فى الفراغ



بفرض أ (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) نقطة معلومة تقع على المستوى ط متجه موضعها $\overrightarrow{أ}$ وكان المتجه $\overrightarrow{ن}$ = (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه عمودى على المستوى «تذكر أن كل المتجهات العمودية على المستوى تكون متوازية».

وبفرض ب (س ، ص ، ع) أى نقطة على المستوى ط متجه موضعها $\overrightarrow{ر}$ فإن :

∵ $\overrightarrow{ن}$ ⊥ المستوى ط ∴ $\overrightarrow{ن}$ ⊥ أى متجه فى المستوى

∴ $\overrightarrow{ن}$ ⊥ $\overrightarrow{أب}$ ∴ $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أب} = ٠$ ∴ $\overrightarrow{ن} \cdot (\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}) = ٠$

، ∵ $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ر}$ ∴ $\overrightarrow{ن} \cdot (\overrightarrow{ر} - \overrightarrow{أ}) = ٠$ (١)

∴ $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} - \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ} = ٠$ ∴ $\boxed{\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}}$ «الصورة المتجهة لمعادلة المستوى»

، من (١) :

، ∵ $\overrightarrow{ن}$ = (أ ، ب ، حـ) ، $\overrightarrow{ر}$ = (س ، ص ، ع) ، $\overrightarrow{أ}$ = (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$)

∴ (أ ، ب ، حـ) . (س − س$_1$ ، ص − ص$_1$ ، ع − ع$_1$) = ٠

∴ $\boxed{أ(س - س_1) + ب(ص - ص_1) + حـ(ع - ع_1) = ٠}$ «الصورة القياسية لمعادلة المستوى»

وبفك الأقواس :

∴ أ س + ب ص + حـ ع + (− أ س$_1$ − ب ص$_1$ − حـ ع$_1$) = ٠

لاحظ أن ء = − $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

وبوضع − أ س$_1$ − ب ص$_1$ − حـ ع$_1$ = ء

∴ $\boxed{أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠}$ «الصورة العامة لمعادلة المستوى»

مما سبق يتضح أن المستوى ط يتعين بمعرفة نقطة عليه ومتجه عمودى عليه.

دراستنا السابقة نتذكر أن المستوى يتعين أيضًا بمعرفة :

ثلاث نقاط تقع عليه وليست على استقامة واحدة.

مستقيمان متقاطعان يقعان فيه.

مستقيم ونقطة لا تنتمى للمستقيم تقعان فى المستوى.

مستقيمين مختلفين متوازيين.

مثال ١

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة : (٢ ، −٣ ، ٥)

متجه : $\overrightarrow{ن}$ = (−١ ، ٢ ، ٣) عموديًا عليه.

الحل

الصورة المتجهة :

∵ $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$ ∴ (−١ ، ٢ ، ٣) . $\overrightarrow{ر}$ = (−١ ، ٢ ، ٣) . (٢ ، −٣ ، ٥)

∴ (−١ ، ٢ ، ٣) . $\overrightarrow{ر}$ = ٧

الصورة القياسية :

∵ أ (س − س$_1$) + ب (ص − ص$_1$) + حـ (ع − ع$_1$) = ٠

∴ −١ (س − ٢) + ٢ (ص + ٣) + ٣ (ع − ٥) = ٠

الصورة العامة : − س + ٢ ص + ٣ ع − ٧ = ٠

مثال ٢

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط :

أ(١ ، ٢ ، ٥) ، ب (−١ ، ٢ ، ٤) ، حـ (٤ ، ٤ ، ٠)

الحل

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، −١ ، −١) ، $\overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ١ ، −٥)

، ∵ $\frac{٢}{٢} \neq \frac{-١}{١}$ ∴ $\overrightarrow{أب}$ لا يوازى $\overrightarrow{أحـ}$

∴ أ ، ب ، حـ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

ولإيجاد معادلة المستوى نحتاج :

(١) نقطة معلومة عليه «هناك ٣ نقاط معطاة».

(٢) متجه اتجاه عمودى على المستوى ولإيجاده نوجد $\overleftarrow{أب} \times \overleftarrow{أحـ}$

$$\therefore \overleftarrow{ن} = \overleftarrow{أب} \times \overleftarrow{أحـ} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ -٢ & -١ & -١ \\ ٣ & ١ & -٥ \end{vmatrix} = ٦\,\overleftarrow{س} - ١٣\,\overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ع}$$

- الصورة المتجهة لمعادلة المستوى : $\overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{أ}$

$\therefore (٦ ، -١٣ ، ١) \cdot \overleftarrow{ر} = (٦ ، -١٣ ، ١) \cdot (١ ، ٣ ، ٥)$

$\therefore (٦ ، -١٣ ، ١) \cdot \overleftarrow{ر} = -٢٨$

- الصورة القياسية لمعادلة المستوى : $٦ (س - ١) - ١٣ (ص - ٣) + (ع - ٥) = ٠$

- الصورة العامة لمعادلة المستوى : $٦ س - ١٣ ص + ع + ٢٨ = ٠$

ملاحظة

معادلة المستوى المار بالثلاث نقاط $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$ ، $(س_٣ ، ص_٣ ، ع_٣)$ والتى لا تقع على استقامة واحدة هى :

$$\begin{vmatrix} س - س_١ & ص - ص_١ & ع - ع_١ \\ س_٢ - س_١ & ص_٢ - ص_١ & ع_٢ - ع_١ \\ س_٣ - س_١ & ص_٣ - ص_١ & ع_٣ - ع_١ \end{vmatrix} = ٠$$

ويمكن استخدام الملاحظة السابقة لإيجاد معادلة المستوى فى المثال السابق كالتالى :

$$\begin{vmatrix} س - ١ & ص - ٣ & ع - ٥ \\ -١ - ١ & ٢ - ٣ & ٤ - ٥ \\ ٤ - ١ & ٣ - ٤ & ٠ - ٥ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\therefore \begin{vmatrix} س - ١ & ص - ٣ & ع - ٥ \\ -٢ & -١ & -١ \\ ٣ & ١ & -٥ \end{vmatrix} = ٠$$

الصورة القياسية لمعادلة المستوى :

$٦ (س - ١) - ١٣ (ص - ٣) + (ع - ٥) = ٠$

الصورة العامة لمعادلة المستوى :

$٦ س - ١٣ ص + ع + ٢٨ = ٠$

الصورة المتجهة لمعادلة المستوى :

$(٦ ، -١٣ ، ١) \cdot \overleftarrow{ر} = -٢٨$

لاحظ أن

- مركبات متجه الاتجاه العمودى للمستوى هى معاملات س ، ص ، ع فى المعادلة العامة للمستوى.
- $\overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{أ}$ فى المعادلة المتجهة للمستوى = −ء فى المعادلة العامة.

ملاحظات

(١) المستقيمان فى الفراغ : عند حل معادلة المستقيمين معًا وكانت :

(١) مجموعة الحل = ∅ فإن المستقيمين متخالفان أو متوازيان.

(٢) مجموعة الحل = نقطة واحدة فإن المستقيمين متقاطعان ويحويهما مستوى واحد.

- إذا اشترك المستقيمان فى أكثر من نقطة فإنهما ينطبقان.

(٢) المستقيم والمستوى فى الفراغ : عند حل معادلتى المستقيم والمستوى معًا وكانت :

(١) مجموعة الحل = ∅ فإن المستقيم يوازى المستوى.

(٢) مجموعة الحل = نقطة واحدة فإن المستقيم يقطع المستوى فى هذه النقطة.

- إذا اشترك مستقيم ومستوى فى أكثر من نقطة فإن المستوى يحوى هذا المستقيم.

مثال ٣

أثبت أن المستقيمين : $ل_١ : \overleftarrow{ر_١} = (٣ ، -٢ ، -١) + ك_١ (٢ ، ٣ ، ١)$

، $ل_٢ : \overleftarrow{ر_٢} = (٤ ، ٥ ، ١) + ك_٢ (١ ، ٧ ، ٢)$

متقاطعان وأوجد نقطة تقاطعهما و معادلة المستوى الذى يحويهما.

الحل

يتقاطع المستقيمان عندما $\overleftarrow{ر_١} = \overleftarrow{ر_٢}$

أى أن : $(٣ ، -٢ ، -١) + ك_١ (٢ ، ٣ ، ١) = (٤ ، ٥ ، ١) + ك_٢ (١ ، ٧ ، ٢)$

وبمساواة المعاملات للطرفين نجد أن :

٣ + ٢ ك$_{١}$ = ٤ + ك$_{٢}$ ومنها ٢ ك$_{١}$ − ك$_{٢}$ = ١

، −٢ + ٣ ك$_{١}$ = ٥ + ٧ ك$_{٢}$ ومنها ٣ ك$_{١}$ − ٧ ك$_{٢}$ = ٧

، −١ + ك$_{١}$ = ١ + ٢ ك$_{٢}$ ومنها ك$_{١}$ − ٢ ك$_{٢}$ = ٢

وبحل المعادلتين (١) ، (٣) : ∴ ك$_{١}$ = صفر ، ك$_{٢}$ = −١

وبالتعويض فى (٢) نجد أن : ك$_{١}$ = صفر ، ك$_{٢}$ = −١ تحققها

∴ المستقيمان متقاطعان عندما ك$_{١}$ = صفر فى معادلة المستقيم ل$_{١}$ ، عندما ك$_{٢}$ = −١ فى معادلة المستقيم ل$_{٢}$

ومن معادلة المستقيم ل$_{١}$: نقطة التقاطع هى (س ، ص ، ع) = (٣ ، −٢ ، −١) + صفر (٢ ، ٣ ، ١)

أى أنها (٣ ، −٢ ، ١)

∵ $\overleftarrow{ق}_{١}$ (متجه اتجاه للمستقيم ل$_{١}$) = (٢ ، ٣ ، ١)

، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ (متجه اتجاه للمستقيم ل$_{٢}$) = (١ ، ٧ ، ٢)

∴ $\overleftarrow{ن}$ (متجه اتجاه عمودى على المستوى) = $\begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٧ & ٢ \end{vmatrix}$ = − $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ + ١١ $\overleftarrow{ع}$

وباختيار أى نقطة تقع على أى من المستقيمين ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$

∴ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى : (−١ ، −٣ ، ١١) . $\overleftarrow{ن}$ = (−١ ، −٣ ، ١١) . (٣ ، −٢ ، −١)

أى أن (−١ ، −٣ ، ١١) . $\overleftarrow{ن}$ = −٨

، الصورة القياسية لمعادلة المستوى : − (س − ٣) − ٣ (ص + ٢) + ١١ (ع + ١) = ٠

، الصورة العامة لمعادلة المستوى : − س − ٣ ص + ١١ ع + ٨ = ٠

مثال ٤

أثبت أن المستقيمين : ل$_{١}$: $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٣ ، −٤) + ك (٢ ، ٣ ، ١)

، ل$_{٢}$: $\frac{س − ٥}{٤} = \frac{ص + ٤}{٦} = \frac{ع − ٤}{٢}$ متوازيان ثم عين المعادلة العامة للمستوى الذى يحوى هذين المستقيمين.

∵ $\overleftarrow{ق}_{١}$ = (٢ ، ٣ ، ١) ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ = (٤ ، ٦ ، ٢)

∵ $\frac{٢}{٤} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

∴ المستقيمان متوازيان أو منطبقان.

∵ النقطة أ (٢ ، ٣ ، −٤) ∈ ل$_{١}$ وبالتعويض بها فى ل$_{٢}$

∴ المستقيمان متوازيان وغير منطبقين.

∵ أن أ ∉ ل$_{٢}$

∴ يمكن أن يجمعهما مستوى واحد.

∵ نفرض أ (٢ ، ٣ ، −٤) ∈ ل$_{١}$ ، ب (٥ ، −٤ ، ٤) ∈ ل$_{٢}$

∴ $\overleftarrow{أب}$ = $\overleftarrow{ب}$ − $\overleftarrow{أ}$ = (٣ ، −٧ ، ٨)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب = $\overleftarrow{أب}$ × $\overleftarrow{ق}_{١}$

= $\begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٣ & -٧ & ٨ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{vmatrix}$ = − ٣١ $\overleftarrow{س}$ + ١٢ $\overleftarrow{ص}$ + ٢٣ $\overleftarrow{ع}$

∴ معادلة المستوى هى : (−٣١ ، ١٢ ، ٢٣) . $\overleftarrow{ن}$ = (−٣١ ، ١٢ ، ٢٣) . (٢ ، ٣ ، −٤)

أى أن : ٣١ س − ١٢ ص − ٢٣ ع = ١١٥

ملاحظة : باختيار ثلاثة نقط يمكن تعيين معادلة المستوى عن طريقهم.

∵ أ (٢ ، ٣ ، −٤) ∈ ل$_{١}$ ، ب = (٥ ، −٤ ، ٤) ∈ ل$_{٢}$ ، جـ = (٤ ، ٦ ، −٣) ∈ ل$_{١}$

وذلك بوضع ك = ١ فى ل$_{١}$

∴ معادلة المستوى هى $\begin{vmatrix} س − ٢ & ص − ٣ & ع + ٤ \\ ٥ − ٢ & −٤ − ٣ & ٤ + ٤ \\ ٤ − ٢ & ٦ − ٣ & −٣ + ٤ \end{vmatrix}$ = صفر

وبفك المحدد نجد أن المعادلة هى : ٣١ س − ١٢ ص − ٢٣ ع = ١١٥

مثال ٥

أوجد نقطة تقاطع المستقيم : ٢ س = ٣ ص − ١ = ع − ٤

مع المستوى : ٣ س + ص − ٢ ع = ٥

الحل

من معادلة المستوى ص = ٥ + ٢ ع − ٣ س وبالتعويض فى معادلة المستقيم.

∴ ٢ س = ٣ (٥ + ٢ ع − ٣ س) − ١ = ع − ٤

∴ ٢ س = ١٥ + ٦ ع − ٩ س − ١ = ع − ٤

∴ ٢ س = ١٤ + ٦ ع − ٩ س = ع − ٤ ∴ ٢ س = ١٤ + ٦ ع − ٩ س

∴ ١١ س − ٦ ع = ١٤

، ١٤ + ٦ ع − ٩ س = ع − ٤ ∴ ٩ س − ٥ ع = ١٨

بحل (١) ، (٢) : ∴ س = −٣٨ ، ع = −٧٢

وبالتعويض فى معادلة المستوى : ∴ ص = −٢٥ ∴ نقطة التقاطع هى (−٣٨ ، −٢٥ ، −٧٢)

حل آخر : من معادلة المستقيم : ٢ س = ٣ ص − ١ = ع − ٤ = ك

∴ س = $\frac{ك}{٢}$ ، ص = $\frac{ك + ١}{٣}$ ، ع = ك + ٤

وبالتعويض فى معادلة المستوى ∴ ٣ ($\frac{ك}{٢}$) + $\frac{ك + ١}{٣}$ − ٢ (ك + ٤) = ٥ (بالضرب × ٦)

∴ ٩ ك + ٢ ك + ٢ − ١٢ ك − ٤٨ = ٣٠ ∴ ك = −٧٦

∴ س = $\frac{-٧٦}{٢}$ = −٣٨ ، ص = $\frac{-٧٦ + ١}{٣}$ = −٢٥

، ع = −٧٦ + ٤ = −٧٢

∴ نقطة التقاطع هى (−٣٨ ، −٢٥ ، −٧٢)

لاحظ أن

إذا كانت «ك» لها قيمة وحيدة فإن «المستقيم يقطع المستوى»

مثال ٦

أوجد نقطة تقاطع المستقيم : $\overleftarrow{ر}_١$ = (١ ، ٤ ، ٢) + ك (٣ ، ٢ ، ٢)

مع المستوى : (٣ ، ٢ ، ٢) . $\overleftarrow{ر}_٢$ = −٢

الحل

معادلة المستقيم هى : $\frac{س - ١}{٣}$ = $\frac{ص - ٤}{٢}$ = $\frac{ع - ٢}{٢}$

، معادلة المستوى هى : ٣ س + ٢ ص + ٢ ع + ٢ = ٠

∴ س = $\frac{١}{٣}$ (−٢ ص − ٢ ع − ٢)

بالتعويض فى معادلة المستقيم : ∴ $\frac{-٢ ص - ٢ ع - ٥}{٩}$ = $\frac{ص - ٤}{٣}$ = $\frac{ع - ٢}{٢}$

∴ −٢ ص − ٣٦ = −٤ ص − ٤ ع − ١٠ ∴ ١٣ ص + ٤ ع = ٢٦

∴ ٢ ص − ٨ = ٢ ع − ٤ ∴ ص − ع = ٢

بحل (١) ، (٢) : ∴ ص = ٢ ، ع = صفر

وبالتعويض فى معادلة المستوى : ∴ س = −٢ ، نقطة التقاطع هى : (−٢ ، ٢ ، ٠)

∴ يتقاطع المستقيم مع المستوى إذا كان $\overleftarrow{ر}_١$ = $\overleftarrow{ر}_٢$

أى أنه يمكننا التعويض بمعادلة المستقيم فى معادلة المستوى

∴ (٣ ، ٢ ، ٢) . [(١ ، ٤ ، ٢) + ك (٣ ، ٢ ، ٢)] = −٢

∴ (٣ ، ٢ ، ٢) . (١ ، ٤ ، ٢) + ك [(٣ ، ٢ ، ٢) . (٣ ، ٢ ، ٢)] = −٢

∴ ٣ + ٨ + ٤ + ك (٩ + ٤ + ٤) = −٢ ∴ ك = −١ وبالتعويض فى معادلة المستقيم.

∴ نقطة التقاطع هى (س ، ص ، ع) = (١ ، ٤ ، ٢) − (٣ ، ٢ ، ٢) = (−٢ ، ٢ ، ٠)

مثال ٧

أثبت أن المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٣ ، −٨) + ك (−٣ ، ١٢ ، ٢)

يوازى المستوى : ٢ س + ص − ٣ ع = ٥

الحل

∴ المعادلات البارامترية للمستقيم هى :

س = ٢ − ٣ ك ، ص = ٣ + ١٢ ك ، ع = −٨ + ٢ ك

وبالتعويض فى معادلة المستوى نجد أن :

٢ (٢ − ٣ ك) + (٣ + ١٢ ك) − ٣ (−٨ + ٢ ك) = ٥

∴ ٤ − ٦ ك + ٣ + ١٢ ك + ٢٤ − ٦ ك = ٥

∴ ٣١ = ٥ (مستحيل)

∴ لا توجد قيمة لـ (ك) تجعل أى نقطة على المستقيم تقع على المستوى

∴ المستقيم يوازى المستوى.

لاحظ أن

إذا كانت «ك» ليس لها قيمة فإن «المستقيم يوازى المستوى»

مثال ٨

أثبت أن المستقيم : $\overline{ر} = (١ ، ٢ ، ٣) + ك (٣ ، ١ ، -١٤)$

يقع فى المستوى : ٤ س + ٢ ص + ع = ١١

الحل

∵ المعادلات البارامترية للمستقيم هى :

س = ١ + ٣ ك ، ص = ٢ + ك ، ع = ٣ − ١٤ ك

وبالتعويض فى معادلة المستوى نجد أن :

٤ (١ + ٣ ك) + ٢ (٢ + ك) + (٣ − ١٤ ك) = ١١

∴ ٤ + ١٢ ك + ٤ + ٢ ك + ٣ − ١٤ ك = ١١

∴ ١١ = ١١ متحققه لجميع قيم ك ∴ ك لها عدد لا نهائى من القيم.

∴ المستقيم يقع فى المستوى.

لاحظ أن

إذا كانت «ك» لها عدد لا نهائى فإن «المستقيم يقع فى المستوى»

حل آخر

∵ النقطة أ (١ ، ٢ ، ٣) ∈ المستقيم. ، ∵ ٤ (١) + ٢ (٢) + (٣) = ١١

∴ النقطة (أ) تحقق معادلة المستوى وبوضع ك = ١

∴ النقطة ب (٤ ، ٣ ، -١١) ∈ المستقيم. ، ∵ ٤ (٤) + ٢ (٣) + (-١١) = ١١

∴ النقطة (ب) تحقق معادلة المستوى.

∴ النقطتين أ ، ب ينتميان للمستقيم وتحققان معادلة المستوى.

∴ المستقيم يقع فى المستوى.

معادلة المستوى بمعلومية أطوال الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات

إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات فى النقاط (س$_١$ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ص$_١$ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ع$_١$)

فإن معادلة المستوى هى : $\begin{vmatrix} س - س_١ & ص & ع \\ -س_١ & ص_١ & ٠ \\ -س_١ & ٠ & ع_١ \end{vmatrix} = ٠$

∴ ص$_١$ ع$_١$ (س − س$_١$) − (− س$_١$ ع$_١$) ص + (س$_١$ ص$_١$) ع = ٠

∴ ص$_١$ ع$_١$ س − س$_١$ ص$_١$ ع$_١$ + س$_١$ ع$_١$ ص + س$_١$ ص$_١$ ع = ٠

∴ ص$_١$ ع$_١$ س + س$_١$ ع$_١$ ص + س$_١$ ص$_١$ ع = س$_١$ ص$_١$ ع$_١$

وبالقسمة على س$_١$ ص$_١$ ع$_١$

∴ $\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$ معادلة المستوى بدلالة الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات.

مثال ٩

أوجد معادلة المستوى المار بالنقاط : (٠ ، ٠ ، -٧) ، (٣ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، -٥ ، ٠)

الحل

معادلة المستوى هى $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{-٥} + \frac{ع}{-٧} = ١$

ملاحظة

• إذا كانت معادلة المستوى : $\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$

تقطع محاور الإحداثيات فى النقط أ (س$_١$ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ص$_١$ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٠ ، ع$_١$)

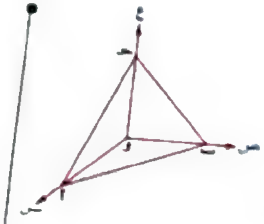
فإن حجم الهرم و أ ب حـ = $\frac{١}{٦}$ |س$_١$ ص$_١$ ع$_١$|

مثلاً : إذا قطع المستوى : ٢ س + ٣ ص + ٤ ع = ١٢

أى أن : $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{٤} + \frac{ع}{٣} = ١$

محاور الإحداثيات فى النقط أ ، ب ، حـ فإن حجم الهرم و أ ب حـ

= $\frac{١}{٦}$ |٦ × ٤ × ٣| = ١٢ وحدة مكعبة.



مثال ١٠

إذا قطع المستوى ٨ س + ٢ ص + ٤ ع = ٨ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقاط أ ، ب ، حـ على الترتيب أوجد مساحة Δ أ ب حـ ثم أوجد حجم الهرم و أ ب حـ

الحل

معادلة المستوى هى :

٨ س + ٢ ص + ٤ ع = ٨ (وبالقسمة على ٨)

∴ $\frac{س}{١} + \frac{ص}{٤} + \frac{ع}{٢} = ١$

∴ المستوى يقطع محاور الإحداثيات فى :

أ (١ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ٤ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٠ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (-١ ، ٤ ، ٠)$

، $\overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{أ} = (-١ ، ٠ ، ٢)$

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢} \left\| \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أحـ} \right\|$

، ∵ $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أحـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -١ & ٤ & ٠ \\ -١ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ٨ \overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص} + ٤ \overrightarrow{ع}$

∴ $\left\| \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أحـ} \right\| = \sqrt{٦٤ + ٤ + ١٦} = ٢ \sqrt{٢١}$

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢} \times ٢ \sqrt{٢١} = \sqrt{٢١}$ وحدة مربعة.

، حجم الهرم و أ ب حـ = $\frac{١}{٦} \left| ١ \times ٤ \times ٢ \right| = \frac{٤}{٣}$ وحدة مكعبة.

ملاحظة هامة

* من المعادلة العامة للمستوى ط : أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠ نستنتج أن :

① (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه عمودى على المستوى ط ، ء = $-\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ن}$ حيث $\overrightarrow{أ}$ متجه موضع نقطة ∈ المستوى ، $\overrightarrow{ن}$ متجه الاتجاه العمودى.

② أى مستوى يوازى المستوى ط يكون المتجه (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه عمودى له أيضًا.

③ إذا كانت ء = صفر فإن المستوى يحوى نقطة الأصل.

④ إذا كانت
- أ = ٠ ← فإن المعادلة تصبح ب ص + حـ ع + ء = ٠ ← وهى معادلة مستوى ← يوازى محور س ← وعموديًا على المستوى ← ص ع
- ب = ٠ ← فإن المعادلة تصبح أ س + حـ ع + ء = ٠ ← وهى معادلة مستوى ← يوازى محور ص ← وعموديًا على المستوى ← س ع
- حـ = ٠ ← فإن المعادلة تصبح أ س + ب ص + ء = ٠ ← وهى معادلة مستوى ← يوازى محور ع ← وعموديًا على المستوى ← س ص

فمثلًا :

٢ س − ٣ ص = ٦ هى معادلة مستوى يوازى محور ع

⑤ إذا كانت
- أ = ء = ٠ ← فإن المعادلة تصبح ب ص + حـ ع = ٠ ← وهى معادلة مستوى ← يحوى المحور س ← وعموديًا على المستوى ← ص ع
- ب = ء = ٠ ← فإن المعادلة تصبح أ س + حـ ع = ٠ ← وهى معادلة مستوى ← يحوى المحور ص ← وعموديًا على المستوى ← س ع
- حـ = ء = ٠ ← فإن المعادلة تصبح أ س + ب ص = ٠ ← وهى معادلة مستوى ← يحوى المحور ع ← وعموديًا على المستوى ← س ص

فمثلًا :

أ س − ٢ ص = ٠ هى معادلة مستوى يحوى محور ع

⑥ • معادلة المستوى س ص هى $\boxed{ع = ٠}$

، معادلة المستوى الذى يوازى المستوى س ص ويمر بالنقطة (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) هى $\boxed{ع = ع_١}$

• معادلة المستوى ص ع هى $\boxed{س = ٠}$

، معادلة المستوى الذى يوازى المستوى ص ع ويمر بالنقطة (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) هى $\boxed{س = س_١}$

• معادلة المستوى س ع هى $\boxed{ص = ٠}$

، معادلة المستوى الذى يوازى المستوى س ع ويمر بالنقطة (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) هى $\boxed{ص = ص_١}$

فمثلًا :

س = ٦ هى معادلة مستوى يوازى المستوى ص ع

، ع = −٤ هى معادلة مستوى يوازى المستوى س ص

⑦ لاحظ الفرق بين :

• ص + ع = ٢ معادلة مستوى يوازى محور س

• س = ب معادلة مستوى يوازى المستوى ص ع

• ص + ع = أ ، س = ب معادلة خط مستقيم (خط تقاطع المستويين السابقين)

⑧ إذا كانت : هـ (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) ، و (س$_٢$ ، ص$_٢$ ، ع$_٢$) ، ز (س$_٣$ ، ص$_٣$ ، ع$_٣$) ثلاثة نقاط فى الفراغ وكان التعويض عنهم فى معادلة المستوى كالتالى :

أ س$_١$ + ب ص$_١$ + حـ ع$_١$ + ء = ٠ ، أ س$_٢$ + ب ص$_٢$ + حـ ع$_٢$ + ء > ٠

، أ س$_٣$ + ب ص$_٣$ + حـ ع$_٣$ + ء < ٠

فمعنى ذلك أن : هـ (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) تنتمى للمستوى ، و (س$_٢$ ، ص$_٢$ ، ع$_٢$) ، ز (س$_٣$ ، ص$_٣$ ، ع$_٣$) لا تنتميان للمستوى وكل منهما يقع فى جهة مختلفة عن الأخرى بالنسبة للمستوى.

مثال ١١

أوجد معادلة المستوى : الذى يوازى محور س ويمر بالنقطتين (١ ، ٢ ، ٣) ، (-١ ، ٤ ، ٧)

الحل

∵ المستوى يوازى محور س

∴ معادلة المستوى هى ب ص + حـ ع + ء = ٠

، ∵ (١ ، ٢ ، ٣) تقع على المستوى ∴ ٢ ب + ٣ حـ + ء = ٠ (١)

، ∵ (-١ ، ٤ ، ٧) تقع على المستوى ∴ ٤ ب + ٧ حـ + ء = ٠ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ٢ ب + ٤ حـ = ٠ ∴ $\boxed{\text{ب} = -٢\,\text{حـ}}$

ومن (١) : ∴ -٤ حـ + ٣ حـ + ء = ٠ ∴ $\boxed{\text{ء} = \text{حـ}}$

∴ معادلة المستوى هى -٢ حـ ص + حـ ع + حـ = ٠

أى أن : -٢ ص + ع + ١ = ٠

مثال ١٢

أوجد معادلة المستوى : الذى يحوى محور ص ويمر بالنقطة (٢ ، ١ ، -٣)

الحل

∵ المستوى يحوى محور ص

∴ معادلة المستوى هى أ س + حـ ع = ٠

، ∵ (٢ ، ١ ، -٣) تقع على المستوى. ∴ ٢ أ - ٣ حـ = ٠ ∴ $\boxed{\text{أ} = \frac{٣}{٢}\,\text{حـ}}$

∴ معادلة المستوى هى $\frac{٣}{٢}$ حـ س + حـ ع = ٠

∴ $\frac{٣}{٢}$ س + ع = ٠ أى أن : ٣ س + ٢ ع = ٠

مثال ١٣

عين وضع كل من النقط : أ (-٣ ، ٣ ، ٥) ، ب (٦ ، ٥ ، ١) ، حـ (٦ ، -٥ ، ١)

بالنسبة للمستوى ٢ س - ٣ ص + ٤ ع - ٥ = ٠

الحل

بالتعويض بالنقط فى معادلة المستوى :

• أ (-٣ ، ٣ ، ٥) : ٢ (-٣) - ٣ (٣) + ٤ (٥) - ٥ = صفر ∴ أ ∈ المستوى.

• ب (٦ ، ٥ ، ١) : ٢ (٦) - ٣ (٥) + ٤ (١) - ٥ = -٤ ∴ ب ∉ المستوى.

• حـ (٦ ، -٥ ، ١) : ٢ (٦) - ٣ (-٥) + ٤ (١) - ٥ = ٢٦ ∴ حـ ∉ المستوى.

∴ ب ، حـ لا تنتميان للمستوى وتقعان فى جهتين مختلفتين منه.

مثال ١٤

أوجد المعادلة العامة لكل من المستويين التاليين (حيث $\text{ك}_١$ ، $\text{ك}_٢$ بارامترات) :

① س = ٣ + $\text{ك}_١$ - ٤ $\text{ك}_٢$ ، ص = ٥ - $\text{ك}_١$ + ٥ $\text{ك}_٢$ ، ع = ٧ + $\text{ك}_٢$

② (س ، ص ، ع) = (٣ ، ٢ ، ٥) + $\text{ك}_١$ (-٣ ، -٣ ، ٤) + $\text{ك}_٢$ (١ ، ٢ ، -١)

الحل

① س = ٣ + $\text{ك}_١$ - ٤ $\text{ك}_٢$ (١)

، ص = ٥ - $\text{ك}_١$ + ٥ $\text{ك}_٢$ (٢)

، ع = ٧ + $\text{ك}_٢$ (٣)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ س + ص = ٨ + $\text{ك}_٢$ (٤)

∴ $\text{ك}_٢$ = س + ص - ٨ (٥)

، من (٣) : ∴ $\text{ك}_٢$ = ع - ٧

وبالتعويض من (٥) ، (٤) فى (١) : ∴ س = ٣ + ع - ٧ - ٤ (س + ص - ٨)

∴ س = ع - ٤ - ٤ س - ٤ ص + ٣٢

∴ معادلة المستوى فى الصورة العامة هى : ٥ س + ٤ ص - ع - ٢٨ = ٠

حل آخر :

من (٣) : ∴ $\text{ك}_٢$ = ع - ٧ ∴ $\text{ك}_٢$ = - $\frac{١}{٤}$ س + $\frac{١}{٤}$ ع - ١

، من (١) : ∴ س = ٣ + ع - ٧ - ٤ $\text{ك}_٢$

، من (٢) : ∴ ص = ٥ - (ع - ٧) + ٥ (- $\frac{١}{٤}$ س + $\frac{١}{٤}$ ع - ١)

∴ ص = $\frac{١}{٤}$ ع - $\frac{٥}{٤}$ س + ٧

∴ معادلة المستوى هى : ٥ س + ٤ ص - ع - ٢٨ = ٠

∵ (س ، ص ، ع) = (٣ ، ٢ ، ٥) + ك$_{١}$ (−٣ ، −٣ ، ٤) + ك$_{٢}$ (١ ، ٢ ، −١)

∴ س = ٣ − ٣ ك$_{١}$ + ك$_{٢}$ (١)

، ص = ٢ − ٣ ك$_{١}$ + ٢ ك$_{٢}$ (٢)

، ع = ٥ + ٤ ك$_{١}$ − ك$_{٢}$ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ س + ع = ٨ + ك$_{٢}$

∴ ك$_{٢}$ = س + ع − ٨ (٤)

، بطرح (١) من (٢) :

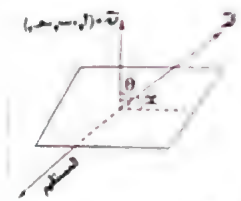
∴ ص − س = −١ + ك$_{٢}$ ∴ ك$_{٢}$ = ص − س + ١ (٥)

بالتعويض من (٤) ، (٥) فى (١) :

∴ س = ٣ − ٣ (س + ع − ٨) + (ص − س + ١)

∴ المعادلة العامة للمستوى هى : ٥ س − ص + ٣ ع − ٢٨ = ٠

الزاوية بين مستقيم ومستوى فى الفراغ (α)



إذا كان $\overrightarrow{ل}$ = (أ$_{١}$ ، ب$_{١}$ ، جـ$_{١}$) متجه اتجاه للمستقيم

، $\overrightarrow{ن}$ (أ$_{٢}$ ، ب$_{٢}$ ، جـ$_{٢}$) متجه اتجاه عمودى على المستوى

فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم والمستوى (α)

يساوى متممة الزاوية θ بين المتجهين حيث

جتا θ = $\frac{|(أ_{١} ، ب_{١} ، جـ_{١}) \cdot (أ_{٢} ، ب_{٢} ، جـ_{٢})|}{\sqrt{أ_{١}^{٢} + ب_{١}^{٢} + جـ_{١}^{٢}}\ \sqrt{أ_{٢}^{٢} + ب_{٢}^{٢} + جـ_{٢}^{٢}}}$ ، α = ٩٠° − θ

مثال ١٥

أوجد قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم : $\frac{س - ٥}{٢} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع + ٤}{٢}$

، المستوى : ٣ س + ٢ ص + ع − ٥ = ٠

الحل

الزاوية المطلوبة هى متممة الزاوية θ حيث :

جتا θ = $\frac{|(٢ ، -١ ، ٣) \cdot (٣ ، ٢ ، ١)|}{\sqrt{٤ + ١ + ٩}\ \sqrt{٩ + ٤ + ١}} = \frac{٧}{١٤} = \frac{١}{٢}$

∴ θ = ٦٠°

∴ قياس الزاوية بين المستقيم والمستوى = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

مثال ١٦

أوجد مسقط النقطة : أ (١ ، ٢ ، −١) على المستوى ٢ س + ٣ ص − ع + ٥ = ٠

الحل

نفرض أن مسقط النقطة أ على المستوى هى النقطة ب (س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ، ع$_{١}$)

∵ $\overrightarrow{أب}$ // العمودى على المستوى. ∴ متجه اتجاه $\overrightarrow{أب}$ هو (٢ ، ٣ ، −١)

∴ معادلة المستقيم المار بالنقطة أ وعمودى على المستوى هى :

(س ، ص ، ع) = (١ ، ٢ ، −١) + ك (٢ ، ٣ ، −١) (١)

∴ (س ، ص ، ع) = (١ + ٢ ك ، ٢ + ٣ ك ، −١ − ك)

، ∵ ب ∈ للمستوى ∴ ب تحقق معادلة المستوى.

∴ ٢ (١ + ٢ ك) + ٣ (٢ + ٣ ك) − (−١ − ك) + ٥ = ٠

∴ ٢ + ٤ ك + ٦ + ٩ ك + ١ + ك + ٥ = ٠

∴ ١٤ ك = −١٤ ∴ ك = −١

، بالتعويض فى (١) : ∴ إحداثيات النقطة ب = (−١ ، −١ ، ٠)

مثال ١٧

أوجد صورة النقطة : أ (١ ، ٣ ، ٤) بالانعكاس فى المستوى ٢ س − ص + ع + ٣ = ٠

الحل

نفرض أن مسقط النقطة أ على المستوى هى النقطة ب (س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ، ع$_{١}$)

، ∵ $\overrightarrow{أب}$ // العمودى على المستوى. ∴ متجه اتجاه $\overrightarrow{أب}$ هو (٢ ، −١ ، ١)

∴ معادلة المستقيم المار بالنقطة أ وعمودى على المستوى هى :

2

(س ، ص ، ع) = (١ ، ٣ ، ٤) + ك (٢ ، −١ ، ١)

∴ (س ، ص ، ع) = (١ + ٢ ك ، ٣ − ك ، ٤ + ك)

، ∵ ب ∈ المستوى. ∴ ب تحقق معادلة المستوى. (١)

∴ ٢ (١ + ٢ ك) − (٣ − ك) + (٤ + ك) + ٣ = ٠

∴ ٢ + ٤ ك − ٣ + ك + ٤ + ك + ٣ = ٠

∴ ٦ ك = −٦ ∴ ك = −١

، بالتعويض فى (١) : ∴ إحداثيات النقطة ب = (−١ ، ٤ ، ٣)

نفرض أن حـ (س$_{م}$ ، ص$_{م}$ ، ع$_{م}$) هى انعكاس أ على المستوى.

∴ ب هى منتصف $\overline{\text{أحـ}}$

∴ (−١ ، ٤ ، ٣) = $\left(\frac{١ + س_{م}}{٢} ، \frac{٣ + ص_{م}}{٢} ، \frac{٤ + ع_{م}}{٢}\right)$

∴ $\frac{١ + س_{م}}{٢}$ = −١ ∴ س$_{م}$ = −٣

، $\frac{٣ + ص_{م}}{٢}$ = ٤ ∴ ص$_{م}$ = ٥

، $\frac{٤ + ع_{م}}{٢}$ = ٣ ∴ ع$_{م}$ = ٢ ∴ حـ = (−٣ ، ٥ ، ٢)

حل آخر:

∵ معادلة المستقيم المار بالنقطة أ وعمودى على المستوى

هى (س ، ص ، ع) = (١ + ٢ ك ، ٣ − ك ، ٤ + ك)

، نفرض أن حـ (س$_{م}$ ، ص$_{م}$ ، ع$_{م}$) هى انعكاس أ على المستوى (١)

(س$_{م}$ ، ص$_{م}$ ، ع$_{م}$) = (١ + ٢ ك ، ٣ − ك ، ٤ + ك)

، منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ هى النقطة ب ∈ للمستوى. ∴ ب تحقق معادلة المستوى.

∴ ٢ $\left(\frac{١ + ١ + ٢ ك}{٢}\right)$ − $\left(\frac{٣ + ٣ − ك}{٢}\right)$ + $\left(\frac{٤ + ٤ + ك}{٢}\right)$ + ٣ = ٠

∴ ٢ + ٢ ك − ٣ + $\frac{١}{٢}$ ك + ٤ + $\frac{١}{٢}$ ك + ٣ = ٠ ∴ ٣ ك = −٦

∴ ك = −٢ ، بالتعويض فى (١) : ∴ حـ = (س$_{م}$ ، ص$_{م}$ ، ع$_{م}$) = (−٣ ، ٥ ، ٢)

درس 6

على معادلة المستوى فى الفراغ

اختبار تفاعلى

مهم ○ تطبيق ∴ مستويات عليا ▭ من أسئلة الكتاب المدرسى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) معادلة المستوى س ص فى .....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) ع = ٠ (د) س + ص = ٠

(٢) متجه اتجاه عمودى على المستوى −٢ س − ٤ ص + ع − ١٥ = ٠ هو .....

(أ) (٢ ، ٤ ، ١) (ب) (٢ ، ٤ ، ١٥)

(جـ) (٢ ، −٤ ، −١) (د) (−٢ ، −٤ ، ١)

(٣) إذا كان : (٥ ، −١ ، ٢) . $\overleftarrow{\text{ن}}$ = ٠ هى الصورة المتجهة لمعادلة مستوى يمر بنقطة الأصل فإن الصورة العامة هى .....

(أ) ٥ س − ص + ٢ ع = ٦ (ب) ٥ س − ص + ٢ ع = ٠

(جـ) ص − ٥ س + ٢ ع = ٨ (د) ٢ س − ص + ٥ ع = ٠

(٤) إذا كانت : ٣ س − ٥ ص − ٤ ع − ٢٧ = ٠ معادلة المستوى العامة فإن الصورة المتجهة لمعادلته هى .....

(أ) (٣ ، −٥ ، −٤) . $\overleftarrow{\text{ن}}$ = ٢٧ (ب) (٣ ، −٥ ، −٤) . $\overleftarrow{\text{ن}}$ = −٢٧

(جـ) (٥ ، ٤ ، ٢٧) . $\overleftarrow{\text{ن}}$ = ٣ (د) (٣ ، ٤ ، ٥) . $\overleftarrow{\text{ن}}$ = ٢٧

(٥) ▭ معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، −٢ ، ٥) والمتجه (٢ ، ١ ، ٣) عمودى عليه هى .....

(أ) ٢ س + ص + ٣ ع = ١ (ب) ٢ س + ص + ٣ ع = ١٥

(جـ) س − ٢ ص + ٥ ع = ١٥ (د) س + ص + ع = ٤

(٦) ▭ النقطة (٢ ، −١ ، ٣) تقع على المستوى .....

(أ) س + ص − ع = ٦ (ب) ٢ س − ٣ ص + ع = −١٠

(جـ) ٣ س − ٢ ص + ٤ ع = ٢٠ (د) س − ٢ ص + ٥ ع = ٤

⑦ أى من النقط الآتية تقع فى المستوى : ٢ س + ٣ ص − ع = ٥ ؟

(أ) (١ ، ١ ، ١) (ب) (١ ، ٢ ، ٠)

(جـ) (٠ ، ٢ ، ١) (د) (٣ ، ٢ ، −١)

⑧ إذا كان : أ (١ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ١ ، ١) ينتميان للمستوى :

ك س + ص + م ع + ٢ = ٠ فإن : ك + م = ...

(أ) −٧ (ب) −٥ (جـ) −٣ (د) −١

⑨ جيوب تمام الاتجاه للعمودى على المستوى ٣ س + ٤ ص + ع = ١ هى .....

(أ) ± (٣/٥ ، ٤/٥ ، ١/٥) (ب) ± (٣ ، ٤ ، ١)

(جـ) ± (٣/√٢٦ ، ٤/√٢٦ ، ١/√٢٦) (د) ± (١/√٢٦ ، ٤/√٢٦ ، ٣/√٢٦)

⑩ معادلة المستوى الذى يوازى المستوى ص ع ويمر بالنقطة (١ ، ٣ ، ٥) هى .....

(أ) س = ١ (ب) ص = ٣ (جـ) ع = ٥ (د) ص + ع = ٨

⑪ معادلة المستوى الذى يوازى المستوى س ص ويمر بالنقطة (١ ، ٣ ، ٥) هى .....

(أ) س = ١ (ب) ص = ٣ (جـ) ع = ٥ (د) س + ص = ٤

⑫ معادلة المستوى المار بنقطة الأصل موازيًا المستوى :

٣ س − ٤ ص + ٥ ع − ٦ = ٠ هى .....

(أ) ٣ س − ٤ ص + ٥ ع = ٠ (ب) ٥ س − ٤ ص + ٣ ع = ٠

(جـ) ٣ س − ٤ ص + ٥ ع = ٢ (د) ٥ س − ٤ ص + ٣ ع = ٤

⑬ ٢ ص + ٣ = ٠ معادلة مستوى .....

(أ) يوازى المستوى (ص ع) (ب) يوازى المستوى (س ع)

(جـ) يوازى المستوى (س ص) (د) غير ذلك.

⑭ يتعين المستوى بـ .....

(أ) ٣ نقط مختلفة ليست على استقامة واحدة.

(ب) مستقيم ونقطة خارجة.

(جـ) مستقيمان متقاطعان.

(د) كل ما سبق.

١ أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، −٣ ، ١) والمتجه $\overleftarrow{ن}$ = (١ ، −٢ ، ٣) عمودى على المستوى.

٢ أوجد الصورة العامة لمعادلة المستوى المار بنقطة الأصل والمتجه $\overleftarrow{ن}$ = $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ − ٣ $\overleftarrow{ع}$ عمودى عليه.

٣ (دور ثان ٢٠١٩) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (−٣ ، ٤ ، ٢) والمتجه $\overleftarrow{ن}$ = (١ ، −١ ، ٣) عمودى على المستوى.

٤ (دور ثان ٢٠١٨) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، −١ ، ٤) والمتجه $\overleftarrow{ن}$ = (٢ ، −٣ ، ٤) عمودى عليه ثم بين :

① هل النقطة (٢ ، ٢ ، ١) تقع فى المستوى ؟

② هل المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (٣ ، −٥ ، −٢) يوازى المستوى ؟

٦ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى الذى يقطع من محاور الإحداثيات س ، ص ، ع الأجزاء ٢ ، ٤ ، ٥ على الترتيب.

٧ (دور أول ٢٠١٩) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط :

(١ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٢ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٣)

٨ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالثلاث نقط :

① أ (٢ ، −١ ، ٠) ، ب (−١ ، ٣ ، ٤) ، جـ (٣ ، ٠ ، ٢)

② ل (١ ، ٣ ، ٥) ، م (−١ ، ٢ ، ٤) ، ن (٤ ، ٤ ، ٠)

③ (٢ ، ٠ ، ٤) ، (٢ ، ١ ، ١) ، نقطة الأصل.

٩ أوجد ثلاث نقط فى الفراغ تقع على كل من المستويات الآتية :

① س = ٣ ② ص = −٢

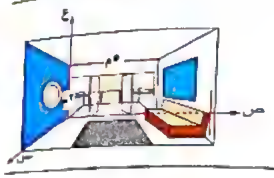
③ س + ٣ ص = ٥ ④ ٢ س − ص + ٣ ع = ٤

١٠ إذا مر المستوى ٢ أ س − ٣ أ ص + ٤ أ ع + ٦ = ٠ بمنتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزى الكرتين س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٦ س − ٨ ص − ٢ ع = ١٢ ، س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ١٠ س + ٤ ص − ٢ ع = ٨ فما قيمة أ ؟

١١ عين وضع كل من النقط : أ (٣ ، −٢ ، ٥) ، ب (−٤ ، ١ ، ٠) ، حـ (٦ ، ٥ ، −١) ، ء (−٣ ، −٥ ، ٢) ، هـ (٤ ، −٧ ، ١٠) بالنسبة للمستوى ٢ س − ٣ ص + ٤ ع − ٥ = ٠

١٢ أوجد الأجزاء التى يقطعها المستوى ٢ س + ٣ ص − ع = ٦ من محاور الإحداثيات.

١٣ فى الشكل المقابل. أوجد معادلة كل من :



(١) مستوى أرضية الحجرة.

(٢) مستوى سقف الحجرة.

(٣) مستويات الحوائط الجانبية.

١٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) (دور أول ٢٠١٧) معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣) ويوازى محورى الإحداثيات س ، ص هى .....

(أ) س + ص = ٢ (ب) ع = ٣ (جـ) س = ١ (د) ص = ٢

(٢) معادلة المستوى المار بالنقط (٢ ، ٣ ، ٥) ، (−١ ، ٣ ، ١) ، (٤ ، ٣ ، −٢) هى .....

(أ) س + ص − ع = ٠ (ب) س = −١

(جـ) ص = ٣ (د) ع = −٢

(٣) معادلة المستوى الذى يوازى المحور س هى .....

(أ) أ س + حـ ع + ء = ٠ (ب) ب ص + حـ ع + ء = ٠

(جـ) أ س + ب ص + ء = ٠ (د) أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠

(٤) فى الفراغ ثلاثى الأبعاد المعادلة ٣ ص + ٤ ع = ٠ تمثل .....

(أ) مستوى يحوى المحور ع (ب) مستوى يحوى المحور س

(جـ) مستوى يحوى المحور ص (د) مستقيم نسب اتجاهه (٠ ، ٣ ، ٤)

(٥) ٤ س + ٥ ص − ٩ = ٠ هى معادلة مستوى .....

(أ) يوازى محور س (ب) يوازى محور ع

(جـ) يحوى محور ص (د) يحوى محور ع

(٦) إذا كان المستقيم س = ٣ ص = أ ع يوازى المستوى : س + ٣ ص + ٢ ع + ٤ = ٠ فإن : أ = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) −١ (د) ١

(٧) نقطة تقاطع المستقيم $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{١} = \frac{ع}{٣}$ والمستوى : س − ٢ ص + ٣ ع + ٥ = ٠ هى .....

(أ) (١ ، ٢ ، ٣) (ب) (−١ ، ٢ ، ٣)

(جـ) (−١ ، ٢ ، ٠) (د) (٠ ، ٢ ، −١)

(٨) النقطتان أ (−٢ ، ٣ ، ٥) ، ب (٤ ، −٧ ، −٢) ، المستوى ط : ٢ س − ٣ ص + ع − ٧ = ٠ فإن : أ ، ب .....

(أ) تنتميان للمستوى ط

(ب) تقعان فى نفس الجهة من المستوى ط

(جـ) تقعان فى جهتين مختلفتين من المستوى ط

(د) أحد النقطتين تقع فى المستوى ط

(٩) المعادلة $\|\vec{ر}\|^{٢}$ − ٢ ($\vec{ر}$. $\vec{أ}$) + ك = ٠ تمثل .....

(أ) مستوى. (ب) كرة. (جـ) خط مستقيم. (د) متجه.

(١٠) المعادلة $\|\vec{ر}\|^{٢}$ − $\vec{ر}$. (٢ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$ − ٢ $\overleftarrow{ع}$) − ١٠ = ٠ تمثل معادلة .....

(أ) دائرة طول نصف قطرها ٤ (ب) مستوى.

(جـ) كرة طول نصف قطرها ٤ (د) كرة طول نصف قطرها = $\sqrt{١٠}$

(١١) معادلة المستوى المار بالنقاط (٠ ، ٠ ، -٤) ، (٠ ، ٥ ، ٠) ، (-٢ ، ٠ ، ٠) هى .....

(أ) $\overrightarrow{ن} \cdot$ (-٢ ، ٠ ، ٠) = [(٠ ، ٠ ، -٤) × (٠ ، ٥ ، ٠)] . (-٢ ، ٠ ، ٠)

(ب) -٢ س + ٥ ص - ٤ ع = ٠

(جـ) أ (س + ٢) + ب (ص - ٥) + حـ (ع + ٤) = ٠

(د) - ١٠ س + ٤ ص - ٥ ع - ٢٠ = ٠

(١٢) المستوى ٣ س - ٢ ص + ٤ ع = ١٢ يقطع من محور س جزءًا طوله .....

(أ) ٣ (ب) -٤ (جـ) ٤ (د) ٦

(١٣) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات بواسطة المستوى س + ٥ ص - ٦ ع = ٣٠ هى أ ، ب ، حـ فإن : أ + ب + حـ = ...

(أ) صفر (ب) ٣٠ (جـ) ٣١ (د) ٤١

(١٤) إذا قطع المستوى $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٢} + \frac{ع}{٣} = ١$ محاور الإحداثيات فى النقط أ ، ب ، حـ فإن مساحة Δ أ ب حـ = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٠ (جـ) ٦ (د) ٤

(١٥) يقطع المستوى محاور الإحداثيات فى أ ، ب ، حـ بحيث أن نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ هى (٣ ، ٣ ، ٣) فإن معادلة المستوى هى .....

(أ) ٣ س + ٣ ص + ٣ ع = ١ (ب) ٣ س + ٣ ص + ٣ ع = ٣

(جـ) $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٣} + \frac{ع}{٣} = ١$ (د) $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٣} + \frac{ع}{٣} = ٣$

(١٦) معادلة المستوى الذى يقطع من الأجزاء الموجبة لمحورى س ، ع جزءين طوليهما ٢ ، ٤ وحدات طول ومن الجزء السالب لمحور الصادات جزء طوله ٣ وحدات طول هى .....

(أ) ٢ س - ٣ ص + ٤ ع = ١ (ب) ٦ س - ٤ ص + ٣ ع = ٦

(جـ) ٦ س + ٤ ص + ٣ ع = ١٢ (د) ٦ س - ٤ ص + ٣ ع = ١٢

(١٧) إذا قطع المستوى ٢٠ س + ١٥ ص + ١٢ ع = ٦٠ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب فإن حجم المجسم أ ب حـ و حيث و نقطة الأصل يساوى ..... وحدة مكعبة.

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٠

(١٨) معادلة المستوى المار بالنقطة (أ ، ب ، حـ) موازيًا المستوى س + ص + ع = ٠ هى .....

(أ) أ س + ب ص + حـ ع = ١ (ب) س + ص + ع + أ + ب + حـ = ٠

(جـ) س + ص + ع = أ + ب + حـ (د) أ س + ب ص + حـ ع = أ + ب + حـ

(١٩) معادلة المستوى العمودى على المتجه ٢ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ + ٣ $\overrightarrow{ع}$ ويمر بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣) هى .....

(أ) ٢ س + ص + ٣ ع = ٠ (ب) ٢ س + ص + ٣ ع = ١٣

(جـ) ٢ س + ص + ٣ ع = ١٤ (د) ٢ س + ص + ٣ ع = ٧

(٢٠) المستوى الذى معادلته : ٢ س - ص = ٠ عموديًا على المستوى .....

(أ) س ص (ب) ص ع (جـ) س ع (د) ص - ٢ س = ٠

(٢١) معادلة المستوى الذى يحتوى نقطة الأصل والمتجه (٠ ، ١ ، -٢) عمودى عليه هى .....

(أ) س = ٢ ص (ب) ص = ٢ ع (جـ) ع = ٢ س (د) ص = ١

(٢٢) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (١ ، ١ ، ١) عموديًا على المستوى ٢ س + ٣ ص + ع + ٥ = ٠ هى .....

(أ) $\frac{س - ١}{-١} = \frac{ص - ١}{١} = \frac{ع - ١}{١}$ (ب) $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ١}{٣} = \frac{ع - ١}{١}$

(جـ) $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ١}{٣} = \frac{ع - ١}{١}$ (د) $\frac{س - ١}{١} = \frac{ص - ١}{٣} = \frac{ع - ١}{٢}$

(٢٣) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وعمودى على المستوى $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} + \frac{ع}{حـ} = ١$ هى .....

(أ) $\overrightarrow{ر} = (٠ ، ٠ ، ٠) + ك (أ ، ب ، حـ)$

(ب) $\overrightarrow{ر} = (٠ ، ٠ ، ٠) + ك \left(\frac{١}{أ} ، \frac{١}{ب} ، \frac{١}{حـ}\right)$

(جـ) $\overrightarrow{ر} = (أ ، ب ، حـ) + ك (٠ ، ٠ ، ٠)$

(د) $\overrightarrow{ر} = (أ ، ب ، حـ) + ك (١ ، ١ ، ١)$

(٢٤) معادلة المستوى الذى يحوى محور ع ويمر بالنقطة (١ ، −١ ، ٣) هى .....

(أ) ٣ س + ص = ٦ (ب) ٣ س + ص = ٠

(جـ) س + ص = ٠ (د) س − ٤ ص + ٣ ع = ٠

(٢٥) معادلة المستوى المار بالنقطة (٤ ، ٠ ، ١) وموازيًا للمستوى ٤ س + ٣ ص − ١٢ ع + ٦ = ٠ هى .....

(أ) ٤ س + ٣ ص − ١٢ ع = ٦ (ب) $\overrightarrow{ر} \cdot (٤ ، ٣ ، -١٢) = ٤$

(جـ) ٤ س + ٣ ص − ١٢ ع = ٠ (د) $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٣} + \frac{ع}{-١٢} = ١$

(٢٦) المستقيم : $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ٢}{٣} = ١ - ع$

والمستوى ٣ ص − ع + ٢ س = ٣ .....

(أ) متوازيان. (ب) المستقيم يقع بأكمله فى المستوى.

(جـ) المستقيم يقطع المستوى على التعامد. (د) المستقيم يقطع المستوى وغير متعامدين.

(٢٧) إذا كان المستقيم $\frac{س - ١}{٤} = \frac{ص - ٢}{ب} = \frac{ع}{٦}$ لا يقطع المستوى

٢ س − ٤ ص + ٣ ع = ٥ فإن : ب = ...

(أ) −١٠ (ب) −٨ (جـ) $\frac{١٣}{٢}$ (د) $\frac{١٩}{٢}$

(٢٨) إذا كان المستقيم : $\frac{س - ٢}{٣} = \frac{ص + ١}{٢} = ١ - ع$ ، يقطع المستويين

٢ س + ٣ ص − ع + ١٣ = ٠ ، ٣ س + ص + ٤ ع = ١٦ فى النقطتين أ ، ب

فإن : أ ب = ...

(أ) $\sqrt{١٤}$ (ب) $\sqrt{٢٨}$ (جـ) ٢ $\sqrt{١٤}$ (د) ١٤

(٢٩) الوصف الهندسى لمجموعة نقط الفراغ التى احداثياتها تحقق زوج المعادلات : ص = ٣ ، ع = ١ هو مستقيم يوازى المستوى .....

(I) ص ع (II) س ع (III) س ص

(أ) (I) ، (II) (ب) (II) ، (III)

(جـ) (I) ، (III) (د) كل ما سبق صحيح.

(٣٠) المستقيم $\frac{س - س_١}{ل} = \frac{ص - ص_١}{م} = \frac{ع - ع_١}{ن}$ يقع فى المستوى : أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠ إذا كان .....

(أ) أ ل + ب م + حـ ن = ٠

(ب) أ س$_١$ + ب ص$_١$ + حـ ع$_١$ + ء = ٠

(جـ) أ ل + ب م + حـ ن = ٠ ، أ س$_١$ + ب ص$_١$ + حـ ع$_١$ + ء = ٠

(د) (ل ، م ، ن) × (أ ، ب ، حـ) = ٠

(٣١) المستقيمان ل$_١$: $\frac{س + ١}{-١} = \frac{ص - ٢}{-١} = \frac{ع - ١}{٣}$

، ل$_٢$: $\frac{س + ١}{١} = \frac{ص - ٢}{-٢} = \frac{ع - ١}{-١}$ يقعان فى المستوى .....

(أ) ٣ س − ٥ ص + ع − ١ = ٠ (ب) ٥ س − ٤ ص + ٢ ع − ٧ = ٠

(جـ) ٧ س − ٥ ص − ع − ٤ = ٠ (د) ٧ س + ٢ ص + ٣ ع = ٠

(٣٢) المستقيم $\frac{س + ١}{١} = \frac{ص + ٣}{٣} = \frac{ع - ٢}{-٢}$ يكون عموديًا على المستوى .....

(أ) س − ٣ ص − ٢ ع + ٧ = ٠ (ب) ٢ س + ٦ ص − ٤ ع + ٣ = ٠

(جـ) س + ٣ ص − ٥ ع = ٠ (د) ٢ س + ٦ ص + ٤ ع = ٥

(٣٣) جميع النقط التالية تقع فى نفس الجهة من المستوى $\overrightarrow{ر} \cdot (٣ \overrightarrow{س} - ٥ \overrightarrow{ص} + ٤ \overrightarrow{ع}) = ٥$ ما عدا .....

(أ) (١ ، ٢ ، ١) (ب) (٠ ، −١ ، ٢)

(جـ) (٢ ، −٣ ، ١) (د) (١ ، ٢ ، ٤)

(٣٤) المستقيم : $\frac{س - ٢}{٣} = \frac{ص - ٣}{٤} = \frac{ع - ٤}{٥}$ يكون موازيًا للمستوى .....

(أ) ٢ س + ص − ٢ ع = ٠ (ب) س + ص + ع = ٠

(جـ) ٣ س + ٤ ص + ٥ ع = ٧ (د) ٢ س + ٣ ص + ٤ ع = صفر

(٣٥) إذا كان المستقيم ل : $\frac{س - ١}{٣} = \frac{ص + ٣}{٢} = \frac{ع - ٢}{-١}$

، المستوى ط : س − ٢ ص − ع = ٠ أى مما يأتى صحيح ؟

(أ) ل // ط (ب) ل ⊥ ط (جـ) ل ⊂ ط (د) ل يقطع ط

(٣٦) المستقيم : $\frac{س}{١} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{٣}$ بالنسبة للمستوى س − ٢ ص + ع − ٦ = ٠ .....

(أ) المستقيم يوازى المستوى. (ب) المستقيم عموديًا على المستوى.

(جـ) المستقيم يقع فى المستوى. (د) المستقيم مائل على المستوى.

(٣٧) قياس الزاوية بين المستقيم $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{١} = \frac{ع + ٣}{-٢}$ والمستوى :

س + ص + ٤ = ٠ هو .....

(أ) ٠ (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

(٣٨) النقطة التى تنتمى للمستوى $\overleftarrow{ر}$ = (−١ ، ٠ ، ٢) + ك (٠ ، ٠ ، ١)

+ م (١ ، ٠ ، −١) هى .....

(أ) (٠ ، ١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١ ، ٣) (جـ) (٣ ، ١ ، ٢) (د) (١ ، ٠ ، ١)

(٣٩) معادلة المستوى الذى يحوى الخط $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ + ك (٢ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ + ٤ $\overleftarrow{ع}$)

هى .....

(أ) $\overleftarrow{ر}$. (− $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$) = ٣ (ب) $\overleftarrow{ر}$. ($\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ − $\overleftarrow{ع}$) = ٦

(جـ) $\overleftarrow{ر}$. ($\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ − $\overleftarrow{ع}$) = ٣ (د) $\overleftarrow{ر}$. (− $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$) = ٦

(٤٠) إذا كان مسقط النقطة و (٠ ، ٠ ، ٠) على المستوى (ط) هى م (٢ ، ٣ ، ١)

فإن معادلة هذا المستوى هى .....

(أ) ٢ س + ٣ ص + ع − ١٤ = ٠ (ب) س + ٣ ص + ٢ ع − ١٤ = ٠

(جـ) ٢ س + ٣ ص + ع = ٠ (د) س + ٣ ص + ٢ ع = ٠

(٤١) صورة النقطة (−٢ ، ٣ ، −٤) بالانعكاس فى المستوى س ع هى .....

(أ) (−٢ ، ٣ ، −٤) (ب) (٢ ، ٣ ، −٤)

(جـ) (−٢ ، −٣ ، −٤) (د) (−٢ ، ٣ ، ٤)

(٤٢) المستقيمان الغير متوازيين $\overleftarrow{ر}_١$ = $\overleftarrow{أ}_١$ + ك$_١$ $\overleftarrow{ق}_١$ ، $\overleftarrow{ر}_٢$ = $\overleftarrow{أ}_٢$ + ك$_٢$ $\overleftarrow{ق}_٢$ يقعان فى

نفس المستوى إذا كان .....

(أ) $\overleftarrow{أ}_١$ × $\overleftarrow{أ}_٢$ = $\overleftarrow{و}$ (ب) $\overleftarrow{ق}_١$ × $\overleftarrow{ق}_٢$ = $\overleftarrow{و}$

(جـ) ($\overleftarrow{أ}_٢$ − $\overleftarrow{أ}_١$) . ($\overleftarrow{ق}_١$ × $\overleftarrow{ق}_٢$) = ٠ (د) $\overleftarrow{ق}_١$. $\overleftarrow{ق}_٢$ = صفر

(٤٣) معادلة المستوى الذى ينصف الخط بين النقطتين (٢ ، ٣ ، ٤) ، (٦ ، ٧ ، ٨)

يمكن أن تكون .....

(أ) س + ص + ع − ١٥ = ٠ (ب) س + ع − ص − ١٥ = ٠

(جـ) س − ص − ع − ١٥ = ٠ (د) س + ص + ع + ١٥ = ٠

(٤٤) الزاوية بين المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٢ $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$) + ك (− $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$)

والمستوى $\overleftarrow{ر}$. (٣ $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ − $\overleftarrow{ع}$) = ٤ هى .....

(أ) $ظا^{-١}$ $\left(\frac{٢}{\sqrt{٤٢}}\right)$ (ب) $ظا^{-١}$ $\left(\frac{-٢}{\sqrt{٤٢}}\right)$

(جـ) $ظا^{-١}$ $\left(\frac{٢}{٤\sqrt{٢}}\right)$ (د) $ظا^{-١}$ $\left(\frac{-٢}{٤\sqrt{٢}}\right)$

(٤٥) النقطة أ هى صورة النقطة ب (١ ، ٢ ، ٣) بالانعكاس فى المستوى س ص ،

وكانت ب هى صورة أ بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ١٨٠° ، وكانت

حـ صورة ب بالانتقال ٥ وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور ص ، فإن إحداثيات حـ

هى .....

(أ) (١ ، ٧ ، −٣) (ب) (−١ ، ٧ ، −٣)

(جـ) (−١ ، −٢ ، ٨) (د) (−١ ، ٣ ، ٣)

(٤٦) إذا كانت النقطة ب (٢ ، ١ ، ٣) هى مسقط النقطة أ ($س_١$ ، $ص_١$ ، ٦) على

المستوى ٢ س + ص + ع = ٨ فإن : $س_١$ × $ص_١$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٦ (جـ) ٣٢ (د) ٤٢

(٤٧) إذا كانت النقطة (أ) تبعد عن المستوى (ط) مسافة تساوى ١٦ وحدة طول وكان المستقيم المار بالنقطة (أ) يقطع المستوى (ط) فى نقطة (ب) ويصنع مع المستوى (ط) زاوية قياسها θ حيث ظا θ = $\frac{٨}{١٥}$ فإن طول مسقط $\overline{أب}$ على المستوى = ... وحدة طول.

(أ) ٣٠ (ب) ١٥ (جـ) ١٦ (د) ٨

(٤٨) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيم : $\frac{س - ٥}{٢} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع + ٤}{أ}$ ، المستوى : ٣ س + ٢ ص + ع = ٥ يساوى ٣٠° فإن : أ = ... حيث أ ∈ ص

(أ) −٣ (ب) ٢ (جـ) ٢ (د) −٤

(٤٩) معادلة المستوى الذى يمس الكرة $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٤$ ويوازى المستوى س ص يمكن أن تكون .....

(أ) س + ص + ع = ٤ (ب) ع = ٤

(جـ) ع = ٢ (د) س + ص = ٤

(٥٠) معادلة المستوى الذى يمس الكرة $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٩$ عند النقطة أ (٢ ، −١ ، ٢) هى .....

(أ) ٢ س − ص + ٢ ع = ٩ (ب) ٢ س − ص + ٢ ع = ٣

(جـ) س + ص + ع = ٣ (د) $\frac{س}{٢} - \frac{ص}{١} + \frac{ع}{٢} = ٣$

(٥١) إذا كانت النقطة (٤ ، −١ ، ٣) هى صورة النقطة (٢ ، ١ ، ١) بالانعكاس فى مستوى فإن معادلة هذا المستوى هى .....

(أ) س − ص + ع = ٥ (ب) ٤ س − ص + ٣ ع = ١٠

(جـ) ٢ س + ص + ع = ٥ (د) س − ٢ ص + ع = ٥

(٥٢) إذا كانت θ هى قياس الزاوية التى يصنعها المستوى ٢ س − ٣ ص + ٦ ع = ١١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن : ما θ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٢}}{٣}$ (د) ١

(٥٣) إذا كان المستقيم : $\frac{س - ٢}{٣} = \frac{ص + ١}{-٤} = \frac{ع + ٣}{٥}$ يصنع زوايا قياساتها ل ، م ، ن مع مستويات الاحداثيات س ص ، ص ع ، ع س على الترتيب فإن : $ما^٢ ل + ما^٢ م + ما^٢ ن$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\sqrt{٣}$

(٥٤) إذا كان المستوى : ٢ س − ص + ٢ ع = ٦ يمس سطح الكرة : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٤ س - ٢ ص + ٦ ع + ٥$ = صفر فإن معادلة المستقيم المار بمركز الكرة ونقطة التماس هى .....

(أ) $\overline{ر}$ = (٢ ، ١ ، −٣) + ك (٢ ، −١ ، ٢)

(ب) $\overline{ر}$ = (٢ ، ١ ، −٣) + ك (٤ ، ٠ ، −١)

(جـ) $\overline{ر}$ = (٤ ، ٠ ، −١) + ك (٢ ، ١ ، −٣)

(د) $\overline{ر}$ = (٢ ، −١ ، ٢) + ك (٢ ، ١ ، ٣)

(٥٥) إذا قطع المستوى : ب حـ س + أ حـ ص + أ ب ع = أ ب حـ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقط ك ، ن ، م على الترتيب كما قطع المستوى : ب حـ س + أ حـ ص − أ ب ع = − أ ب حـ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقط ك' ، ن' ، م' على الترتيب فإن الهرم : م ك ن ك' ن' هو هرم .....
حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية موجبة ، أ ≠ ب

(أ) رباعى قائم. (ب) رباعى منتظم.

(جـ) ثلاثى قائم. (د) ثلاثى منتظم.

١٥ إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات فى النقط أ ، ب ، حـ وكانت النقطة (م ، ن ، ر) هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ
أثبت أن : معادلة المستوى هى $\frac{س}{م} + \frac{ص}{ن} + \frac{ع}{ر} = ٣$

١٦ (دور أول ٢٠١٧) إذا قطع المستوى ٣ س + ٢ ص + ٤ ع = ١٢ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب. احسب مساحة المثلث أ ب حـ
٣٠ $\sqrt{٢٩}$ وحدة مربعة.

١٧ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (س₁ ، ص₁ ، ع₁) عموديًا على المستوى أ س + ب ص + جـ ع + ء = ٠

١٨ أوجد معادلة المستوى :

(١) الموازى للمستوى س − ٢ ص + ٢ ع = ١ والمار بالنقطة (١ ، −١ ، ٢)

(٢) المار بالنقطتين أ (١ ، ٢ ، −٣) ، ب (٢ ، ٣ ، −٤) وعموديًا على المستوى س + ص + ع + ١ = ٠

(٣) المار بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣) موازيًا المتجهين (٢ ، ١ ، −١) ، (٣ ، ٦ ، −٢)

(٤) المار بالنقطتين (١ ، −٢ ، ٥) ، (٢ ، ٢ ، ٣) ويوازى المتجه $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، −١ ، ٠)

(٥) المار بالنقطة (٤ ، −١ ، ٢) ويحوى المحور س

(٦) الذى مسقط نقطة الأصل عليه هى النقطة (٢ ، ٣ ، −٥)

(٧) الذى يقطع من محاور الإحداثيات س ، ص ، ع الأجزاء ٢ ، −٣ ، ٥ على الترتيب.

(٨) المار بالنقطة (٣ ، ٥ ، −٧) والذى يقطع المحاور الإحداثية بقطع متساوية.

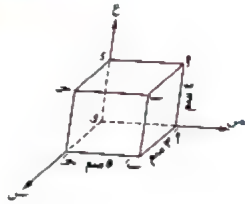
(٩) المار بالنقطتين أ (٣ ، ٥ ، ١) ، ب (٧ ، ٧ ، ٨) والقاطع للمحورين س ، ص بقطعتين متساويتين.

(١٠) العمودى على المستوى ٢ س − ٢ ص + ٤ ع − ٥ = ٠ ويقطع المحورين س ، ص فى (−٢ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ٠)

(١١) الذى يقطع جزءًا مقداره ٣ وحدات من الجزء السالب لمحور س وجزءًا مقداره ٢ وحدة من الجزء الموجب لمحور ع ويمر بالنقطة (٦ ، −١٠ ، ١)

(١٢) القاطع للمحور س فى النقطة (٥ ، ٠ ، ٠) وللمحور ص فى النقطة (٠ ، −٧ ، ٠) والمار بالنقطة (١ ، ١ ، ٢)

١٥ باستخدام الشكل المقابل أوجد معادلة كل مما يأتى :



(١) المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

(٢) المستقيم $\overleftrightarrow{بجـ}$

(٣) المستقيم $\overleftrightarrow{ب ب}$

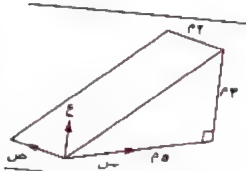
(٤) المستوى أ ب جـ ء

(٥) المستوى أ ب جـ و

(٦) المستقيم $\overleftrightarrow{أجـ}$

(٧) المستوى أ ب جـ و

١٦ بالاستعانة بالشكل المجاور أوجد معادلة المستوى العامل وكذلك معادلة خط أكبر ميل الذى يمر بنقطة الأصل.



١٧ أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{ر}_١$ = (٣ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ − $\overrightarrow{ع}$) + ك₁ ($\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ + ٣ $\overrightarrow{ع}$) ، $\overrightarrow{ر}_٢$ = (٢ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$) + ك₂ ($\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$) متقاطعان ، وأوجد معادلة المستوى الذى يحويهما.

١٨ أثبت أن المستقيمين : ل₁ : ٢ س = ٣ ص = ٤ ع ، ل₂ : ٣ س = ٢ ص = ٥ ع متقاطعان ثم أوجد معادلة المستوى الذى يحويهما.

١٩ أثبت أن المستقيمين : ل₁ : $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، −٢ ، ٢) + ك (٤ ، ١ ، ٣) ، ل₂ : $\frac{س − ٣}{٨}$ = $\frac{ص − ٤}{٢}$ = $\frac{ع + ٥}{٦}$ متوازيان ثم عين المعادلة العامة للمستوى الذى يحوى هذين المستقيمين.

٢٠ (دور أول ٢٠١٧) أوجد معادلة المستوى الذى يحتوى المستقيم :
ل₁ : $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٣ ، −٥) + ك₁ (٦ ، −٢ ، −١) ويوازى المستقيم
ل₂ : $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٧ ، −٤) + ك₂ (١ ، −٣ ، ٣)

٢٥ أوجد معادلة المستوى الذى يحوى كلاً من المستقيم : $\frac{س + ١}{-٣} = \frac{ص - ٣}{٢} = \frac{ع + ٢}{١}$ ♣
والنقطة (٠ ، ٧ ، -٧)

٢٦ أوجد معادلة المستوى الذى يحوى المستقيم : $س = \frac{ص - ٣}{٢} = \frac{ع - ٥}{٣}$ ويكون عموديًا ♣
على المستوى ٢ س + ٧ ص - ٣ ع = ١

٢٧ أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (-١ ، ٣ ، ٢) ويكون عموديًا على كلٍ من المستويين : ♣
س + ٢ ص + ٣ ع = ٥ ، ٣ س + ٣ ص + ع = ٩

٢٨ أوجد معادلة المستوى المار بنقطة الأصل وعموديًا على كل من المستويين : ♣
س + ٢ ص - ع = ١ ، ٣ س - ٤ ص + ع = ٥

٢٩ أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (٢ ، ١ ، ٤) فى كل من الحالات الآتية :
(١) يوازى المستوى ٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ١
(٢) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ٥) ، (١ ، ٦ ، ٤)
(٣) عمودى على كل من المستويين ٧ س + ص + ٢ ع = ٦ ، ٣ س + ٥ ص - ٦ ع = ٨

٣٠ اكتب المعادلة العامة للمستوى :
س = ٢ + ٢ $ك_١$ - ٤ $ك_٢$ ، ص = ٤ - $ك_٢$ ، ع = ٢ + ٣ $ك_١$

٣١ أوجد المعادلة الإحداثية للمستوى الذى معادلته :
(س ، ص ، ع) = (٢ ، ٣ ، ٥) + $ك_١$ (-١ ، ٣ ، ٤) + $ك_٢$ (٦ ، ١ ، -٢)
حيث $ك_١$ ، $ك_٢$ بارامترات.

٣٢ أثبت أن المستقيم : $\frac{س - ٣}{٥} = \frac{ص + ١}{٥} = \frac{ع + ٤}{٧}$ يقع فى المستوى : ♣
٣ س + ٤ ص - ٥ ع = ٢٥

٣٣ أثبت أن النقطة أ (٢ ، ٣ ، ١) والمستقيم ل :
$\overleftarrow{ر}$ = (٣ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ + ٣ $\overleftarrow{ع}$) + ك ($\overleftarrow{س}$ - ٢ $\overleftarrow{ص}$ + ٢ $\overleftarrow{ع}$)
يقعان فى المستوى الذى معادلته $\overleftarrow{ر}$. (٢ $\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ع}$) = ٣

٣٤ أثبت أن المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{ع}$ + ك (٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ + ٤ $\overleftarrow{ع}$)
عمودى على المستوى س + $\frac{٣}{٢}$ ص + ٢ ع = ٥

٣٥ أوجد قياس الزاوية بين المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = ($\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ - $\overleftarrow{ع}$) + ك ($\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$)
والعمودى على المستوى $\overleftarrow{ر}$. (٢ $\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$) = ٤ ، ١٩ ٢٨°

٣٦ أوجد قياس الزاوية بين المستقيم $\frac{س + ١}{٣} = \frac{ص - ١}{٢} = \frac{ع - ٢}{٤}$
والمستوى : ٢ س + ص - ٣ ع + ٤ = ٠ ، ١١ ٢٧°

٣٧ إذا كان المستقيم $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ٣}{-١} = \frac{ع}{٣}$ يقطع المستوى ٣ س + ٢ ص + ع - ٨ = ٠
فى نقطة أوجد قياس زاوية ميل المستقيم على المستوى. ٣٠°

٣٨ إذا كان قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم : $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{١} = \frac{ع + ٢}{-٢}$
والمستوى : م س + ص + ٤ = ٠ يساوى ٤٥° أوجد قيمة : م ١ أو ٧

٣٩ إذا كانت θ قياس الزاوية الصغرى المحصورة بين المستقيم :
$\frac{س + ٢}{ك} = \frac{ص - ٢}{-٢} = \frac{ع + ١}{١}$ والمستوى س + ٢ ص + ٣ ع - ٥ = ٠
وكان جتا θ = $\frac{٥\sqrt{٧٠}}{٤٢}$ أوجد قيمة : ك $\frac{١}{٤}$ أو ٢

٤٠ أوجد نقطة تقاطع المستقيم س = ص = ع مع المستوى س + ٢ ص + ٣ ع = ١٢ (٢ ، ٢ ، ٢)

٤١ أوجد نقطة تقاطع المستقيم $\frac{س + ٨}{٩} = \frac{ص - ١٠}{-٤} = \frac{ع - ٩}{-٢}$
مع المستوى : ٣ س + ٤ ص + ٥ ع = ٧٦ (١٢٧ ، -٥٠ ، -٢١)

٤٢ أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم $\overleftarrow{ر} = (٢ ، -١ ، ٢) + ك (٣ ، ٤ ، ٢)$ مع المستوى $\overleftarrow{ر} \cdot (١ ، -١ ، ١) = ٥$ ○ (٢ ، -١ ، ٢)

٤٣ أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ع} + ك (٢ \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ع})$ مع المستوى $\overleftarrow{ر} \cdot \overleftarrow{س} = ٤$ ○ (٤ ، ٢ ، ٢)

٤٤ أوجد مسقط النقطة (١ ، ٢ ، ٣) على المستوى س + ٢ ص + ٤ ع = ٥٩ ♣ (٣ ، ٦ ، ١١)

٤٥ أوجد نقطة أ تقع على المستوى ٢ س + ص − ٢ ع = ١ بحيث يكون بعدها عن النقطة ♣ ب (١ ، ٠ ، −١) أقل ما يمكن. ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$)

٤٦ أوجد صورة النقطة أ (٣ ، −٨ ، −٧) بالانعكاس فى المستوى : س − ٣ ص + ع + ٢ = ٠ ♣ (−١ ، ٤ ، ٠)

مسائل تقيس مهارات التفكير

٤٧ أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، −٤ ، −٥) ، (٢ ، −٣ ، ١) مع المستوى المار بالنقط (٢ ، ٢ ، ١) ، (٣ ، ٠ ، ١) ، (٤ ، −١ ، ٠) ○ (١ ، −٢ ، ٧)

٤٨ أوجد معادلة مسقط المستقيم : $\overleftarrow{ر} = (١ ، ٢ ، -١) + ك (٠ ، -١ ، ٢)$ ♣ على المستوى ٢ س − ص + ع = ٥

٤٩ أوجد نقطة تقاطع المستويات : ٢ س + ص − ع = −١ ، س + ص + ع − ٢ = ٠ ، ٣ س − ص − ع = ٦ ○ (٢ ، $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$)

الدرس 3 الأوضاع النسبية لمستويين فى الفراغ

إذا كان $ط_١$: أ$_١$ س + ب$_١$ ص + جـ$_١$ ع + د$_١$ = ٠ ، $ط_٢$: أ$_٢$ س + ب$_٢$ ص + جـ$_٢$ ع + د$_٢$ = ٠

معادلتى مستويين مختلفين فى الفراغ

فإن : $\overleftarrow{ن}_١$ = (أ$_١$ ، ب$_١$ ، جـ$_١$) متجه اتجاه عمودى على المستوى $ط_١$

، $\overleftarrow{ن}_٢$ = (أ$_٢$ ، ب$_٢$ ، جـ$_٢$) متجه اتجاه عمودى على المستوى $ط_٢$

الزاوية بين مستويين

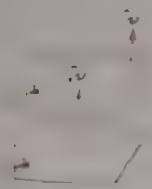
قياس الزاوية الصغرى θ بين المستويين

$ط_١$ ، $ط_٢$ حيث $\overleftarrow{ن}_١$ ، $\overleftarrow{ن}_٢$

متجها اتجاه عموديين عليهما

يمكن ايجادها من العلاقة . جتا θ = $\frac{|\overleftarrow{ن}_١ \cdot \overleftarrow{ن}_٢|}{|\overleftarrow{ن}_١| \, |\overleftarrow{ن}_٢|}$ حيث ٠ ≤ θ ≤ ٩٠°

المستويان المتوازيان والمستويان المتعامدان



$\overleftarrow{ن}_١ \parallel \overleftarrow{ن}_٢$

أو ل

• $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$ • $\overleftarrow{ن}_١ = ك \overleftarrow{ن}_٢$

• $\overleftarrow{ن}_١ \times \overleftarrow{ن}_٢ = \overleftarrow{و}$

شرط تعامد مستويين : (θ = ٩٠°) هو $\overleftarrow{ن}_١ \cdot \overleftarrow{ن}_٢ = ٠$

أ$_١$ أ$_٢$ + ب$_١$ ب$_٢$ + جـ$_١$ جـ$_٢$ = ٠

ملاحظة

- إذا كان $\frac{أ_1}{ب_1} = \frac{جـ_1}{جـ_2} \neq \frac{أ_2}{ب_2}$ فإن المستويين متوازيان وغير منطبقين.
- إذا كان $\frac{أ_1}{ب_1} = \frac{جـ_1}{جـ_2} = \frac{أ_2}{ب_2}$ فإن المستويين منطبقان.

مثال ١

أوجد قياس الزاوية بين المستويين : س + ٢ ص − ٣ ع = ٢٠ ، ٣ س − ٢ ص + ٢ ع = ٣

الحل

$\vec{ن_1} = (١ ، ٢ ، ٣)$ ، $\vec{ن_2} = (٣ ، ٢ ، ٢)$

∴ جتا θ = $\frac{(١ ، ٢ ، ٣) \cdot (٣ ، ٢ ، ٢)}{\sqrt{١ + ٤ + ٩}\ \sqrt{٩ + ٤ + ٤}}$ = $\frac{٢٣}{٣٤}$

∴ θ = ٦٣° ١′

مثال ٢

أوجد ك التي تجعل المستويين :

٣ س − ٤ ص + ٢ ع + ٩ = ٠ ، ٣ س − [illegible] = ٠ متعامدين

الحل

$\vec{ن_1} = (٣ ، -٤ ، ٢)$ ، $\vec{ن_2}$ [illegible] المستويان عندما $\vec{ن_1} \cdot \vec{ن_2}$ = ٠

[illegible] (٣ ، −٤ ، ٢) [illegible] = ٠

∴ ٩ − ١٦ + ٢ ك = ٠

مثال ٣

إذا كان قياس الزاوية بين المستويين [illegible] = ٤٥° أوجد : م

٣ س − [illegible] ع = ٤ [illegible]

[illegible] (٣ ، ٦ ، م) ، $\vec{ن_2}$ = (١ ، ١ ، ١٠)

[illegible]

∴ جتا θ = $\frac{\vec{ن_1} \cdot \vec{ن_2}}{|\vec{ن_1}|\ |\vec{ن_2}|}$ [illegible]

[illegible] = ٤ [illegible] وبتربيع الطرفين ∴ [illegible]

∴ م = [illegible]

٣٦ = [illegible]

معادلة خط تقاطع مستويين

إذا كان م : أ س + ب ص + جـ ع = ء ، م : أ س + ب ص + جـ ع = ء

معادلتي مستويين [illegible] في الفراغ فإن النسب $\frac{أ}{ب} \neq \frac{جـ}{جـ}$

نسب جيبية [illegible] مستقيمين متقاطعين ويمكن إيجاد معادلة

خط التقاطع [illegible] التي يوضح تقاطعهما

مثال ٤

أوجد [illegible] تقاطع مستويين

م [illegible] ، $\vec{ن_2}$ [illegible] ٢ س ، ص ، ع = ٠

[illegible]

[illegible] س ، ص ، ٢ ع = ٠

[illegible] = ٠

∴ المستويان متقاطعان

[illegible] س [illegible] بقسمة (٢) بحذف المتغير ص

[illegible] س + ٣ ع

[illegible]

[illegible] بقسمة (٢) ، ٢ ، وبالجمع إلى (١) بحذف المتغير ع

[illegible] ٣ س

[illegible] س − ٣ ص = ٣

من (٣) ، (٤) : ∴ معادلة خط التقاطع هى س = $\frac{-٣ - ٣ص}{٥}$ = ٢ ع

أى أن : $\frac{س}{١} = \frac{ص + ١}{\frac{-٥}{٣}} = \frac{ع}{\frac{١}{٣}}$

أى أن : $\frac{س}{-٣} = \frac{ص + ١}{٥} = \frac{ع}{-١}$ «الصورة الإحداثية»

حل آخر :

س + ص + ٢ ع + ١ = ٠ (١)

٢ س + ص − ع + ١ = ٠ (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ س − ٣ ع = ٠

ويفرض $\boxed{ع = ك}$ ∴ $\boxed{س = ٣ ك}$

وبالتعويض فى (١) : ∴ ٣ ك + ص + ٢ ك + ١ = ٠ ∴ $\boxed{ص = -١ - ٥ ك}$

∴ المعادلات البارامترية لخط التقاطع هى :

س = ٣ ك ، ص = −١ − ٥ ك ، ع = ك

∴ $\frac{س}{٣} = \frac{ص + ١}{-٥} = \frac{ع}{١}$ أى أن : $\frac{س}{-٣} = \frac{ص + ١}{٥} = \frac{ع}{-١}$

حل ثالث :

∵ خط التقاطع يكون عموديًا على متجهى الاتجاه العموديين على المستويين ($\overleftarrow{ن}_١$ ، $\overleftarrow{ن}_٢$)

، ∵ $\overleftarrow{ن}_١$ = (١ ، ١ ، ٢) ، $\overleftarrow{ن}_٢$ = (٢ ، ١ ، −١)

∴ $\overleftarrow{ك}$ = ($\overleftarrow{ن}_١ \times \overleftarrow{ن}_٢$) يكون متجه اتجاه لخط التقاطع.

∴ $\overleftarrow{ك} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ١ & -١ \end{vmatrix} = -٣ \overleftarrow{س} + ٥ \overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع}$

ولإيجاد نقطة تنتمى لخط التقاطع نضع س = ٢ «أو أى رقم آخر» فى معادلتى المستويين

∴ ص + ٢ ع = −٣ (١)

، ص − ع = −٥ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ ع = $\frac{٢}{٣}$ ، ص = $\frac{-١٣}{٣}$

∴ النقطة (٢ ، $\frac{-١٣}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$) تقع على خط التقاطع

∴ الصورة المتجهة لخط التقاطع هى :

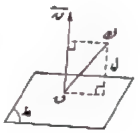
$\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، $\frac{-١٣}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$) + ك (−٣ ، ٥ ، −١)

∴ $\frac{س - ٢}{-٣} = \frac{ص + \frac{١٣}{٣}}{٥} = \frac{ع - \frac{٢}{٣}}{-١}$

لاحظ أن

يمكن إيجاد نقطتين على خط التقاطع ومنها يمكن إيجاد متجه اتجاه خط التقاطع.

طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى



إذا كانت : ق (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) ∉ المستوى ط

حيث ط : أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠

الذى فيه $\overleftarrow{ن}$ = (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه عمودى ،

و (س$_٢$ ، ص$_٢$ ، ع$_٢$) أى نقطة تقع على المستوى ط

فإن طول العمود المرسوم من النقطة ق إلى المستوى ط ونرمز له بالرمز ل

هو طول مسقط المتجه $\overleftarrow{ق ق}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{ن}$ أى أن : $\boxed{ل = \frac{|\overleftarrow{ق ق} \cdot \overleftarrow{ن}|}{|\overleftarrow{ن}|}}$

∴ $\overleftarrow{ق ق}$ = $\overleftarrow{ق}$ − $\overleftarrow{ق}$ = (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) − (س$_٢$ ، ص$_٢$ ، ع$_٢$)

= (س$_١$ − س$_٢$ ، ص$_١$ − ص$_٢$ ، ع$_١$ − ع$_٢$)

∴ ل = $\frac{|(س_١ - س_٢ ، ص_١ - ص_٢ ، ع_١ - ع_٢) \cdot (أ ، ب ، حـ)|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢}}$

∴ ل = $\frac{|أ (س_١ - س_٢) + ب (ص_١ - ص_٢) + حـ (ع_١ - ع_٢)|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢}}$

∴ ل = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + حـ ع_١ - (أ س_٢ + ب ص_٢ + حـ ع_٢)|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢}}$

، ∵ ق (س₁ ، ص₁ ، ع₁) ∈ المستوى ط

∴ أ س₁ + ب ص₁ + حـ ع₁ = −د (من معادلة المستوى)

∴ $\boxed{ل = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + حـ ع_1 + د|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + حـ^2}}}$

وتسمى الصورة الإحداثية لطول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى.

مثال ٥

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ (٣ ، ٥ ، ١) إلى المستوى الذى معادلته :

(١) س + ٢ ص − ٢ ع + ٥ = ٠ (٢) $\overrightarrow{ن}$. (١ ، ٢ ، −١) = ٢

الحل

(١) ∵ معادلة المستوى س + ٢ ص − ٢ ع + ٥ = ٠ ، النقطة أ (٣ ، ٥ ، ١)

∴ طول العمود = $\frac{|٣ + ٢ (٥) − ٢ (١) + ٥|}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}} = \frac{|١٦|}{٣} = ٥\frac{١}{٣}$ وحدة طول.

(٢) $\overrightarrow{ن}$ = (١ ، ٢ ، −١) هو متجه اتجاه عمودى على المستوى ولايجاد نقطة ب ∈ المستوى نضع أى قيمتين لـ س ، ص مثلًا ونحسب قيمة ع المناظرة فى معادلة المستوى

فمثلاً نضع س = ١ ، ص = ٢

∴ (١ ، ٢ ، ع) . (١ ، ٢ ، −١) = ٢

∴ ١ + ٤ − ع = ٢

∴ ع = ٣

∴ النقطة ب (١ ، ٢ ، ٣) ∈ المستوى

∴ $\overrightarrow{ب أ}$ = (٣ ، ٥ ، ١) − (١ ، ٢ ، ٣) = (٢ ، ٣ ، −٢)

∴ طول العمود ل = $\frac{|\overrightarrow{ب أ} . \overrightarrow{ن}|}{\|\overrightarrow{ن}\|} = \frac{|(٢ ، ٣ ، −٢) . (١ ، ٢ ، −١)|}{\sqrt{١ + ٤ + ١}}$

= $\frac{|٢ + ٦ + ٢|}{\sqrt{٦}} = \frac{٥\sqrt{٦}}{٣}$ وحدة طول.

لاحظ أن

يمكن وضع قيمتين لـ س ، ع وحساب قيمة ص من معادلة المستوى أ، وضع قيمتين لـ ع ، ص وحساب قيمة س من معادلة المستوى.

يمكن الحل أيضًا عن طريق ايجاد المعادلة العامة للمستوى واستخدام الصورة الإحداثية لطول العمود كالتالى :

∵ $\overrightarrow{ن}$. (١ ، ٢ ، −١) = ٢ ∴ س + ٢ ص − ع − ٢ = ٠

∵ النقطة أ (٣ ، ٥ ، ١)

∴ طول العمود ل = $\frac{|٣ + ٢ (٥) − (١) − ٢|}{\sqrt{١ + ٤ + ١}} = \frac{|١٠|}{\sqrt{٦}} = \frac{٥\sqrt{٦}}{٢}$ وحدة طول.

المسافة بين مستويين متوازيين

لإيجاد المسافة بين مستويين متوازيين فى الفراغ نوجد نقطة تقع على أحدهما ونحسب طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى المستوى الآخر.

مثال ٦

أثبت أن المستويين ط₁ : س − ٢ ص − ٢ ع − ١٢ = ٠ ، ط₂ : $\overrightarrow{ن}$. (−٣ ، ٦ ، ٦) = ٩ متوازيان وأوجد البعد بينهما.

الحل

بالنسبة للمستوى الأول $\overrightarrow{ن_1}$ = (١ ، −٢ ، −٢)

، بالنسبة للمستوى الثانى $\overrightarrow{ن_2}$ = (−٣ ، ٦ ، ٦)

∵ $\frac{١}{-٣} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-٢}{٦}$ ∴ المستويان متوازيان.

وبوضع س = −١ ، ص = −٢ فى معادلة المستوى ط₂

∴ (−١ ، −٢ ، ع) . (−٣ ، ٦ ، ٦) = ٩ ∴ ٣ − ١٢ + ٦ ع = ٩

∴ ع = ٣ ∴ النقطة (−١ ، −٢ ، ٣) ∈ المستوى ط₂

∴ البعد بين المستويين = طول العمود من (−١ ، −٢ ، ٣) إلى ط₁

∴ ل = $\frac{|−١ − ٢ (−٢) − ٢ (٣) − ١٢|}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}} = ٥$ وحدة طول.

مثال ٧

أوجد معادلة المستوى الموازى للمستوى : ٢ س + ص − ٤ ع + ٥ = ٠ والواقع على بعد $\sqrt{٢١}$ وحدة طول من النقطة (١ ، ٢ ، ٠)

الحل

∵ المستوى يوازى المستوى ٢ س + ص − ٤ ع + ٥ = ٠

∴ معادلته تكون على الصورة ٢ س + ص − ٤ ع + ء = ٠

، ∵ بعد العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٢ ، ٠) إلى المستوى المطلوب = $\sqrt{٢١}$ وحدة طول.

∴ $\sqrt{٢١} = \frac{|٢(١) + (٢) - ٤(٠) + ء|}{\sqrt{٤ + ١ + ١٦}}$

∴ ٢١ = |٤ + ء| ∴ ٤ + ء = ٢١ ∴ ء = ١٧

أ، ٤ + ء = −٢١ ∴ ء = −٢٥

∴ المستويان ٢ س + ص − ٤ ع + ١٧ = ٠ ، ٢ س + ص − ٤ ع − ٢٥ = ٠

يوازيان المستوى ٢ س + ص − ٤ ع + ء = ٠

وكل منهما يبعد $\sqrt{٢١}$ وحدة طول من النقطة (١ ، ٢ ، ٠)

مثال ٨

أوجد النسبة التى يقسم بها المستوى : ٢ س − ٣ ص + ٤ ع = ٥ المسافة بين النقطتين

أ (١ ، ١ ، ١) ، ب (٣ ، ٢ ، −١)

الحل

∵ ٢ (١) + ٣ (١) − (١) = ٤ ، ٢ (٣) + ٣ (٢) + ١ = ١٥ > ٥

∴ أ ، ب فى جهتين مختلفتين من المستوى

∴ المستوى يقسم $\overline{أب}$ من الداخل

ومن تشابه ΔΔ أ حـ ء ، ب هـ ء

فإن $\frac{م_١}{م_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢}$

حيث ل١ ، ل٢ هما طولا العمودين من أ ، ب إلى المستوى على الترتيب

، ∴ $ل_١ = \frac{|٢(١) + ٣(١) - (١) - ٥|}{\sqrt{٤ + ٩ + ١}} = \frac{١}{\sqrt{١٤}}$

، $ل_٢ = \frac{|٢(٣) + ٣(٢) - (-١) - ٥|}{\sqrt{٤ + ٩ + ١}} = \frac{٨}{\sqrt{١٤}}$

∴ $ل_١ : ل_٢ = ١ : ٨$ ∴ $م_١ : م_٢ = ١ : ٨$

ملاحظة

إذا كان أ (س١ ، ص١ ، ع١) ، ب = (س٢ ، ص٢ ، ع٢)

وكانت النقطة ء تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة م١ : م٢ فإن إحداثيات نقطة التقسيم

ء = $\left(\frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} ، \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢} ، \frac{م_١ ع_٢ + م_٢ ع_١}{م_١ + م_٢}\right)$

ويمكن حل [illegible] السابق كما يلى :

نوجد إحداثيات نقطة التقسيم من الداخل ء = $\left(\frac{٣ م_١ + م_٢}{م_١ + م_٢} ، \frac{٢ م_١ + م_٢}{م_١ + م_٢} ، \frac{-م_١ + م_٢}{م_١ + م_٢}\right)$

، ∵ هذه النقطة تنتمى للمستوى

∴ $٢\left(\frac{٢ م_١ + م_٢}{م_١ + م_٢}\right) + ٣\left(\frac{٢ م_١ + م_٢}{م_١ + م_٢}\right) - \left(\frac{-م_١ + م_٢}{م_١ + م_٢}\right) = ٥$

∴ ٦ م١ + ٢ م٢ + ٦ م١ + ٣ م٢ + م١ − م٢ = ٥ م١ + ٥ م٢

∴ $\frac{م_١}{م_٢} = \frac{١}{٨}$

∴ ٨ م١ = م٢

2

ملاحظة

٥١٨

7

٢ عين قيمة ا التي تتحقق عندها كل زوج من المعادلات الآتية .

٥١٩

• (٣ ، ٥ ، أ) ⃗ن = ٣ ، س + ٣ ص + ٢ ع = ٥

• ٧ س − ٢ ص = ٧ ، (أ ، ١ ، −٣) . ⃗ن = .

٥ حدد وضع كل من المستويين بالنسبة للآخر :

• ٢ س + ٣ ص + ٤ ع − ١٢ = ٠ ، ٣ س − ٦ ص + ١ = ٠ .

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

• قياس الزاوية المحصورة بين المستويين س + ص = ١ ، ص + ع = ١ يساوى

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٧٥°

• قياس الزاوية بين المستويين ٣ س + ٤ ص + ٥ ع = ٠ ، ٢ س − ص + ٢ ع = ٥ هى

(أ) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) $\frac{\pi}{3}$ (د) $\frac{\pi}{6}$

• قياس زاوية بين المستويين ⃗ن = (١ ، ١ ، ٢) ، ٧ ، ٢ س − ص + ع = ٠ يساوى

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

• قياس الزاوية بين المستويين ٣ س + ٦ ص + ٦ ع − ٤ = صفر ، س + ع + ٧ = صفر هو

(أ) ٩٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٣٠°

• قياس الزاوية بين المستويين ص = ٠ ، ع = ٠ هو

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

• قياس زاوية بين المستويين س = ٥ ، ص = ٠ هى

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) [illegible] (د) ١٢٠°

• المستويان ٢ س + ٣ ص − ٥ ع = ٢ ، [illegible] س − ١٠ ع = ١٠

(أ) متقاطعان (ب) متوازيان. (جـ) [illegible] (د) متعامدان.

المستويان ٢ س − ص + ٢ ع = ٨ ، ٣ س + ٤ ص − ع = ٧ .

متعامدان (ب) متوازيان.

(جـ) منطبقان (د) قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{4}$

• إذا كان المستويان ٣ س − ص + ٢ ع + ٤ = صفر ، س + ٢ ص + ك ع = ٢ متعامدين فإن ك =

(أ) ٤ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{2}$

• إذا كان المستوى س − ٣ ص + هـ ع = ٥ ، مستوى ٣ س + ك ص + ٦ ع = ١٠ متوازيين فإن ك + هـ =

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

• [illegible] المستويان ٢ س + جـ ص + ٤ ع = ١

، (أ ، ٢) س + ٦ ص + (ب − ٢) ع = ٥ متوازيين

فإن ٢ أ − ب =

(أ) ٦ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ١٢

• المستويان ٢ س + ٤ ع = ١٢ ، ⃗ن (٣ ، ٦ ، ٠) = ١ يكون

(أ) منطبقين (ب) متوازيان.

(جـ) متقاطعين (د) متقاطعان بدون تعامد.

• إذا كان أ س + ب ص + ٣ ع = ١ عمودى على كل من المستويين ٣ س + ٢ ع = ٠ ، ٢ س + ٣ ص = ٥ .

فإن أ − ب =

(أ) ٠ (ب) ٦ (جـ) ٦ (د) ٢١

• تبعد النقطة (٣ ، ١ ، ٢) عن المستوى الإحداثى س ع بمسافة تساوى وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ١

(١٥) المستويان : أ١ س + ب١ ص + جـ١ ع + د١ = ٠ ، أ٢ س + ب٢ ص + جـ٢ ع + د٢ = ٠ يكونان متعامدين إذا كان .....

(أ) أ١ أ٢ + ب١ ب٢ + جـ١ جـ٢ = ١ (ب) أ١ أ٢ + ب١ ب٢ + جـ١ جـ٢ = ٠

(جـ) $\frac{أ١}{أ٢} = \frac{ب١}{ب٢} = \frac{جـ١}{جـ٢}$ (د) أ١ ب٢ + أ٢ ب١ = ٠

(١٦) المستويان : أ١ س + ب١ ص + جـ١ ع + د١ = ٠ ، أ٢ س + ب٢ ص + جـ٢ ع + د٢ = ٠ يكونان متوازيين إذا كان .....

(أ) أ١ أ٢ + ب١ ب٢ + جـ١ جـ٢ = ٠

(ب) أ١ = م أ٢ ، ب١ = م ب٢ ، جـ١ = م جـ٢

(جـ) أ١ = أ٢ ، ب١ = ب٢ (د) $\frac{أ١}{أ٢} = \frac{ب١}{ب٢} = \frac{جـ١}{جـ٢}$

(١٧) [ب] معادلة خط تقاطع المستويين ل١ : ٢ س − ص + ع − ١ = ٠ ، ل٢ : س − ٣ ص − ع + ٢ = ٠ هي

(أ) $\frac{س + ١}{-١} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{٣}$ (ب) $\frac{س - ١}{١} = \frac{ص}{٣} = \frac{ع + ٠}{١}$

(جـ) $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص - ٣}{-٢} = \frac{ع}{-١}$ (د) $\frac{س - ١}{٤} = \frac{ص - ١}{٣} = \frac{ع}{٥}$

(١٨) خط تقاطع المستويين : ص = ٥ ، س = ٤ هو .....

(أ) يوازي المستوى ع = ٠ (ب) المتجه (٤ ، ٥ ، ٠) متجه اتجاهه

(جـ) المتجه (٠ ، ٠ ، ٩) متجه اتجاهه (د) يقع في المستوى س ص

(١٩) خط تقاطع المستويين : $\overrightarrow{ر}$. (٣ ، −١ ، ١) = ١ ، $\overrightarrow{ر}$. (١ ، ١ ، −٢) = ٢ يكون موازيًا للمتجه

(أ) (٢ ، ٧ ، ١) (ب) (٢ ، ٥ ، ١٣)

(جـ) (١ ، ٧ ، ٤) (د) (١ ، ١٢ ، ١)

(٢٠) [أوائل ٢٠١٨] طول العمود من النقطة (٢ ، ٣ ، ١) إلى المستوى ٢ س − ٢ ص + ع = ٥ هو ..... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢١) بُعد المستوى ٢ س − ٣ ص + ٦ ع + ١٤ = ٠ عن نقطة الأصل هو ..... وحدة طول.

(أ) ١١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ١٤

(٢٢) المسافة بين المستويين ص = ٤ ، ص = −٢ هي ..... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٣) إذا كانت المسافة بين المستويين ع = ٤ ، ع = أ تساوي ٦ وحدات فإن أ = ...

(أ) ١٠ (ب) −٢ (جـ) ١٠ أو −٢ (د) ٢

(٢٤) المسافة بين المستويين س − ٢ ص − ٢ ع − ١٢ = ٠ ، $\overrightarrow{ر}$. (−٣ ، ٦ ، ٦) = ٩ تساوي ..... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٢٥) [أ] طول العمود المرسوم بين المستويين : ٣ س + ١٢ ص − ٤ ع = ٩ ، ٣ س + ١٢ ص − ٤ ع = −١٧ يساوي .....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٢٦) إذا كان طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستوى ط هو ٧ وحدات طولية ونسب الاتجاه للمستقيم الحامل له هي −٣ ، ٢ ، ٦ فأي من المعادلات الآتية هي معادلة المستوى ط ؟

(أ) −٣ س + ٢ ص + ٦ ع − ٧ = ٠ (ب) −٣ س + ٢ ص + ٦ ع − ٤٩ = ٠

(جـ) ٣ س − ٢ ص + ٦ ع + ٧ = ٠ (د) −٣ س + ٢ ص − ٦ ع − ٤٩ = ٠

٧ أوجد معادلة خط التقاطع لكل زوج من المستويات الآتية :

٣ س − ص + ٢ ع = ٣ ، س − ٢ ص + ٥ ع = ٢

س + ٢ ص − ٢ ع = ١ ، ٢ س + ص − ٣ ع = ٥

$\vec{ر} \cdot (٣\vec{س} - \vec{ص} + \vec{ع}) = ١$ ، $\vec{ر} \cdot (\vec{س} + ٤\vec{ص} - ٢\vec{ع}) = ٢$

٨ أوجد الصور المختلفة لمعادلة خط تقاطع المستويين : س + ص + ع = ١ ، س + ع = .

٩ أثبت أن المستويين : ٣ س − ص − ع = ٢ ، س − ٢ ص + ٢ ع = ١

متقاطعان وأوجد معادلة خط التقاطع

١٠ أثبت أن خط تقاطع المستويين : س + ص − ع = ٠ ، س − ص + ٥ ع + ٧ = ٠

يوازى المستقيم الذى معادلته الإحداثية $\frac{س + ٣}{٣} = \frac{ص - ١}{-٢} = \frac{ع - ٥}{١}$

١١ أوجد معادلة المستوى العمودى على كل من المستويين :

س − ٢ ص − ٣ ع + ٥ = صفر ، ٣ س − ص + ٢ ع − ١ = صفر

ويمر بالنقطة (١ ، ٣ ، −٥)

١٢ أوجد معادلة المستوى المار بالنقطتين : (١ ، −١ ، ١) ، (−١ ، ١ ، ١) وعمودى على المستوى

س + ٢ ص + ٢ ع = ٥

١٣ أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين :

س + ص + ٢ ع + ١ = ٠ ، ٢ س + ص − ع + ١ = ٠

موازيًا المستقيم الواصل بين النقطتين $م_١$ (٢ ، ٥ ، −٣) ، $م_٢$ (٣ ، −٢ ، ٢)

١٤ أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين :

س + ٢ ص + ٣ ع − ٤ = ٠ ، ٢ س + ص − ع = ٠

وعموديًا على المستوى : ٣ س + ٢ ص + ع = ٦ .

١٥ أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، −٣ ، ٢) ويحوى خط تقاطع المستويين :

٦ س + ٤ ص + ٣ ع + ٥ = ٠ ، ٢ س + ص + ع = ٢

١٦ أوجد بُعد النقطة (٣ ، ٥ ، ٢) عن المستوى ٨ س − ٢ ص + ع = ٥

١٧ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١ ، ٣) على المستوى الذى معادلته

$\vec{ر} \cdot (٢ ، ٢ ، ١) = ٥$

١٨ أوجد بُعد النقطة (٢ ، ١ ، ١) عن المستوى $\vec{ر} \cdot (\vec{س} - ٢\vec{ص} + ٤\vec{ع}) = ٩$

١٩ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة أ (٠ ، −١ ، ٢) على المستوى

$\sqrt{٢}$ س + ص − ع + ك = ٠ يساوى ٢ وحدة طول أوجد قيمة : ك

٢٠ كرة مركزها م (٢ ، ١ ، −٢) وطول نصف قطرها ٣ وحدة طول موضوعة على المستوى

٢ س + ٦ ص + ٣ ع + ك = صفر أوجد قيمة : ك

٢١ كرة مركزها (١ ، ٢ ، ١) تمس سطح المستوى س + ص + ع = ١ أوجد معادلة الكرة.

٢٢ أوجد النقطة [illegible] على المحور س والمتساوية البعد عن كل من المستويين :

١٢ س + ٤ ع + ١ = ٠ ، ٢ س + ٢ ص − ع − ١ = ٠

٢٣ [illegible] أوجد معادلة المستوى الموازى للمستوى : ٢ س + ص − ٤ ع = ٠

والواقع على بعد $\sqrt{٢١}$ وحدة طول من النقطة (١ ، ٢ ، ٠)

٢٤ احسب بُعد النقطة (−١ ، ١ ، −٢) عن المستوى المار بالثلاث نقاط :

م١ (١ ، −١ ، ١) ، م٢ (−٢ ، ١ ، ٣) ، م٣ (٤ ، −٥ ، −٢) «٤ وحدة طول»

٢٥ أوجد البُعد بين المستويين المتوازيين :

س − ٢ ص + ٢ ع = ١ ، ٢ س − ٤ ص + ٤ ع = ٣ «$\frac{١}{٦}$ وحدة طول»

٢٦ أثبت أن المستويين : ٢ س + ص + ٢ ع = ٨ ، ٤ س + ٢ ص + ٤ ع + ٥ = ٠ متوازيان، وأوجد البعد بينهما. «$٣\frac{١}{٢}$ وحدة طول»

٢٧ أثبت أن المستويين المتوازيين :

♣ ط١ : أ س + ب ص + حـ ع + ء١ = ٠ ، ط٢ : أ س + ب ص + حـ ع + ء٢ = ٠ .

يكون البعد بينهما $\frac{|ء١ - ء٢|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢}}$

٢٨ أوجد بُعد المستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، −٢ ، ٣) + ك (١ ، −١ ، ٤)

♣ عن المستوى $\overleftarrow{ر}$. (١ ، ٥ ، ١) = ٥ «$\frac{١٠}{٣\sqrt{٣}}$ وحدة طول»

٢٩ إذا كانت النقط : أ ، ب ، حـ ، ء فى الفراغ متجهات موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هى : −$\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$ ، ٢ $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ + ٣ $\overleftarrow{ع}$ ، −$\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ + ٢ $\overleftarrow{ع}$ ، ٧ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$ + ٢ $\overleftarrow{ع}$ على الترتيب.

(١) أوجد متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب حـ

(٢) بين أن طول العمود المرسوم من ء على مستوى أ ب حـ يساوى ٢ $\sqrt{٦}$

(٣) بين أن المستويين أ ب حـ ، ء ب حـ متعامدان.

(٤) أوجد معادلة خط تقاطع المستويين أ ب حـ ، ء ب حـ

٣٠ إذا كان المستوى س يحوى النقط : أ (١ ، ٤ ، ٢) ، ب (١ ، ٠ ، ٥) ، حـ (٠ ، ٨ ، −١) وكان المستوى ص يحوى النقطة ء (٢ ، ٢ ، ٣) والمتجه $\overleftarrow{ن}$ = $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ + ٢ $\overleftarrow{ع}$ عمودى عليه

(١) أوجد المعادلة الإحداثية للمستوى س

(٢) أوجد المعادلة الإحداثية للمستوى ص

(٣) إذا كانت النقطة (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كل من المستويين س ، ص فما قيمة كل من ط ، ف

(٤) أوجد الصورة المتجهة لخط تقاطع المستويين س ، ص

(٥) إذا كانت النقطة (١ ، ١ ، ق) على أبعاد متساوية من المستويين س ، ص أوجد قيم ق الممكنة.

٣١ أوجد طول نصف قطر السطح الدائرى الناتج من تقاطع الكرة :

♣ س^٢ + ص^٢ + ع^٢ − ٢ ص − ٤ ع = ١١ والمستوى س + ٢ ص + ٢ ع = ١٥ «$\sqrt{٧}$ وحدة طول»

٣٢ إذا قطع المستوى ٢ س − ص − ٢ ع + ١٢ = ٠ الكرة (س + ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ + (ع − ١)^٢ = ١٥ أوجد مساحة المقطع الناتج. «١١ π وحدة مربعة»

٣٣ إذا قطع المستوى ٢ س − ٢ ص + ع − ٥ = ٠ الكرة التى مركزها (٢ ، ٣ ، −٢) وكان

♣ محيط المقطع الناتج يساوى ٨ π وحدة طول أوجد معادلة الكرة.

«(س − ٢)^٢ + (ص − ٣)^٢ + (ع + ٢)^٢ − ٢٥ = ٠»

مسائل تقيس مهارات التفكير

٣٤ أوجد معادلة المستوى المنصف للزاوية بين المستويين :

♣ ٧ س + ص − ٦ = ٠ ، ٣ س + ٥ ص − ٤ ع + ١ = ٠

قريبًا بالمكتبات

سلسلة كتب

المعاصر

في

المراجعة النهائية
و نماذج الامتحانات

للصف الثالث الثانوى

الرياضيات التطبيقية
(الاستاتيكا - الديناميكا)

الرياضيات البحتة
(التفاضل والتكامل - الجبر والهندسة الفراغية)

ترخيص وزارة التربية (رقم ١٠٤ - ١٤ - ١ - ١٦٧)

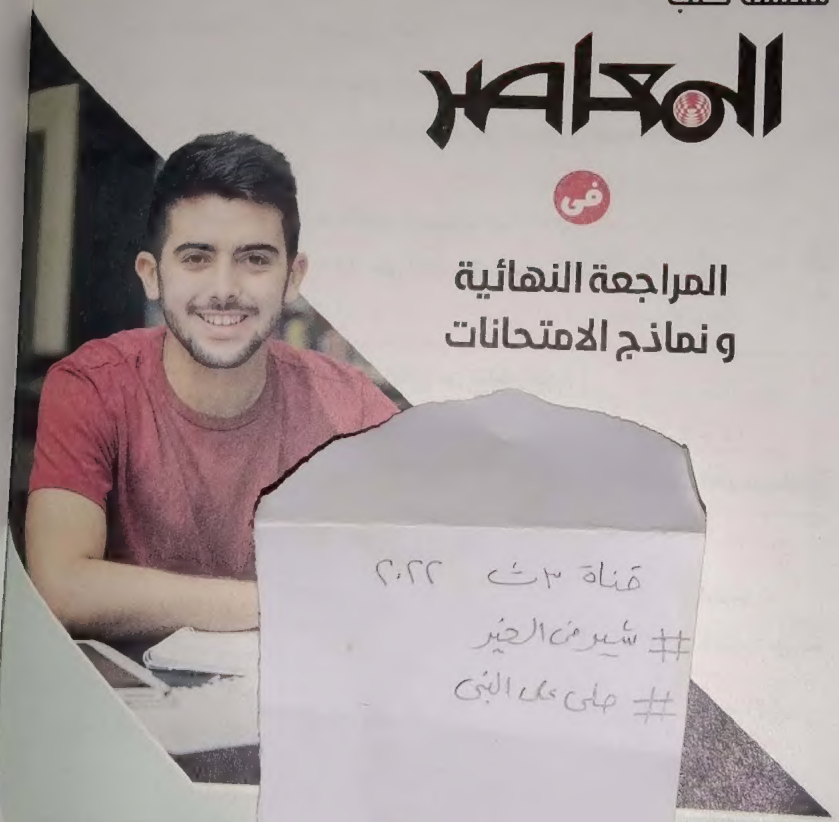
قريبًا بالمكتبات

سلسلة كتب

المعاصر

في

المراجعة النهائية
و نماذج الامتحانات



قناة ٣ث ٢٠٢٢
شيء من الخير
صلى على النبي

الرياضيات التطبيقية
(الاستاتيكا - الديناميكا)

الرياضيات البحتة
(التفاضل والتكامل - الجبر والهندسة الفراغية)

ترخيص وزارة التربية والتعليم ١٠٤ - ١٤ - ١ - ١٦٧

الجبر و الهندسة الفراغية

الرياضيات البحتة

الآن بالمكتبات

المعاصر في

- التفاضل و التكامل
- الاستاتيكا
- الديناميكا
- اللغة الإنجليزية
- اللغة الفرنسية

يُصرف مجانًا مع هذا الكتاب

- المراجعة المستمرة
- الجزء الخاص بالإجابات

عزيز إسحق سرجيوس
حسين جاويش

معاك
MaSak App

- أدخل كودك الشخصي الموجود على ظهر الغلاف
- لمزيد من المعلومات انظر صفحتي ٤، ٥

قناة ٣ث ٢٠٢٢
شهر من الخير
صلى على النبي

6 223007 310642

مكتبة الطلب
للطبع و النشر و التو
٣ شارع كامل صدقي-الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٣٧٧٩١
nfo@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com
الخط الساخن ١٥٠١٤